doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2026.06.039

双模式工作的三自由度并联机构拓扑设计与性能研究

李　菊　郭　跃　沈惠平
（常州大学现代机构学研究中心，常州 213164）

摘要： 针对一个生产过程需要 2 种不同输出类型或模式的问题，本文提出一种可双模式工作且部分运动解耦的三自由度并联机构，在工作过程无需改变其拓扑结构，可分别产生纯平移（3T）和两平移一转动（2T1R）2 种不同模式的输出运动，以实现不同的工艺操作。分析该机构在 2 种不同模式下的拓扑学、运动学及动力学性能，主要包括拓扑特性、位置正反解、速度及加速度、奇异位形分析、基于位置正解的工作空间计算、基于差分进化算法（DE）的工作空间优化，以及基于虚功原理序单开链法的机构动力学建模与驱动力曲线的求解。最后，对该机构用于生产线饮水杯喷码（2T1R 模式）和装箱（3T 模式）2 种工作模式应用的概念设计进行简单阐述。研究结果表明，该机构仅需通过驱动副不同的运动规律控制，就可实现 2 种模式运动，为需要不同输出类型的应用场景提供了一种新型的多模式运动设计理念。

关键词： 双模式工作；并联机构；拓扑设计；运动学；动力学
中图分类号： TH112　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 1000-1298(2026)06-0415-12　　**OSID：**

Topological Design and Performances Analysis of Three-degree-of-freedom Parallel Mechanism with Dual-mode Operation

LI Ju　GUO Yue　SHEN Huiping
(*Research Center for Advanced Mechanism Theory*, *Changzhou University*, *Changzhou* 213164, *China*)

Abstract: A revolutionary three-degree-of-freedom (3-DOF) parallel mechanism was introduced, which was capable of dual-mode operation with partially decoupled motion. This mechanism can generate two distinct types of output motion—pure translational (3T) and two-translational-one-rotational (2T1R)—without the need to alter its topological structure during operation. This unique capability allowed the mechanism to adapt to different technological processes and fulfill a wide range of industrial requirements. Then a thorough analysis of the mechanism's topological, kinematic, and dynamic performances in both operational modes was conducted. The topological characteristics of the mechanism were carefully examined, and direct and inverse solutions for position, velocity, and acceleration were derived. Furthermore, an investigation into singular configurations was carried out to ensure the stability and reliability of the mechanism. Based on the direct position solution, the workspace of the mechanism was calculated, and workspace optimization was performed by using the differential evolution (DE) algorithm to enhance its performance and efficiency. Additionally, dynamics modeling of the mechanism was performed by using the virtual work principle and the serial single open chain method. This modeling allowed for the determination of driving force curves, which were essential for the design and optimization of the mechanism's drive system. Finally, a concise conceptual design was presented for the application of this mechanism in two operational modes on production lines. In the 2T1R mode, the mechanism was utilized for inkjet printing of drinking cups, demonstrating its precision and accuracy in positioning and motion control. In the 3T mode, the mechanism was used for boxing operations, showcasing its ability to handle larger loads and perform complex movements. This dual-mode capability of the mechanism offered unparalleled flexibility and adaptability for various industrial applications, making it a valuable addition to the manufacturing industry.

Key words: dual-mode operation; parallel mechanism; topology design; kinematics; dynamics

收稿日期：2024－11－15　修回日期：2024－12－12
基金项目： 常州智能制造龙城实验室项目（CJ20242061）和国家自然科学基金项目（52375007）
作者简介： 李菊（1981—），女，副教授，主要从事机器人机构设计和自动控制研究，E-mail：wangju0209@163.com

0 引言

饮水杯再加工和装箱工作[1]一般需人工完成，成本高且效率低，迫切需要自动化或半自动化生产线完成饮水杯再加工和包装的任务。机器输出两平移一转动(2T1R)实现饮水杯个性化图案雕刻或喷码；输出三平移(3T)实现饮水杯装箱。

目前，国内外学者提出了许多分别实现3T和2T1R的并联机构。HUANG等[2]设计了一种新型变长平行四边形闭环子链3T并联机构，在轻载、快速取放场合有很大优势；SONG等[3]基于开关方式设计了具有3T/3R运动模式的并联机构，并提出了其典型应用；沈惠平等[4]提出一种运动解耦性优异的单回路三平移子并联机构，并以此设计了4个具有较大工作空间的3T并联机构；QU等[5]提出了一种基于螺旋理论的解耦并联机构(DMP)类型综合方法，并得到了一些空间和平面全解耦2T1R机构；HAY等[6]通过一种约束自由度的方法将3-PRRS的六自由度并联机构重构成含有2T1R在内的多种少自由度的新机构；杜中秋等[7]设计了一种可用作快递中转站的智能分拣、投递的具有部分运动解耦性的2T1R并联机构，并进行了刚度与动力学分析。上述3-DOF 2T1R或3T并联机构都属于典型的并联机构，仅含一个动平台，只能实现一种运动输出，运动过程无需改变其拓扑结构，但未实现“一机多用”。

为达到“一机多用”，实现节约资源与降低能耗的目的[8-9]，学者们开始研究可重构机构，它是一类能够实现运动形式变化的机构，相对于传统机构，具有多构态变化，可满足多任务(多工况与多功能)的要求。可重构机构包含运动分岔机构[10-11]、变胞机构[12-13]、多模式机构[14-16]等子类。

ZHANG等[17]将可重构机构作为太空舱开门机构，可很好地实现舱门解锁、打开、关闭和锁定等操作；荣誉等[18]设计了一种由3-UPS机构改进的基于3-PUPS机构的超冗余变胞机械臂，基本达到通用式工业机器人精度水平；DAI等[19]设计了一种可实现自由度变化的腹腔微创手术机器人，通过改变末端执行器的刚度和输出力完成不同的作业；王汝贵等[20-21]设计了实现单自由度和两自由度间转变的码垛机器人，先用两自由度进行抓取及装卸的精确定位操作，再转为单自由度工作模式，稳定地实现搬运动作。

相对于传统机构，上述可重构机构为实现运动形式变化，运动过程中需改变其拓扑结构，因此需附加考虑如何具体改变其拓扑结构以平稳地切换工作模式的问题[22]。

本文设计一种双模式工作且部分运动解耦的三自由度并联机构。采用同一个主机构，无需改变其拓扑结构，仅分别取2个不同构件作为动平台输出，以高效且平稳地实现2种工作模式运动输出。

1 并联机构拓扑设计

1.1 拓扑设计与分析理论

1.1.1 POC方程

串联、并联机构POC计算式[23]为

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^{m} M_{Ji} \tag{1}$$

$$M_{pa} = \bigcap_{i=1}^{n} M_{bi} \tag{2}$$

式中 M_{Ji}——第i个运动副POC集

m——运动副数量

M_{bi}——第i条支链末端POC集

n——支链条数

M_{pa}——机构动平台POC集

1.1.2 自由度

基于最短回路(S-Loop)的一般过约束和无过约束并联机构非瞬时自由度计算式[24]为

$$F = \sum_{j=1}^{v} F_j = F_1 + F_2 + \cdots + F_v \tag{3}$$

其中

$$F_j = \sum f_j - \xi_{Lj} \tag{4}$$

$$\xi_{Lj} = \dim. \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^{j} M_{bi} \right) \cup M_{b(i+1)} \right\} \tag{5}$$

式中 F、F_j——机构、第j个回路自由度

v——独立回路数

f_j——第j个回路中新添加支链(首次参与计算)的运动副自由度(不含局部自由度)

ξ_{Lj}——第j个回路独立位移方程数

1.1.3 耦合度κ

由基于序单开链(SOC)的机构组成原理知，任一机构可分解为约束度为正、零、负3种有序单开链(SOC)，第j个SOC_j约束度为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{6}$$

式中 m_j——第j个SOC_j运动副数

I_j——第j个SOC_j驱动副数

f_i——第i个运动副自由度

由有序的一组SOC(约束度之和为零)组成的最小子运动链(SKC)耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2}\min\left(\sum_{j=1}^{v} |\Delta_j|\right) \tag{7}$$

式中，$\sum_{j=1}^{v} |\Delta_j|$表明 SKC 分解为 v 个 $SOC(\Delta_j)$，可有多种分配方案，取 $\sum |\Delta_j|$为最小者。

