

含柔性动平台并联机器人动力学建模方法研究

刘 凉^{1,2} 汪博深^{1,2} 冯建峰^{1,2} 赵新华^{1,2}

(1. 天津理工大学天津市先进机电系统设计与智能控制重点实验室, 天津 300384;
2. 机电工程国家级实验教学示范中心(天津理工大学), 天津 300384)

摘要: 针对含柔性动平台的空间并联机器人刚柔耦合问题, 基于 Bézier 三角形与绝对节点坐标法提出一种高阶柔性三角形厚板单元模型和连续性约束条件, 基于该模型分析动平台变形状态及其对系统动力学特性的影响。利用自然坐标法与绝对节点坐标法建立刚柔耦合系统动力学模型, 通过引入板单元第 4 个面积坐标的二阶梯度来描述厚度方向上的变形并解决泊松闭锁问题, 结合广义- α 法与牛顿迭代法求解动力学方程, 并对系统静力学模型和动力学模型进行仿真分析。结果表明, 动平台在运动过程中产生的周期性凹陷变形对机器人空间位姿的影响与机构布局方式、质量分布和负载作用方式完全一致, 系统刚性构件与柔性动平台的运动耦合方式符合多体动力学模型的非线性规律; 运动轨迹误差低于 1.2×10^{-12} mm, 动力学方程和约束方程迭代误差均小于设定阈值 10^{-6} 和 10^{-14} , 求解精度能满足工程应用要求; 基于不同参数开展仿真对比分析, 验证了所述方法的有效性和通用性。

关键词: 机器人; 三角形厚板单元; 刚柔耦合; 多体动力学

中图分类号: TH113 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2023)12-0417-14 OSID: 

Dynamic Modeling Method of Parallel Robot with Flexible Moving Platform

LIU Liang^{1,2} WANG Boshen^{1,2} FENG Jianfeng^{1,2} ZHAO Xinhua^{1,2}

(1. Tianjin Key Laboratory for Advanced Mechatronic System Design and Intelligent Control, School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China
2. National Demonstration Center for Experimental Mechanical and Electrical Engineering Education(Tianjin University of Technology), Tianjin 300384, China)

Abstract: In order to solve the coupling problem of a spatial rigid-flexible parallel robot with flexible moving platform, a high-order flexible triangular thick plate element and its continuity constraints were proposed based on the Bézier triangle and absolute nodal coordinate formulation (ANCF). The deformation of the platform was divided by the element and its effects on dynamics were analyzed. The robotic dynamics was established by natural coordinate formulation (NCF) and ANCF. The second-order gradients of the fourth area coordinate were introduced to describe the element deformation in thickness. Besides, the Poisson locking problem was solved accordingly. The Lagrange dynamics equations were solved via the generalized- α method and the Newton's method. The statics and dynamics models of the system were simulated. The results showed that the periodic concave deformation of the moving platform had an impact on the spatial posture of the robot which was exactly consistent with the mechanism layout, mass and load distribution. The coupling mode between the rigid components and flexible moving platform conformed to the nonlinear characteristics of multibody dynamics. The trajectory error was less than 1.2×10^{-12} mm. The errors of dynamics and constraint equations were less than the preset thresholds of 10^{-6} and 10^{-14} , which met the requirements of engineering applications. Meanwhile, the validity and versatility of the method were verified by comparative analysis based on different system parameters.

Key words: robot; triangular thick plate element; rigid-flexible coupling; multibody dynamics

0 引言

为了提高效率和节约能源,现代制造领域中越来越多的机械构件使用轻质柔性材料。此类构件在高速低载荷或者低速重载荷的工况下易发生变形,从而影响系统的控制精度。基于非线性梁单元和板单元模型可对大范围运动且产生较大变形的系统构件进行建模。其中,由于柔性厚板单元建模较为复杂,所以研究工作较少^[1-3]。但在实际工程中,其应用领域比薄板单元更为广泛,所以探索基于柔性厚板单元的刚柔耦合系统动力学建模方法与求解策略,对研究多体系统的运动特性与控制策略具有重要理论意义与应用价值^[4]。