1.2　机构拓扑设计

根据式(1)、(2)设计如图 1 所示的双模式工作 3－DOF 并联机构[25]，具有 3T 和 2T1R 2 种模式输出运动。

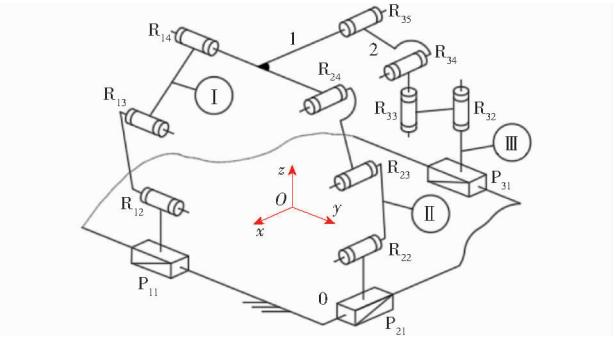

图 1　双模式工作的并联机构

Fig. 1　PM with dual-mode operation

1.2.1　3T 运动模式拓扑构成

选取构件 1 为动平台，则该机构由静平台 0、动平台 1 和 3 条简单支链Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ并联而成，3 条简单支链的拓扑结构分别为$\{P_{11} /\!/ R_{12} /\!/ R_{13} /\!/ R_{14}\}$、$\{P_{21} /\!/ R_{22} /\!/ R_{23} /\!/ R_{24}\}$、$\{P_{31} \perp R_{32} /\!/ R_{33} \perp R_{34} /\!/ R_{35}\}$，其中，符号“$/\!/$”、“$\perp$”分别表示平行、垂直关系，下同。

R_{14}、R_{24}和 R_{35}分别与动平台 1 相连，且 $R_{14} \perp R_{24}$，$R_{24} /\!/ R_{35}$。3 个驱动副 P_{11}、P_{21}和 P_{31}位于静平台 0 上，其中，P_{11}和 P_{31}沿着平行于 y 轴导轨移动，P_{21}沿着平行于 x 轴导轨移动。

1.2.2　2T1R 运动模式拓扑构成

选取构件 2 为动平台，则该机构由静平台 0、动平台 2，以及 1 条混合支链和 1 条简单支链并联而成，其中，混合支链由分支$\{P_{11} /\!/ R_{12} /\!/ R_{13} /\!/ R_{14}\}$和分支$\{P_{21} /\!/ R_{22} /\!/ R_{23} /\!/ R_{24}\}$并联后，再串联一个转动副 R_{35}而成；而简单支链为$\{P_{31} \perp R_{32} /\!/ R_{33} \perp R_{34}\}$。

R_{35}和 R_{34}分别与动平台 2 相连，且 $R_{34} /\!/ R_{35}$。其静平台结构与 3T 模式的相同。

2　拓扑分析

2.1　POC 分析

2.1.1　3T 运动模式动平台 1 POC 集

选取动平台 1 上任意一点为基点。

第Ⅰ、Ⅱ支链 POC 集由式(1)可得

$$M_{bi} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(/\!/R_{i2}) \end{bmatrix} \quad (i = 1,2)$$

而第Ⅲ支链 POC 集为

$$M_{b3} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{32}) \\ r^1(/\!/R_{32}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_{34}) \\ r^1(/\!/R_{34}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(/\!/\diamond(R_{32},R_{34})) \end{bmatrix}$$

由式(2)得动平台 1 POC 集由 3 条支链“交”运算为

$$M_{pa} = M_{b1} \cap M_{b2} \cap M_{b3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(/\!/R_{12}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(/\!/R_{22}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(/\!/\diamond(R_{32},R_{34})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

2.1.2　2T1R 运动模式动平台 2 POC 集

选取 R_{34}轴线一点为基点。

由式(1)可得 2 条分支链 POC 集为

$$M_{bi} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(/\!/R_{i2}) \end{bmatrix} \quad (i = 1,2)$$

由 2 条分支链并联后，又和 R_{35}组成混合支链，由式(1)、(2)可得混合支链 POC 集为

$$M_{HSOC1} = (M_{b1} \cap M_{b2}) \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp(R_{35},\rho_{35})) \\ r^1(/\!/R_{35}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(/\!/R_{35}) \end{bmatrix}$$

由式(1)可得简单支链Ⅲ POC 集为

$$M_{b3} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{33}) \\ r^1(/\!/R_{33}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^0 \\ r^1(/\!/R_{34}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{33}) \\ r^2(/\!/\diamond(R_{33},R_{34})) \end{bmatrix}$$

因此，由式(2)得动平台 2 POC 集为

$$M_{pa} = M_{HSOC1} \cap M_{b3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(/\!/R_{35}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{33}) \\ r^2(/\!/\diamond(R_{33},R_{34})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{33}) \\ r^1(/\!/R_{35}) \end{bmatrix} \tag{9}$$

2.2　DOF 计算

2 种组成方式，该机构均含有 2 个独立回路。在 3T 运动模式下，根据最优路径选择原则，最优路径具体为：

(1)第 1 回路(第 1 个子并联机构)由第Ⅰ、Ⅱ支链组成，记为$\{P_{11} /\!/ R_{12} /\!/ R_{13} /\!/ R_{14} \perp R_{24} /\!/ R_{23} /\!/ R_{22} /\!/ P_{21}\}$，由式(5)可得其独立位移方程数为

$$\xi_{L1} = \dim.\{M_{b1} \cup M_{b2}\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(/\!/R_{12}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(/\!/R_{22}) \end{bmatrix}\right\} = 5$$

由式(4)得第 1 回路自由度为

$$F_1 = \sum_{i=1}^{m} f_i - \xi_{L1} = (4+4) - 5 = 3$$

(2) 第 2 回路由第 1 个子并联机构和第Ⅲ支链组成,记为$\{P_{31} \perp R_{32} /\!/ R_{33} \perp R_{34} /\!/ R_{35}\}$。

由式(5)可得第 2 回路独立位移方程数为

$$\xi_{L2} = \dim.\{(M_{b1} \cap M_{b2}) \cup M_{b3}\} =$$

$$\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(/\!/R_{22}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(/\!/\diamond(R_{32}, R_{34})) \end{bmatrix}\right\} = 5$$

由式(4)得第 2 回路自由度为

$$F = \sum_{i=1}^{m} f_i - \xi_{L2} = 5 - 5 = 0$$

因此,由式(3)得机构自由度为

$$F = \sum_{j=1}^{m} F_j = 3 + 0 = 3 \tag{10}$$

同理,在 2T1R 运动模式下,机构自由度 F 为 3。

2.3 耦合度 κ 计算

在 3T 运动模式下,由式(6)得两回路约束度为

$$\Delta_1 = F_1 - I_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_2 = F_2 - I_2 = 0 - 1 = -1$$

根据 SKC 判别准则,该机构第 1、2 回路构成 1 个 SKC,由式(7)得其耦合度 κ 为

$$\kappa = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2} |\Delta_j|\right) = \frac{1}{2} \times (1+1) = 1 \tag{11}$$

同理,在 2T1R 运动模式下,该机构第 1、2 回路同样构成 1 个 SKC,其耦合度 κ 为 1。

3 运动学及奇异性

3.1 位置正解

3.1.1 3T 运动模式

此时,该机构运动学建模如图 2 所示,设静平台 0 为正方形,其上 3 个移动副 P_{11}、P_{12}、P_{13}分别位于 A_1、A_2、A_3处;以静平台 0 几何中心点 O 为原点,建立笛卡尔静坐标系 $Oxyz$,x 轴垂直于 P_{11}的轴线,y 轴垂直于 P_{21}的轴线;而动坐标系 $O'x'y'z'$原点位于杆 D_1D_2 中心上,x'轴重合于直线 $O'E_3$,y'轴过 O'点且垂直于直线 $O'E_3$,而 z、z'分别由右手定则确定。

设该机构尺寸参数:静平台边长为 $2a$,$l_{D1D2} = 2b$,$l_{AiBi} = l_1(i=1,2,3)$,$l_{BiCi} = l_2$,$l_{CiDi} = l_3(i=1,2)$,$l_{B3C3} = l_4$,$l_{C3D3} = l_5$,$l_{E3D3} = l_6$,$l_{O'E3} = e$,记 E_3D_3与 y 轴负方向夹角为 α,B_3C_3与 x 轴正方向夹角为 β,下同。

假设 3 个驱动副 P_{11}、P_{21}、P_{31}移动为 y_{A1}、x_{A2}、y_{A3},求动平台 1 上点 O'坐标(x', y', z')。

由第Ⅰ、Ⅱ条支链拓扑约束知,动平台 1 上 O'的 x'、y'分别由移动 x_{A2}、y_{A1}量决定,即 $O' = (x_{A2}, y_{A1} + b, z')$;$E_3 = (x_{A2} - l_7, y_{A1} + b, z')$。

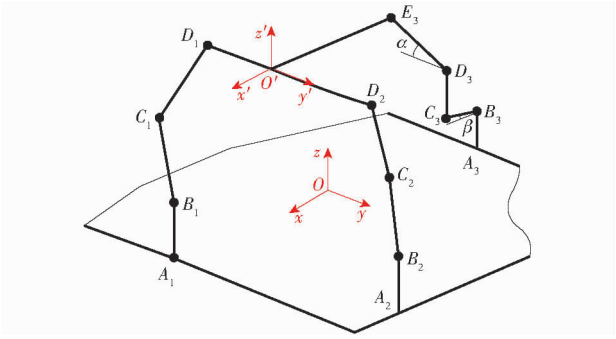

图 2 3T 模式运动学建模及参数标注

Fig. 2 Kinematic modeling and parameter annotation of 3T mode

由杆长条件 $E_3D_3 = l_6$,B_3、C_3和 D_3坐标分别为 $B_3 = (-a, y_{A3}, l_1)$;$C_3 = (x_{A2} - e, y_{A1} + b + l_6\cos\alpha, z' - l_6\sin\alpha - l_5)$;$D_3 = (x_{A2} - e, y_{A1} + b + l_6\cos\alpha, z' - l_6\sin\alpha)$。

根据杆长条件 $l_{B3C3} = l_4$以及 $B_3 = (-a, y_{A3}, l_4)$,可得

$$\begin{cases} x_{A_2} - e - l_4\cos\beta = -a \\ y_{A_1} + b + l_6\cos\alpha + l_4\sin\beta = y_{A_3} \\ z' - l_6\sin\alpha - l_5 = l_1 \end{cases}$$

并解得

$$\alpha = \arccos\frac{B}{l_6} \qquad \beta = \arccos\frac{A}{l_4}$$

$$z' = l_1 + l_5 \pm \sqrt{l_6^2 - B^2}$$

其中

$$A = x_{A_2} + a - e$$

$$B = y_{A_3} - y_{A_1} - b + \sqrt{l_4^2 - A^2}$$

因此,在 3T 运动模式下机构符号式位置正解为

$$\begin{cases} x' = x_{A_2} \\ y' = y_{A_1} + b \\ z' = f(y_{A1}, x_{A2}, y_{A3}) \end{cases} \tag{12}$$

式(12)表明,基点 O'坐标 x'仅由 x_{A2}决定,y'仅由 y_{A1}决定,仅 z'由 y_{A1}、x_{A2}、y_{A3}三者共同决定。因此,该机构在 3T 运动模式下输入-输出运动解耦性优良。

3.1.2 2T1R 运动模式

此时,机构运动学建模如图 3 所示,静坐标系 $Oxyz$ 同 3T 模式;动坐标系 $O'x'y'z'$原点位于转动副 R_{34}的轴线处,即点 D_3,x'轴平行于直线 $O'E_3$,y'轴过点 D_3且垂直于直线 $O'E_3$,而 z、z'分别由右手定则确定。

假设 3 个驱动副滑块 P_{11}、P_{21}、P_{31}移动 y_{A1}、x_{A2}、y_{A3},求动平台 2 上点 O'坐标$(x', y', l_1 + l_5)$及姿态角 α。

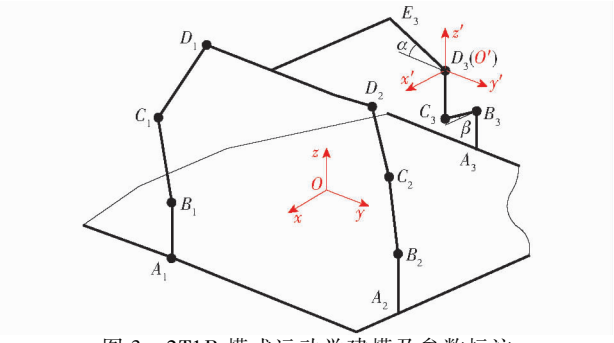

图 3　2T1R 模式运动学建模及参数标注

Fig. 3　Kinematic modeling and parameter annotation of 2T1R mode

由 3.1.1 节可得

$$x' = x_{A_2} - e\beta = \arccos\frac{A}{l_4}E_3(x_{A2} - e, y_{A1} + b, z')$$

而根据杆长条件 $l_{B3C3} = l_4$、$l_{E3D3} = l_6$，可得

$$y' = y_{A3} - l_4\sin\beta\, y' - l_6\cos\alpha = y_{A1} + b$$

联立可得

$$\alpha = \arccos\frac{B}{l_6}$$

因此，机构在 2T1R 模式下符号式位置正解为

$$\begin{cases} x' = x_{A2} - e \\ y' = y_{A3} + l_4\sin\beta \\ \alpha = f(y_{A1}, x_{A2}, y_{A3}) \end{cases} \tag{13}$$

式(13)表明：点 O' 坐标 x' 仅由 x_{A2} 决定，y' 由 x_{A2}、y_{A3} 决定，仅姿态角 α 由 y_{A1}、x_{A2}、y_{A3} 三者共同决定。因此，该机构在 2T1R 模式下的输入-输出运动解耦性较为优良。

3.2　位置反解

3T 模式下机构位置反解为：已知动平台 1 上点 O' 坐标 (x', y', z')，求 3 个位移 y_{A1}、x_{A2}、y_{A3}。

由式(12)可得

$$\begin{cases} y_{A1} = y' - b \\ x_{A2} = x' \\ y_{A3} = y' \pm \sqrt{l_4^2 - (x' + a - e)^2} \pm \sqrt{l_6^2 - (z' - l_1 - l_5)^2} \end{cases} \tag{14}$$

而 2T1R 模式下机构位置反解为：已知动平台 2 上点 O' 位置 (x', y', z') 和姿态角 α，求 3 个位移 y_{A1}、x_{A2}、y_{A3}。

由式(13)可得

$$\begin{cases} y_{A1} = y' - l_6\cos\alpha - b \\ x_{A2} = x' + e \\ y_{A3} = y' - \sqrt{l_4^2 - A^2} \end{cases} \tag{15}$$

3.3　正反解验证

设并联机构参数：$a = 195$ mm，$b = 113$ mm，$l_1 = 140$ mm，$l_2 = 100$ mm，$l_3 = 120$ mm，$l_4 = 140$ mm，$l_5 = 60$ mm，$l_6 = 180$ mm，$e = 180$ mm。

应用 Solidworks 进行三维建模，测得 3 个移动副初始值：$y_{A1} = -113.84$ mm，$x_{A2} = 114.66$ mm，$y_{A3} = 66.09$ mm；3T、2T1R 2 种模式下，测得各自基点坐标：$O' = (114.66, -0.86, 334.43)$ mm；$D_3(O') = (-65.32, 118.85, 200)$ mm。

而由式(12)、(13)可得动平台 2 个基点坐标。3T 运动模式下：$O' = (114.66, -0.86, 334.43)$ mm，$O' = (114.66, -0.86, 65.6)$ mm；易知，第 1 个点 O' 坐标正确；2T1R 运动模式下：$O' = (-65.32, 118.85, 200)$ mm。

由式(14)、(15)计算验证该机构位置反解。3T 运动模式下：取上述动平台 1 上点 O' 坐标，使用 Matlab 求得 4 组移动副移动，如表 1 所示。易知，反解第 4 组数据和正解数据一致。

表 1　机构位置反解数值

Tab. 1　Calculated values of inverse position solutions

mm

序号	y_{A1}	x_{A2}	y_{A3}
1	-113.86	114.68	171.597 1
2	-113.86	114.68	-67.807 0
3	-113.86	114.68	-173.317 1
4	-113.86	114.68	66.087 0

2T1R 运动模式下：求得 1 组移动副初始位置：$y_{A1} = -113.84$ mm，$x_{A2} = 114.66$ mm，$y_{A3} = 66.09$ mm；与给定的移动副初始位置一致。

因此，机构 2 种运动模式位置正反解均正确。

3.4　速度和加速度模型

3.4.1　3T 模式

位置反解位置方程式(14)可整理成

$$\begin{cases} f_1: y_{A1} - (y - b) = 0 \\ f_2: x_{A2} - x = 0 \\ f_3: y_{A3} - y - \sqrt{l_4^2 - (x + a - e)^2} + \sqrt{l_6^2 - (z - l_1 - l_5)^2} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

对式(16)进行全微分可得

$$\boldsymbol{J}_o\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\rho}} \tag{17}$$

其中

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = f_{11} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = f_{12} = -1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = f_{13} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = f_{21} = -1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = f_{22} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = f_{23} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = f_{31} = \frac{x + a - e}{\sqrt{l_4^2 - (x + a - e)^2}} \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = f_{32} = -1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = f_{33} = -\frac{z - l_1 - l_5}{\sqrt{l_6^2 - (z - l_1 - l_5)^2}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_{A1}}=u_{11}=1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_{A2}}=u_{22}=1 \quad \frac{\partial f_3}{\partial y_{A3}}=u_{33}=1$$

$$\boldsymbol{J}_o=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{33} \\ f_{31} & f_{32} & f33 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{J}_i=-\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}=[\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^{\mathrm{T}} \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}=[\dot{S}_1 \quad \dot{S}_2 \quad \dot{S}_3]^{\mathrm{T}}$$

当机构不处于奇异位形时，J_o可逆，则

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{J}_o^{-1}\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\rho}} \tag{18}$$

式(18)即为动平台 1 上点 O'速度映射模型。

将式(18)两边对时间 t 求导，当机构不处于奇异位形时 J_o可逆，并整理得

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{J}_o^{-1}\boldsymbol{J}_i\ddot{\boldsymbol{\rho}}-\boldsymbol{J}_o^{-1}\boldsymbol{K}_0 \tag{19}$$