在刚柔耦合系统的分析方法中,运动弹性动力学法适用于结构简单且低速运动的机构,由于忽略了刚-柔耦合项,精度差^[5];浮动坐标系法基于小变形位移假设和中间浮动坐标系建模,忽略了高阶耦合项,不适用于高速、大变形的领域^[6];绝对节点坐标法(Absolute nodal coordinate formulation method, ANCF)选取全局系下的绝对坐标与变形梯度来描述运动变形,具有常质量矩阵、无科氏力和惯性力项等优势,不仅适用于分析小变形问题,同样适用于处理大变形下的刚柔耦合问题,缺点是广义坐标较多、弹性力项计算繁琐、计算效率较低^[7-9]。

目前,常见的柔性多体单元模型包括梁单元和板单元两大类,而板类单元又可细分为膜单元、壳单元、薄板单元、厚板单元等。其中,梁单元的建模理论已趋于成熟,在复杂多体系统的理论研究与工程应用中得到了充分验证、应用广泛。陈修龙等^[10]基于 ANCF 建立了三维二节点梁单元模型,研究了柔性杆对空间并联机构动力特性的影响。夏椰林^[11]基于 ANCF 建立了平面 3-RRR 柔性并联机构动力学模型,验证了该方法在分析大变形问题上更具优势。板类单元的研究集中于薄板单元或壳单元,多为低阶或降阶模型,易导致泊松闭锁问题,且忽略了厚度方向上的剪切弯曲变形。ABBAS 等^[12]综合考虑了剪切应变和横向正应变,基于 ANCF 提出了可变厚度的三维矩形完全参数化低阶板/壳单元。SUN 等^[13]将任意拉格朗日-欧拉方法与 ANCF 相结合,推导了薄板单元的弹性力阵和惯性力阵,研究了变长度柔性板的拓扑结构优化问题。CHEN 等^[14]以基尔霍夫薄板为对象,结合 ANCF 和无网格径向点插值法推导薄板单元形函数,适用于任意形状薄板的离散化,克服了有限元法不连续等缺陷。薛鹏聪等^[15]提出了一种基于张力场与不同模量弹性理论的 ANCF 薄膜

单元,可稳定高效地处理空间薄膜结构的动力学问题。YU 等^[16]推导了板与加筋板结构之间的一致变形条件,基于 ANCF 构建的板单元模型能有效地描述大变形问题且计算精度较高。此外,国内外学者还针对不同厚度、不同形状、高阶次的板类单元进行了研究。林张鹏等^[17]通过将高阶斜率坐标引入节点坐标建立出不规则的 ANCF 高阶曲面复合单元,能充分地保证不同厚度单元间的连续性且可有效地描述不规则薄板结构的大变形问题。CHANG 等^[18]基于 Bézier 三角形(Bézier triangle)提出了 3 种新的 ANCF 三角形板单元:三角形薄板单元、低阶三角形厚板单元和高阶三角形厚板单元,通过引入面积坐标建立了 Bézier 三角形几何描述与所提出的三角形板单元之间的线性映射关系。由于低阶与高阶三角形厚板单元节点坐标的选取既存在面积坐标梯度又存在笛卡尔坐标梯度,使得独立面积坐标的选取较为固定。在此基础上,WANG^[19]引入了具有明显几何意义的独立面积坐标梯度来简化形函数的推导,得到了 Bézier 三角形控制点坐标与 ANCF 低阶三角形薄板单元节点坐标的转换关系,但未考虑对厚板单元进行建模。综上所述,基于 Bézier 三角形的厚板单元建模理论尚未完善,仍需研究相关理论模型在柔性多体系统中进行建模、求解与仿真验证分析的可行性及高效化流程。