其中 $$\boldsymbol{K}_0=[K_1 \quad K_2 \quad K_3]^{\mathrm{T}}$$

$$K_1=\dot{f}_{11}\dot{x}+\dot{f}_{12}\dot{y}+\dot{f}_{13}\dot{z}+\dot{u}_{11}$$

$$K_2=\dot{f}_{21}\dot{x}+\dot{f}_{22}\dot{y}+\dot{f}_{23}\dot{z}+\dot{u}_{22}$$

$$K_3=\dot{f}_{31}\dot{x}+\dot{f}_{32}\dot{y}+\dot{f}_{33}\dot{z}+\dot{u}_{33}\dot{y}_{A3}$$

其中 $K_i(i=1,2,3)$为矩阵 $\boldsymbol{J}_0$和 $\boldsymbol{J}_i$内元素 $f_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$对时间 t 的导数与对应变量对时间 t 的导数的乘积之和。

在 Solidworks 中画出虚拟样机并给定 3 个驱动副运动规律，分别为 $y_{A1}=10\sin t$、$x_{A2}=5\sin t$、$y_{A3}=10\sin t$，3 个驱动副初始位置同 3.2 节，得到其速度及加速度仿真曲线；在 Matlab 中对机构动平台 1 上点 O'速度、加速度进行编程，即对式(18)、(19)进行编程，分别得出该机构动平台 1 上点 O'速度和加速度理论计算曲线；其动平台 1 上点 O'速度和加速度理论计算和仿真曲线如图 4 所示，可见理论和仿真结果几乎一致，从而证明了该机构动平台 1 速度、加速度模型正确性。

3.4.2 2T1R 模式

位置反解位置方程式(15)可整理成

$$\begin{cases} g_1: y_{A1}-y+l_6\cos\alpha+b=0 \\ g_2: x_{A2}-x-e=0 \\ g_3: y_{A3}-y+l_4\sin\beta=0 \end{cases} \tag{20}$$

对式(20)进行全微分可得

$$\boldsymbol{J}_o'\dot{\boldsymbol{\omega}}'=\boldsymbol{J}_i'\dot{\boldsymbol{\rho}}' \tag{21}$$

其中

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}=g_{11}=0 \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}=g_{12}=-1 \quad \frac{\partial g_1}{\partial \alpha}=g_{13}=-l_6\sin\alpha$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}=g_{21}=-1 \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}=g_{22}=0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \alpha}=g_{23}=0 \quad \frac{\partial g_3}{\partial x}=g_{31}=-\frac{x+a}{\sqrt{l_4^2-(x+a)^2}}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial y}=g_{32}=-1 \quad \frac{\partial g_3}{\partial \alpha}=g_{33}=0 \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_{A1}}=h_{11}=1$$

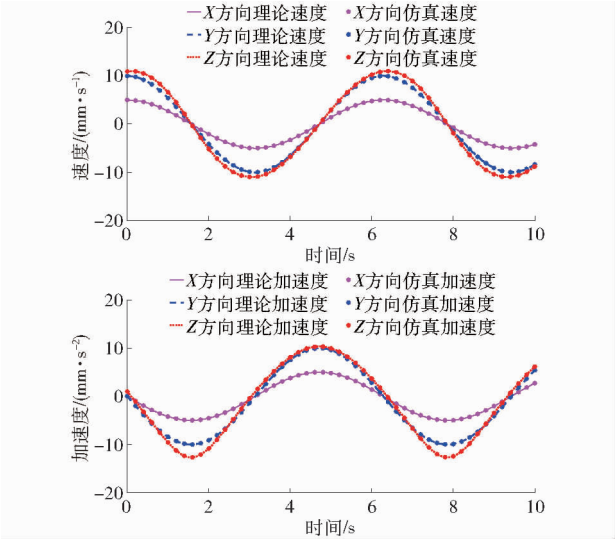

图 4 3T 模式下动平台 1 速度与加速度曲线

Fig. 4 Velocity and acceleration curves of moving platform 1 in 3T mode

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_{A2}}=h_{22}=1 \quad \frac{\partial g_3}{\partial y_{A3}}=h_{33}=1$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}'=\dot{\boldsymbol{\omega}} \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}=\dot{\boldsymbol{\rho}}'$$

$$\boldsymbol{J}_o'=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{J}_i'=-\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{bmatrix}$$

将式(21)两边对时间 t 求导，当机构不处于奇异位形时 $\boldsymbol{J}_o$可逆，并整理得

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}}'=(\boldsymbol{J}_o')^{-1}\boldsymbol{J}_i'\ddot{\boldsymbol{\rho}}-(\boldsymbol{J}_o')^{-1}K_0' \tag{22}$$

其中 $$\boldsymbol{K}_0'=[K_1' \quad K_2' \quad K_3']^{\mathrm{T}}$$

$$K_1'=\dot{g}_{11}\dot{x}+\dot{g}_{12}\dot{y}+\dot{g}_{13}\dot{\alpha}+\dot{h}_{11}$$

$$K_2'=\dot{g}_{21}\dot{x}+\dot{g}_{22}\dot{y}+\dot{g}_{23}\dot{\alpha}+\dot{h}_{22}$$

$$K_3'=\dot{g}_{31}\dot{x}+\dot{g}_{32}\dot{y}+\dot{g}_{33}\dot{\alpha}+\dot{h}_{33}\dot{y}_{A3}$$

其中 $K_i'(i=1,2,3)$为矩阵 $\boldsymbol{J}_0'$ 和 $\boldsymbol{J}_i'$ 内元素 $f_{ij}'(i=1,2,3;j=1,2,3)$对时间 t 的导数与对应变量对时间 t 导数乘积之和。

同理，再运用 Solidworks 和 Matlab 软件，且 3 个驱动副的运动规律和初始位置不变，分别得到该机构动平台 2 上点 O'的仿真和理论速度、加速度曲线，如图 5 所示；两者几乎重合，从而证明了该机构动平台 2 速度、加速度模型正确性。

3.5 奇异性分析

根据矩阵 $\boldsymbol{J}_o$、$\boldsymbol{J}_i$($\boldsymbol{J}_o'$、$\boldsymbol{J}_i'$)的矩阵范数是否为零，可分为 3 类机构奇异。

(1)第 1 类奇异(逆向运动学奇异)

当 $\det(\boldsymbol{J}_i/\boldsymbol{J}_i')=0$，会发生输入奇异，由上述可知，这种情况不存在，即该机构不存在输入奇异。

(2)第 2 类奇异(正向运动学奇异)

当 $\det(\boldsymbol{J}_o/\boldsymbol{J}_o')=0$，此时，机构 2 种运动模式奇异

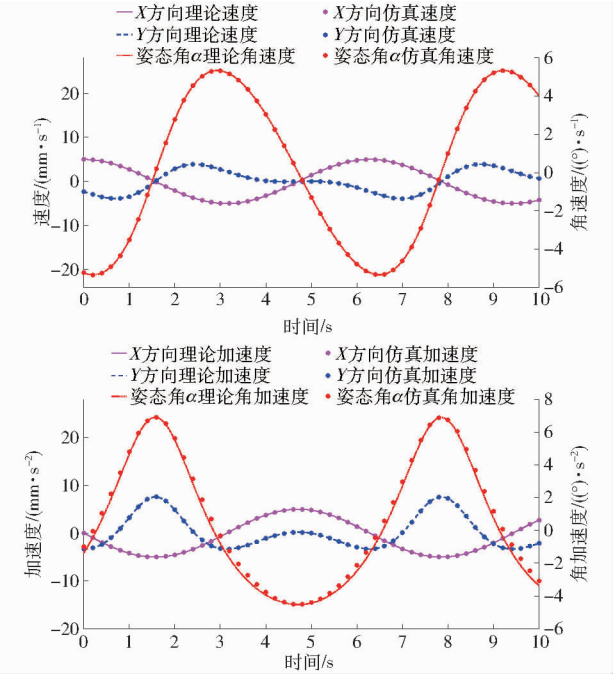

图 5　2T1R 模式下动平台 2 速度与加速度分析

Fig. 5　Velocity and acceleration curves of moving platform 2 in 2TR mode

位形条件均为 $\alpha=0$ 或者 $\alpha=\pi$，即 E_3D_3 平行于静平台 0 的情况下，会产生输出奇异，如图 6 所示。

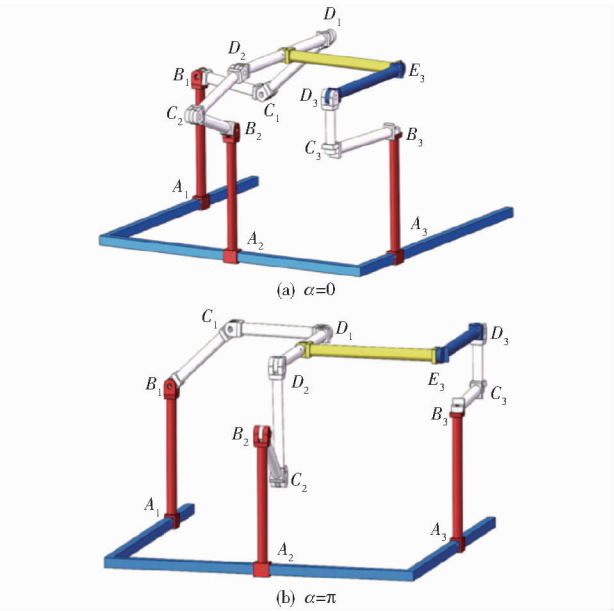

图 6　机构的输出奇异

Fig. 6　Output singular position

(3)第 3 类奇异(混合奇异)

当 $\det(\boldsymbol{J}_i/\boldsymbol{J}_i')=\det(\boldsymbol{J}_o/\boldsymbol{J}_o')=0$，不存在，即该机构不存在综合奇异位置。

4　工作空间及其优化

4.1　工作空间

一般地，机构工作空间计算是基于位置反解而求得，而本文机构在 2 种工作模式下均具有符号式位置正解，因此，直接采用位置正解来计算工作空间，该方法具有计算量少且工作空间边界计算准确的优势[26]。

首先，确定 3 个驱动副位置搜索范围(稍大于实际值)为：$-1\ 000\ \text{mm}\leqslant y_{A1}\leqslant 1\ 000\ \text{mm}$，$-500\ \text{mm}\leqslant x_{A2}\leqslant 600\ \text{mm}$，$-500\ \text{mm}\leqslant y_{A3}\leqslant 500\ \text{mm}$。

通过 Matlab 软件编程，得到该机构 3T 模式下动平台 1 和 2T1R 模式下动平台 2 质心工作空间图，如图 7 所示。

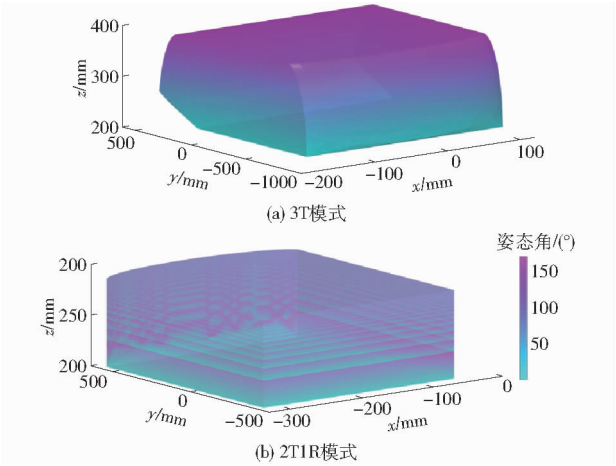

图 7　双模式工作机构工作空间

Fig. 7　Workspace of PM with dual-mode operation

4.2　优化设计

为了该机构 2 模式工作空间之和最大，需要对杆长尺寸进行优化。差分进化(Differential evolution，DE)算法[27-28]采用基于差分的简单变异算子，不需要像进化策略和进化规划需要预先指定扰动的概率分布函数，具有易用性、鲁棒性和强大的全局寻优能力。因此，采用 DE 为优化方法，以该机构双动平台 2 模式工作空间之和最大为目标，实现其工作空间的优化。

从式(12)、(13)可看出，各杆长和动、静平台尺寸影响机构工作空间。因此，设计变量 $\boldsymbol{X}$ 确定为

$$\boldsymbol{X}=(a,b,l_1,l_4,l_5,l_6,l_7)$$

4.2.1　设计变量和目标函数

以 3.2 节中机构的结构参数为参考，初步设置优化设计变量范围如表 2 所示。

表 2　设计变量变化范围

Tab. 2　Range of design variables　　mm

设计变量	数值
a	100 ~ 300
b	60 ~ 180
l_1	70 ~ 210
l_4	70 ~ 210
l_5	30 ~ 90
l_6	90 ~ 270
l_7	90 ~ 270

为避免取杆长最大值实现机构工作空间的最大化，设计变量总和应小于尺度综合前机构总杆长；经计算设计变量最大值之和为 1 500 mm，即

$$a+b+l_1+l_4+l_5+l_6+l_7<1\,500\ \text{mm}$$

设置其步长为 1，则工作空间近似为无数个 1 cm^3 的立方体组成，其工作空间即为空间网格点数 N 总和，可用 N 作为评价工作空间的指标。故该优化问题目标函数可表示为

$$\max f(\boldsymbol{X})=\sum N_1+\sum N_2 \tag{23}$$

4.2.2 优化结果

利用 DE 算法进行优化求解时，其优化结果会因定义的参数不同而改变。经过不断调试，最终确定本次优化设计的控制参数配置如表 3 所示，通过 Matlab 编程运算得该机构目标函数收敛过程如图 8 所示，其最终优化结果如表 4 所示。

表 3 DE 算法控制参数设置

Tab. 3 DE algorithm control parameter settings

参数	维度	随机数	迭代次数	缩放因子	交叉概率
数值	7	70	50	0.5	0.9

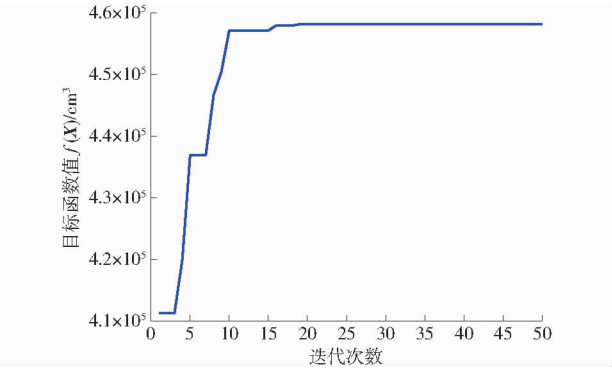

图 8 机构目标函数优化

Fig. 8 Optimization of objective function

表 4 DE 算法优化结果

Tab. 4 DE algorithm optimization results

参数	优化前	优化后	增幅/%
a/mm	195	294.2	50.9
b/mm	113	124.9	10.5
l_1/mm	140	122.3	-12.6
l_4/mm	140	208.8	49.1
l_5/mm	60	74.0	23.3
l_6/mm	180	269.9	49.9
l_7/mm	180	268.1	48.9
$f(\boldsymbol{X})$/cm^3	203 616	458 136	125.0

由图 8 可看出，经过 20 次迭代优化，目标函数逐渐趋于某一固定值（结果最佳值），并在之后保持不变。

由表 4 可看出，该并联机构工作空间在优化后，除 l_1 杆减少 12.6% 外，其余设计变量都增长，其 l_4、l_6 和 l_7 杆增长幅度最为明显。同时，该机构优化后工作空间与优化前相比增幅 125%，该优化结果为其尺度综合设计提供了参考。

4.2.3 结果对比

考虑机构实际加工问题，将优化后设计变量整数化，得到结构参数：a = 294 mm，b = 125 mm，l_1 = 122 mm，l_2 = 100 mm，l_3 = 120 mm，l_4 = 209 mm，l_5 = 74 mm，l_6 = 270 mm，e = 268 mm。机构工作空间如图 9 所示。

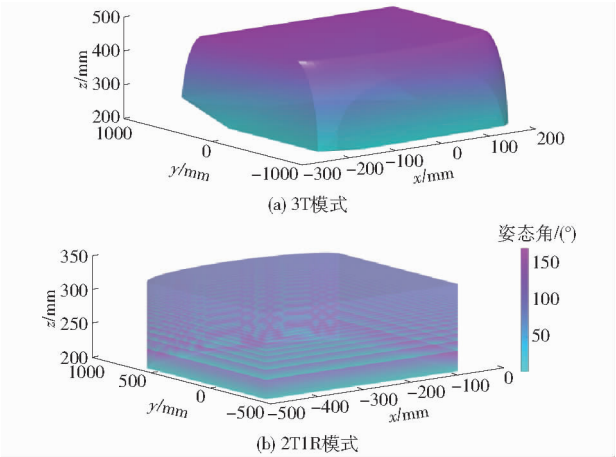

图 9 优化后双模式工作机构的工作空间

Fig. 9 Workspace of optimized PM with dual-mode operation

相较图 7，优化后工作空间类长方体形状不变，工作空间增幅主要体现在 x、z 方向，杆长至多增减 50%，工作空间却增加 125%，其优化结果效果较好。

5 动力学分析

基于虚功原理的序单开链法动力学建模[29-30]的基本原理是：对于自由度为 f、广义速度为 $q(f)$ 的机械系统，按照拓扑分解路线，将其分成若干个 SKC_i，各 SKC_i 又可分解为若干个单开链 $SOC(\Delta_j^-)$、$SOC(\Delta_j^0)$、$SOC(\Delta_j^+)$，假定解除不同 SKC 连接处运动副 e 个约束，可得到自由度为 $f+e$ 的新系统。于是，老系统被解除约束处的运动副支反力，转换为作用在新系统构件上的未知外力；最后，通过虚功原理，即在理想约束下，外力（矩）和惯性力（矩）在机械系统的任何虚位移上的功之和等于零，从而建立动力学方程求解。