本文以一种 3-RRRU 并联机器人为研究对象,分析由高阶柔性三角形厚板单元建立的动平台变形状态及其对系统动力学特性的影响。利用 ANCF 描述的高阶柔性三角形厚板单元构建动平台模型及其 G^0 、 G^1 连接约束条件,引入板单元第 4 个面积坐标的二阶梯度来描述厚度方向上的弯曲变形。利用自然坐标法与所提出的柔性厚板单元模型对空间刚柔耦合机器人进行单元划分、确定合理的约束条件并进行系统装配。然后,结合广义- α 法与牛顿迭代法,将刚柔耦合系统的动力学方程进行离散化处理,转为差分方程进行求解。对系统静力学与动力学模型、动平台变形状态及系统运动规律进行仿真,以验证本方法可充分、有效地描述柔性多体系统的非线性弹性变形,建模与求解步骤具有良好的通用性。

1 空间柔性厚板单元模型

为有效地描述并联机器人柔性动平台的非线性空间变形,首先提出一种基于 ANCF 法的高阶柔性三角形厚板单元模型,描述该模型的节点坐标包含 4 个面积坐标,其中,第 4 个面积坐标引入了二阶面

积坐标的梯度, 基于该模型来构建刚柔耦合并联机器人的柔性动平台模型。

1.1 三角形板单元坐标描述

在空间直角坐标系 $OXYZ$ 下有 1 个三角形单元 $A_0B_0C_0$, 假设其面积为 Δ_0 , 各顶点位置向量为 $(x_i, y_i, z_i)^T (i=1, 2, 3)$ 。在单元内选取一点 P , 并与各顶点相连, 得到 3 个子三角形 PB_0C_0 、 PA_0C_0 、 PA_0B_0 , 设其面积分别为 Δ_1 、 Δ_2 、 Δ_3 , 如图 1 所示。

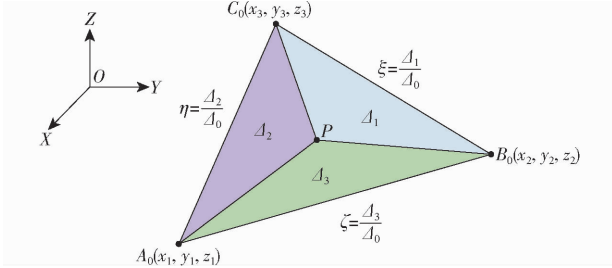


图 1 三角形单元 $A_0B_0C_0$

Fig. 1 Triangle element $A_0B_0C_0$

首先, 引入前 3 个面积坐标 ξ 、 η 、 ζ 来确定点 P 相对于三角形单元各顶点的位置, 分别定义为各个子三角形与三角形单元的面积比

$$\begin{cases} \xi = \Delta_1 / \Delta_0 \\ \eta = \Delta_2 / \Delta_0 \\ \zeta = \Delta_3 / \Delta_0 \end{cases} \quad (\xi, \eta, \zeta \in [0, 1]) \quad (1)$$

其中 $\xi + \eta + \zeta = 1$ (2)

对于三角形厚板单元, 需要引入第 4 个面积坐标 χ 来描述横截面的变形, 它表示板单元内任意点所在横截面 (沿厚度方向) 到单元中性层面的距离, 取值范围为 $[-1, 1]$, 如图 2 所示。假设点 A 、 B 、 C 为中性层面三角形的 3 个顶点, 根据上述定义可知其面积坐标分别为 $(1, 0, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0, 0)$ 和 $(0, 0, 1, 0)$ 。

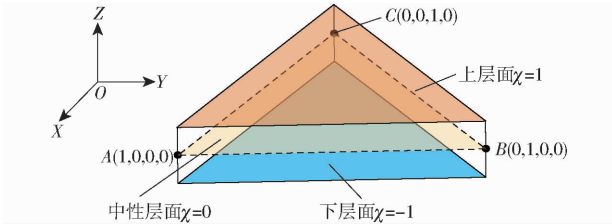


图 2 三角形厚板单元

Fig. 2 Triangular thick plate element

设图 2 中三角形厚板单元厚度为 h , 将单元中性层面法线方向向量 $\mathbf{n}$ 定义为

$$\mathbf{n} = \frac{h}{2} \frac{\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{l}_{AC}}{|\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{l}_{AC}|} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T \quad (3)$$

式中 n_1 、 n_2 、 n_3 ——法线向量分量

若中性层上任意点的空间位置向量为 $\mathbf{r}$, 它与面积坐标向量 $\mathbf{s}$ 变换关系可表示为

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{s} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & n_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & n_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ \chi \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中 x 、 y 、 z ——向量 $\mathbf{r}$ 的空间坐标分量