5.1 动力学方程建立

作用于杆件质心上的力有重力和惯性力，而力矩仅为惯性力矩，各杆件（除动平台外）的质心均为杆件长度中点处；机构各杆件所受的力与力矩均可

由刚体力学计算得出(略)。

5.1.1　3T 模式下机构驱动力

对于第 2 回路，解除 O 处的约束，于是支反力 F_O 转换为未知外力，由虚功原理可得

$$[\delta X_{A_3B_3}\quad 0]Q_{A_3B_3}+[\delta X_{B_3C_3}\quad \delta\theta_{B_3C_3}]Q_{B_3C_3}+[\delta X_{C_3D_3}\quad 0]Q_{C_3D_3}+[\delta X_{D_3E_3}\quad \delta\theta_{D_3E_3}]Q_{D_3E_3}+[\delta X_{E_3O'}\quad 0]Q_{E_3O}-[\delta X_{D_1D_2}\quad 0]Q_O=0 \tag{24}$$

对于第 1 回路，将支反力 F_O 视为未知外力，由虚功原理可得

$$[\delta X_{A_1B_1}\quad 0]Q_{A_1B_1}+[\delta X_{B_1C_1}\quad \delta\theta_{B_1C_1}]Q_{B_1C_1}+[\delta X_{C_1D_1}\quad \delta\theta_{C_1D_1}]Q_{C_1D_1}+[\delta X_{A_2B_2}\quad 0]Q_{A_2B_2}+[\delta X_{B_2C_2}\quad \delta\theta_{B_2C_2}]Q_{B_2C_2}+[\delta X_{C_2D_2}\quad \delta\theta_{C_2D_2}]Q_{C_2D_2}+[\delta X_{D_1D_2}\quad 0]Q_{D_1D_2}+[\delta X_{D_1D_2}\quad 0]Q_O=0 \tag{25}$$

其中

$$\delta X_{A_iB_i}=J_{vA_iB_i}\delta q\quad (i=1,2,3)$$
$$\delta X_{B_iC_i}=J_{vB_iC_i}\delta q\quad (i=1,2,3)$$
$$\delta X_{C_iD_i}=J_{vC_iD_i}\delta q\quad (i=1,2,3)$$
$$\delta X_{D_1D_2}=J_{vD_1D_2}\delta q$$
$$\delta X_{D_3E_3}=J_{vD_3E_3}\delta q$$
$$\delta X_{E_3O'}=J_{vE_3O'}\delta q\,\delta\theta_{B_iC_i}=J_{\omega B_iC_i}\delta q\quad (i=1,2,3)$$
$$\delta\theta_{C_iD_i}=J_{\omega C_iD_i}\delta q\quad (i=1,2)$$
$$\delta\theta_{D_3E_3}=J_{\omega D_3E_3}\delta q$$

由式(24)~(25)可得该机构 3T 模式下驱动力 $f_{A_iB_i}(i=1,2,3)$。

5.1.2　2T1R 模式下机构驱动力

对于第 2 回路，解除 D_3 处的约束，于是支反力 F_{D3} 转换为未知外力，由虚功原理可得

$$[\delta X_{A_3B_3}\quad 0]Q_{A_3B_3}+[\delta X_{B_3C_3}\quad \delta\theta_{B_3C_3}]Q_{B_3C_3}+[\delta X_{C_3D_3}\quad \delta\theta_{C_3D_3}]Q_{C_3D_3}+[\delta X_{D_3E_3}\quad 0]Q_{D_3E_3}=0 \tag{26}$$

对于第 1 回路，将支反力 F_{D3} 视为未知外力，由虚功原理可得

$$[\delta X_{A_1B_1}\quad 0]Q_{A_1B_1}+[\delta X_{A_2B_2}\quad 0]Q_{A_2B_2}+[\delta X_{B_1C_1}\quad \delta\theta_{B_1C_1}]+Q_{B_1C_1}+[\delta X_{B_2C_2}\quad \delta\theta_{B_2C_2}]Q_{B_2C_2}+[\delta X_{C_1D_1}\quad \delta\theta_{C_1D_1}]Q_{C_1D_1}+[\delta X_{C_2D_2}\quad \delta\theta_{C_2D_2}]Q_{C_2D_2}+[\delta X_{D_1D_2}\quad 0]Q_{D_1D_2}+[\delta X_{O'E_3}\quad 0]Q_{O'E_3}+[\delta X_{E_3D_3}\quad \delta\theta_{E_3D_3}]Q_{E_3D_3}-[\delta X_{D_3E_3}\quad 0]Q_{D_3E_3}=0 \tag{27}$$

其中

$$\delta X_{A_iB_i}=J_{vA_iB_i}\delta q\quad (i=1,2,3)$$
$$\delta X_{B_iC_i}=J_{vB_iC_i}\delta q\quad (i=1,2,3)$$
$$\delta X_{C_iD_i}=J_{vC_iD_i}\delta q\quad (i=1,2,3)$$
$$\delta X_{D_1D_2}=J_{vD_1D_2}\delta q$$
$$\delta X_{E_3D_3}=J_{vE_3D_3}\delta q$$
$$\delta X_{O'E_3}=J_{vO'E_3}$$
$$\delta q\,\delta\theta_{B_iC_i}=J_{\omega B_iC_i}\delta q\quad (i=1,2,3)$$
$$\delta\theta_{C_iD_i}=J_{\omega C_iD_i}\delta q\quad (i=1,2)$$
$$\delta\theta_{E_3D_3}=J_{\omega E_3D_3}\delta q$$

由式(26)~(27)可得该机构 2T1R 模式下的驱动力 $f_{A_iB_i}(i=1,2,3)$。

5.2　驱动力计算实例

设动平台 1、2 负载分别为 10、5 kg；通过 Solidworks 导出 3 个移动副驱动力仿真曲线；同时，经 Matlab 编程计算出不考虑摩擦的驱动力理论曲线；最后，对比驱动力理论和仿真结果，以判断动力学模型正确性。

5.2.1　2 种模式下驱动副运动规律求解

(1) 3T 模式

假定该模式下，动平台 1 上末端执行器 3 段轨迹分别为动平台 1 沿 x、y 和 z 方向作匀速直线运动，且其 3 段轨迹运动时间分别为 6 s，如图 10a 所示，即末端执行器沿着图中 $O_1\to O_2\to O_3\to O_4$ 路径移动；动平台 1 3 段位移曲线运动规律如图 10b 所示。

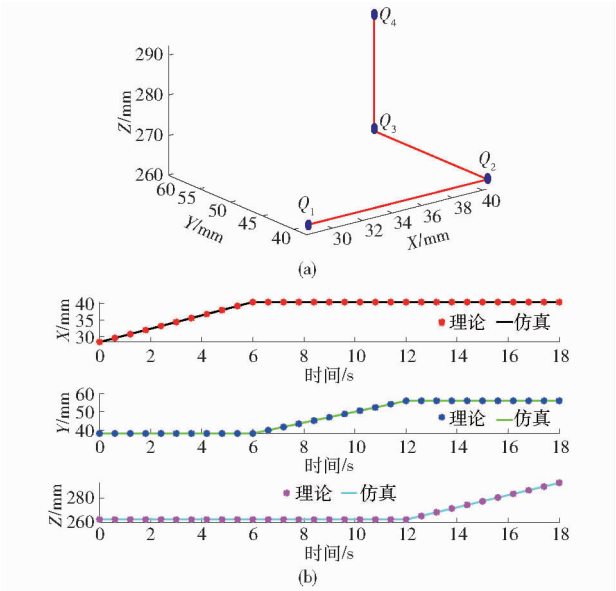

图 10　3T 模式下动平台运动轨迹及其运动规律

Fig. 10　Motion trajectory and motion rules of moving platform in 3T mode

根据 3T 运动模式下位置反解式(14)得到其驱动副运动规律为

$$S_1=\begin{cases}0 & (0\ \text{s}\leqslant t\leqslant 6\ \text{s})\\ 2t & (6\ \text{s}<t\leqslant 12\ \text{s})\\ 0 & (12\ \text{s}<t\leqslant 18\ \text{s})\end{cases} \tag{28}$$

$$S_2=\begin{cases}3t & (0\ \text{s}\leqslant t\leqslant 6\ \text{s})\\ 0 & (6\ \text{s}<t\leqslant 12\ \text{s})\\ 0 & (12\ \text{s}<t\leqslant 18\ \text{s})\end{cases} \tag{29}$$

$$S_3 = \begin{cases} -133.1+\sqrt{140^2-(15+28.34+2t)^2} & (0\ \mathrm{s}\leqslant t\leqslant 6\ \mathrm{s}) \\ -4.5+3t & (6\ \mathrm{s}<t\leqslant 12\ \mathrm{s}) \\ 182.3-\sqrt{180^2-(62.42+5t)^2} & (12\ \mathrm{s}<t\leqslant 18\ \mathrm{s}) \end{cases} \tag{30}$$

（2）2T1R 模式

假定该模式下，动平台 2 沿 x、y 作匀速直线运动和绕 x 轴方向作匀速转动，其 3 段运动轨迹如图 11a 所示，即沿着图中 $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3$ 路径移动；其 3 段位移曲线如图 11b 所示。

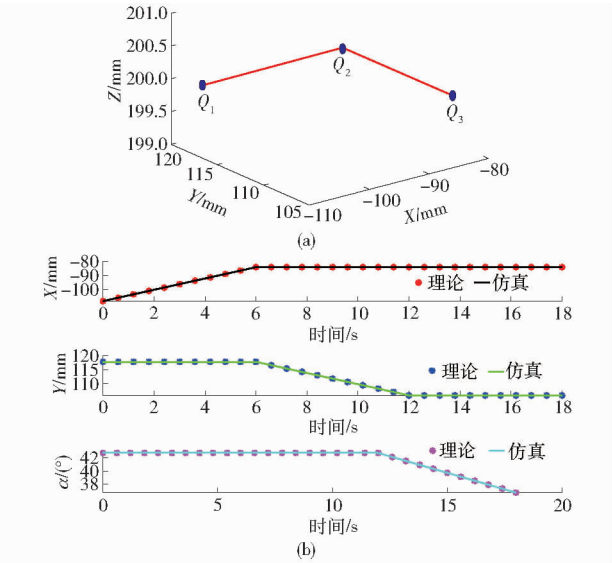

图 11 2T1R 模式下动平台运动轨迹及其运动规律

Fig. 11 Motion trajectory and motion rules of moving platform in 2T1R mode

根据 2T1R 运动模式下位置反解式（15）得到其驱动副运动规律

$$S_1 = \begin{cases} 0 & (0\ \mathrm{s}\leqslant t\leqslant 6\ \mathrm{s}) \\ -2t & (6\ \mathrm{s}<t\leqslant 12\ \mathrm{s}) \\ 120.2-180\cos(-\pi t/180+0.7) & (12\ \mathrm{s}<t\leqslant 18\ \mathrm{s}) \end{cases} \tag{31}$$

$$S_2 = \begin{cases} 4t & (0\ \mathrm{s}\leqslant t\leqslant 6\ \mathrm{s}) \\ 0 & (6\ \mathrm{s}<t\leqslant 12\ \mathrm{s}) \\ 0 & (12\ \mathrm{s}<t\leqslant 18\ \mathrm{s}) \end{cases} \tag{32}$$

$$S_3 = \begin{cases} 110-\sqrt{140^2-(86.6+4t)^2} & (0\ \mathrm{s}\leqslant t\leqslant 6\ \mathrm{s}) \\ 24.2-2t & (6\ \mathrm{s}<t\leqslant 12\ \mathrm{s}) \\ 0 & (12\ \mathrm{s}<t\leqslant 18\ \mathrm{s}) \end{cases} \tag{33}$$

5.2.2 2 种模式下驱动力变化曲线求解

该机构结构参数见 3.2 节，机构中各杆件的质量分别为：$m_{AiBi}=5.03$ kg（$i=1,2,3$）、$m_{BiCi}=2.24$ kg（$i=1,2$）、$m_{B3C3}=2.03$ kg、$m_{CiDi}=1.98$ kg（$i=1,2$）、$m_{C3D3}=1.654$ kg、$m_{D3E3}=1.98$ kg、$m_{D1D2}=5.26$ kg、$m_{E3O}=4.24$ kg；各杆件转动惯量如表 5 所示。

表 5 各杆件转动惯量

Tab. 5 Rotational inertia of each link kg·mm²

项目	I_{XX}	I_{YY}	I_{ZZ}
动平台 1	1 612 954.93	1 722 488.11	109 937.07
杆 B_1C_1	115 772.87	150 394.67	102 036.45
杆 B_2C_2	187 825.64	127 849.55	128 364.50
杆 B_3C_3	118 237.27	153 503.08	107 100.00
杆 C_1D_1	309 836.72	316 510.10	97 421.40
杆 C_2D_2	365 889.94	334 327.19	123 624.25
杆 D_3E_3	405 934.50	410 167.46	42 018.20

将 Solidworks 的模型导入 ADAMS 进行仿真，得到 3T 模式下 3 个滑块仿真驱动力曲线；同时，将上述参数代入式（24）~（27），经 Matlab 计算得到其理论驱动力，其理论与仿真曲线如图 12 所示。

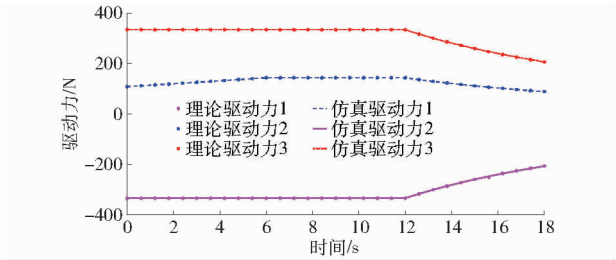

图 12 3T 模式下驱动力理论与仿真曲线

Fig. 12 Driving force theory and simulation curves in 3T mode

同理，得到 2T1R 模式下驱动力理论和仿真曲线，如图 13 所示。

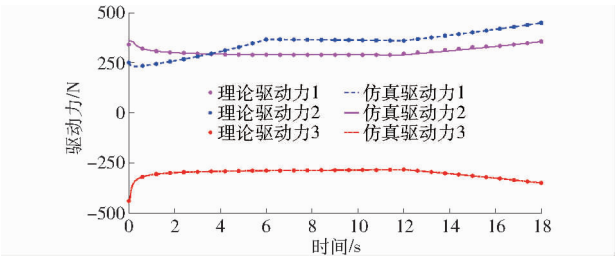

图 13 2T1R 模式下驱动力理论与仿真曲线

Fig. 13 Driving force theory and simulation curves in 2T1R mode

从图 12、13 可知，2 种模式下

（1）驱动力理论与仿真曲线几乎一致，存在细微误差（转动杆的转动惯量、移动副的起始值、质心坐标等存在误差），验证了动力学模型正确性。

（2）驱动力最大值分别为：在 3T 模式下，3 个驱动副所需最大力分别为：－207.1、143.4、333.6 N；而在 2T1R 模式下，3 个驱动副所需最大力分别为：360.2、449.5、－440.4 N（正负号表示方向）。

（3）选取电机时，3 驱动电机都需要满足上述计算所得的最大驱动力，显然，2T1R 模式所需驱动力

明显大于 3T 模式；因此，选取电机时应满足 2T1R 模式最大驱动力。为可双模式工作并联机构电机选择提供了技术依据。

6　饮水杯喷码和装箱工作生产线设计

设计的双模式工作的三自由度并联机构通过更换工作模式，即轮换用其动平台 1（紫色）、动平台 2（橘黄色），可完成饮水杯再加工和包装的工艺，即：①雕刻或喷码出饮水杯个性化图案。②个性化饮水杯的装箱。

饮水杯再加工和装箱自动化生产线如图 14 所示，包括 2 个动平台、喷码机、杯子抓手、静平台导柜、滑块、杯子、纸箱、小型传送带、纸箱传送带、传动装置，其工作原理为：①传动装置带动小型传送带，将杯子以速度 v_1 移动。②启用 2T1R 模式（图 15）：杯子到小型传送带末端时，主机构采用 2T1R 运动模式，即利用安装于动平台 1 上的喷码机给杯子进行加工，具体为：喷码机先在 xOy 面作 2T 运动至合适位置喷涂；同时，通过动平台 1 绕 x 轴旋转调整喷码机位置，这样，加工后杯子添加了个性化图案。③启用3T 模式（图 16）：喷码结束后，启用动平台 2 上的杯子抓手，先通过 x、y、z 三维运动将已加工好的杯子抓起，再将它放在纸箱里面。④重复以上操作，待纸箱装满杯子后，纸箱传送带开始传输工作。

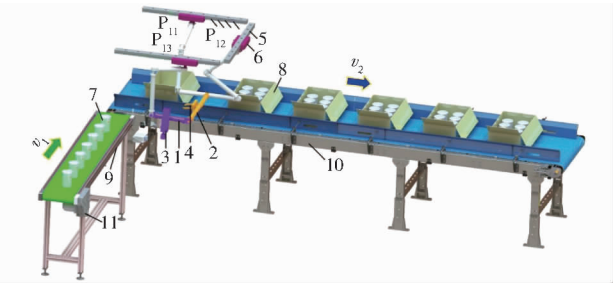

图 14　饮水杯再加工和装箱的自动化生产线示意图

Fig. 14　Sketch of automatic production line for reprocessing and packaging of drinking cups