$\mathbf{T}$ ——向量 $\mathbf{r}$ 与向量 $\mathbf{s}$ 的变换矩阵

x_1 、 x_2 、 x_3 —— x 轴方向笛卡尔坐标分量

y_1 、 y_2 、 y_3 —— y 轴方向笛卡尔坐标分量

z_1 、 z_2 、 z_3 —— z 轴方向笛卡尔坐标分量

利用求导链式法则求出式 (4) 中 $\mathbf{r}$ 关于面积坐标梯度与笛卡尔坐标梯度的转换关系为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_\xi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} = x_1 \mathbf{r}_x + y_1 \mathbf{r}_y + z_1 \mathbf{r}_z \\ \mathbf{r}_\eta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} = x_2 \mathbf{r}_x + y_2 \mathbf{r}_y + z_2 \mathbf{r}_z \\ \mathbf{r}_\zeta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} = x_3 \mathbf{r}_x + y_3 \mathbf{r}_y + z_3 \mathbf{r}_z \\ \mathbf{r}_\chi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \chi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \chi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \chi} = n_1 \mathbf{r}_x + n_2 \mathbf{r}_y + n_3 \mathbf{r}_z \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{r}_\xi$ 、 $\mathbf{r}_\eta$ 、 $\mathbf{r}_\zeta$ 、 $\mathbf{r}_\chi$ —— $\mathbf{r}$ 对面积坐标的梯度向量

$\mathbf{r}_x$ 、 $\mathbf{r}_y$ 、 $\mathbf{r}_z$ —— $\mathbf{r}$ 对笛卡尔坐标的梯度向量

由式 (2) 可知, 面积坐标之间不相互独立, 因此可选取其中两个独立的坐标来构建式 (4)。以单元顶点 A 为例, 选取 η 和 ζ 为独立的面积坐标, 来表示点 A 处面积坐标梯度

$$\begin{cases} \mathbf{r}_\eta^A = (x_2 - x_1) \mathbf{r}_x^A + (y_2 - y_1) \mathbf{r}_y^A + (z_2 - z_1) \mathbf{r}_z^A \\ \mathbf{r}_\zeta^A = (x_3 - x_1) \mathbf{r}_x^A + (y_3 - y_1) \mathbf{r}_y^A + (z_3 - z_1) \mathbf{r}_z^A \end{cases} \quad (6)$$

同理可表示出点 B 和点 C 处的面积坐标梯度。

三角形板单元任意点的位置向量可由 Bézier 三角形插值基函数和对应的控制点加以线性表示

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{10} g_i \mathbf{q}^i \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} g_1 = \xi^3 \\ g_2 = \eta^3 \\ g_3 = \zeta^3 \\ g_4 = 3\xi^2\eta \\ g_5 = 3\xi\eta^2 \\ g_6 = 3\eta^2\zeta \\ g_7 = 3\eta\zeta^2 \\ g_8 = 3\xi^2\zeta \\ g_9 = 3\xi\zeta^2 \\ g_{10} = 6\xi\eta\zeta \end{cases} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{q}^i$ ——以向量形式描述的三角形控制点

g_i ——三角形插值基函数

各个控制点 q^i 的选取如图 3 所示。其中, q^1 、 q^2 、 q^3 为三角形厚板单元中性层面的顶点; $q^4 \sim q^9$ 为中性层面各边三等分点; q^{10} 为中性层面的重心点。由于加入了第 4 个面积坐标 χ , 所以三角形厚板单元模型要引入额外的 6 个控制点, 分别为上层顶点位置向量对应的控制点 q^{11} 、 q^{12} 、 q^{13} 和中性层顶点法线向量二阶导数对应的控制点 q^{14} 、 q^{15} 、 q^{16} (分别与控制点 q^1 、 q^2 、 q^3 重合)。为避免中性层顶点坐标的重复叠加, 以及厚度方向线性插值导致的泊松闭锁问题, 对 Bézier 插值基函数做修正