1、2. 动平台　3. 喷码机　4. 杯子抓手　5. 静平台导轨　6. 滑块　7. 杯子　8. 纸箱　9. 小型传送带　10. 纸箱传送带　11. 传动装置

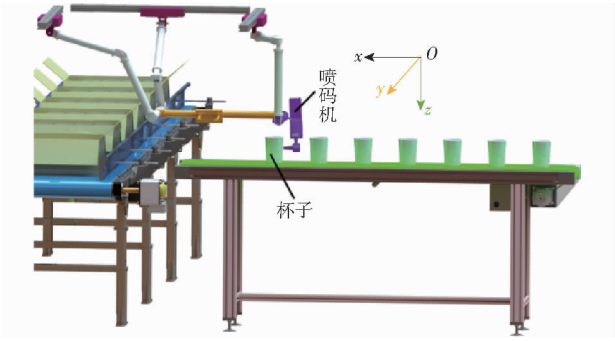

图 15　饮水杯喷码

Fig. 15　Spraying of drinking cups

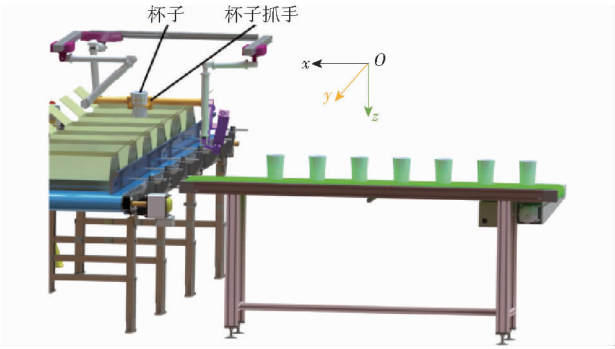

图 16　饮水杯装箱

Fig. 16　Packing of drinking cups

可见，上述 2 种运动模式可自动进行切换，即在 2T1R 输出模式下，完成面雕刻或喷码出饮水杯个性化图案的任务；在 3T 输出模式下，完成杯子装箱运送操作，实现了连续作业，提升了生产效率。

7　结束语

设计了一种双模式工作的三自由度并联机构，由低副组成，制造、装配容易；其动平台可分别实现 3T 与 2T1R 的 2 种输出模式，从而实现饮水杯喷码和装箱工作的“一机两用”。2 种模式均具有符号式位置正解且优良的运动解耦性，便于运动学、动力学求解，以及运动控制和规划；具有较大的工作空间，且由易驱动的移动副确定；机构运动平缓，运动学性能良好。

参　考　文　献

[1]　樊文龙，李瑞琴，王春臻，等. 一种用于物流快递分拣的 2－RPU/2－SPU 并联机构设计[J]. 包装工程，2022，43(7)：178－183.
FAN Wenlong, LI Ruiqin, WANG Chunzhen, et al. Design of a 2－RPU/2－SPU parallel mechanism for logistics and express sorting[J]. Packaging Engineering, 2022, 43(7): 178－183. (in Chinese)

[2]　HUANG Y, LU Q, WANG H, et al. Kinematics analysis and simulation of a novel 3T parallel mechanism[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2022(1): 3424012.

[3]　SONG Yimin, XIAN Wei, HUO Xinming, et al. Type synthesis of parallel mechanism with 3T/3R motion patterns[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 186: 105349.

[4]　沈惠平，潘海月，丁文芹，等. 运动解耦且大工作空间三平移机构拓扑设计[J]. 农业机械学报，2024，55(4)：421－430.
SHEN Huiping, PAN Haiyue, DING Wenqin, et al. Topological design and analysis for parallel mechanisms with motion decoupling and larger workspace[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(4): 421－430. (in Chinese)

[5]　QU S, LI R, BAI S. Type synthesis of 2T1R decoupled parallel mechanisms based on Lie groups and screw theory[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2017(1): 8304312.

[6] HAY A, JAMES K M, BENO B. A Multi-Tier design methodology for reconfigurable milling machines[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2014,136(8):041007.

[7] 杜中秋,沈惠平,李菊,等.一种位置正解符号化且运动部分解耦的新型2T1R并联机构动力学分析[J].机电工程,2023,40(8):1231-1239.
DU Zhongqiu, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Dynamics analysis of a new 2T1R parallel mechanism with symbolic position solutions and partially motion decoupled[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2023,40(8):1231-1239. (in Chinese)

[8] 于靖军, 刘凯, 孔宪文. 多模式机构研究进展[J]. 机械工程学报, 2020, 56(19): 14-27.
YU Jingjun, LIU Kai, KONG Xianwen. State of the art of multi-mode mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(19): 14-27. (in Chinese)

[9] 康熙, 戴建生. 机构学中机构重构的理论难点与研究进展——变胞机构演变内涵, 分岔机理, 设计综合及其应用[J]. 中国机械工程, 2020, 31(1): 57-71.
KANG Xi, DAI Jiansheng. Theoretical difficulties and research progresses of mechanism reconfiguration in mechanisms—evolution connotation, furcation principle, design synthesis and application of metamorphic mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(1): 57-71. (in Chinese)

[10] YUAN X F, ZHOU L, DUANY F. Singularity and kinematic bifurcation analysis of pin-bar mechanisms using analogous stiffness method[J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49(10): 1212-1226.

[11] QIN Y, DAI J S, GOGU G. Multi-furcation in a derivative queer-square mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 81: 36-53.

[12] 王德伦, 戴建生. 变胞机构及其综合的理论基础[J]. 机械工程学报, 2007, 43(8): 32-42.
WANG Delun, DAI Jiansheng. Theoretical foundation of metamorphic mechanism and its synthesis[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(8): 32-42. (in Chinese)

[13] ZHANG Wuxiang, DING Xilun, DAI Jiansheng. Design and stability of operating mechanism for a spacecraft hatch[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2009, 22(4): 453-458.

[14] REFAAT S, HERVE J M, NAHAVANDI S, et al. Two-mode overconstrained three-DOFs rotational-translational linear-motor-based parallel-kinematics mechanism for machine tool applications[J]. Robotica, 2007, 25(4): 461-466.

[15] VALSAMOS C, MOULIANITIS V, ASPRAGATHOS N. Kinematic synthesis of structures for metamorphic serial manipulators [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2014, 6(4): 041005.

[16] 达选祥, 勾燕洁, 陈贵敏. 一种基于变胞变换的柔顺剥线钳[J]. 机械工程学报, 2015, 51(1): 69-75.
DA Xuanxiang, GOU Yanjie, CHEN Guimin. Compliant wire stripper based on metamorphic transformation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(1): 69-75. (in Chinese)

[17] ZHANG K, DAI J S, FANG Y. Geometric constraint and mobility variation of two 3SvPSv metamorphic parallel mechanisms [J]. Journal of Mechanical Design, 2013, 135(1): 011001.

[18] 荣誉, 曲梦可. 基于变胞机构的性能可变机械臂研制[J]. 机械工程学报, 2018, 54(15): 41-59.
RONG Yu, QU Mengke. Design of manipulator with variable performances based on metamorphic mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(15): 41-59. (in Chinese)

[19] DAI J S, ZOPPI M, KONG X. Advances in reconfigurable mechanisms and robots I[M]. Springer London,2012.

[20] 王汝贵,姜永圣,蔡敢为.一种变胞式码垛机器人机构设计分析[J].装备制造技术,2013(2):18-20.
WANG Rugui, JIANG Yongsheng, CAI Ganwei. Design and analyses of a metamorphic palletizing robot mechanism[J]. Equipment Manufacturing Technology, 2013(2):18-20. (in Chinese)

[21] 王汝贵,陈辉庆,戴建生.新型可控变胞式码垛机器人机构动态稳定性研究[J].机械工程学报,2017,53(13):39-47.
WANG Rugui, CHEN Huiqing, DAI Jiansheng. Dynamic stability study of a novel controllable metamorphic palletizing robot mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017,53(13):39-47. (in Chinese)

[22] CHABLAT D, KONG X, ZHANG C. Kinematics, workspace, and singularity analysis of a parallel robot with five operation modes[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2018, 10(3): 035001.

[23] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等.机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012:77-80.

[24] 沈惠平, 李菊, 朱小蓉, 等. 基于最优路径的并联机构自由度计算方法及其新公式[J]. 机械工程学报, 2024,60(19): 42-50.
SHEN Huiping, LI Ju, ZHU Xiaorong, et al. New method and formula for degree-of-freedom calculation of parallel mechanism based on optimal paths[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024,60(19):42-50. (in Chinese)

[25] 李菊,郭跃,李涛,等. 一种用于容器的制作包装的可轮换动平台的一体机:2024114841824[P].2025-10-31.

[26] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京:高等教育出版社, 2021:98-104.

[27] 杜力,彭斯洋,车林仙,等.工作空间最大化的4-RUP_aR并联机构尺度优化设计[J].机械科学与技术,2018,37(11): 1685-1692.

[28] DENG W, SHANG S, CAI X, et al. An improved differential evolution algorithm and its application in optimization problem [J]. Soft Computing, 2021, 25: 5277-5298.

[29] 高征,肖金壮,王洪瑞,等.一种三自由度串并联结构旋转台的动力学分析[J].中国机械工程,2012,23(1):18-21.
GAO Zheng, XIAO Jinzhuang, WANG Hongrui, et al. Dynamic analysis on a 3-DOF rotational platform with serial-parallel structure[J]. China Mechanical Engineering, 2012,23(1):18-21. (in Chinese)

[30] 沈惠平,傅增,李菊,等.无寄生运动3-DOF 2T1R并联机构拓扑设计与分析[J].农业机械学报,2024,55(6):424-433.
SHEN Huiping, FU Zeng, LI Ju, et al. Topology design and analysis of 3-DOF 2T1R parallel mechanism with no parasitic motion[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2024,55(6):424-433. (in Chinese)