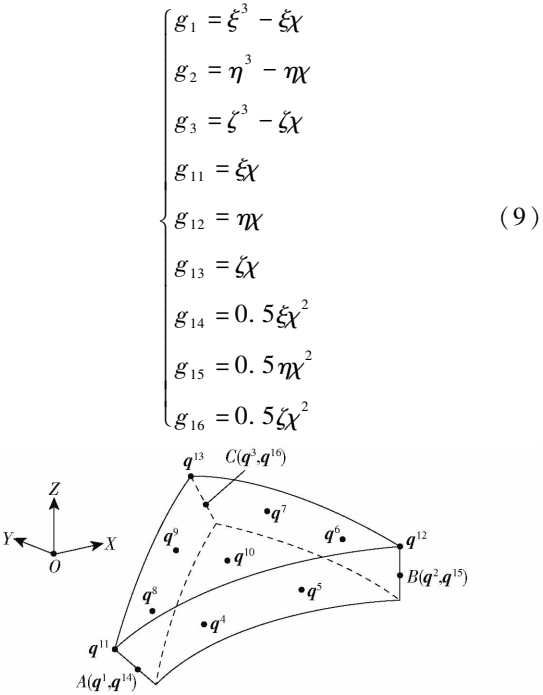


图 3 三角形厚板单元 Bézier 控制点

Fig.3 Bézier control points of triangular thick plate element

令控制点向量 $q_{con} = (q^{1T}, q^{2T}, \dots, q^{16T})^T$, 则单元内任意点的位置向量可表示成矩阵形式

$$r = ([g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_{16}] \otimes I_3) q_{con} = G_{3 \times 48} q_{con} \tag{10}$$

式中 $\otimes$ ——克罗内科张量积
 I_3 ——三阶单位矩阵
 $G_{3 \times 48}$ ——板单元控制点基函数矩阵

由于矩阵 G 是面积坐标的函数, 所以单元模型的位置与变形由面积坐标及 q_{con} 共同决定。

1.2 三角形板单元质量矩阵

选取板单元中性层各顶点的位置坐标向量 $r^K (K=A, B, C)$ 、 r^K 的一阶面积坐标梯度向量 $r_M^K (M=\xi, \zeta, \eta, \chi)$ 、 r^K 的二阶面积坐标梯度向量 $r_{\chi\chi}^K$ 、以及重心位置坐标向量 r^D 作为板单元的节点坐

标向量, 即

$$e_1 = (r^{AT}, r_{\eta}^{AT}, r_{\zeta}^{AT}, r_{\chi}^{AT}, r_{\chi\chi}^{AT}, r^{BT}, r_{\xi}^{BT}, r_{\zeta}^{BT}, r_{\chi}^{BT}, r_{\chi\chi}^{BT}, r^{CT}, r_{\xi}^{CT}, r_{\eta}^{CT}, r_{\chi}^{CT}, r_{\chi\chi}^{CT}, r^{DT})^T \tag{11}$$

式中 e_1 ——板单元节点坐标向量

根据式(10)、(11), 可得单元节点坐标与控制点之间的约束关系式

$$\begin{cases} r^A = q^1 \\ r^B = q^2 \\ r^C = q^3 \\ r_{\eta}^A = 3(q^4 - q^1) \\ r_{\xi}^A = 3(q^8 - q^1) \\ r_{\chi}^A = q^{11} - q^1 \\ r_{\chi\chi}^A = q^{14} \\ r_{\xi}^B = 3(q^6 - q^2) \\ r_{\xi}^B = 3(q^5 - q^2) \\ r_{\chi}^B = q^{12} - q^2 \\ r_{\chi\chi}^B = q^{15} \\ r_{\xi}^C = 3(q^9 - q^3) \\ r_{\eta}^C = 3(q^7 - q^3) \\ r_{\chi}^C = q^{13} - q^3 \\ r_{\chi\chi}^C = q^{16} \\ r^D = (q^1 + q^2 + q^3 + 3q^4 + 3q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 3q^8 + 3q^9 + 6q^{10})/27 \end{cases} \tag{12}$$

三角形厚板单元的节点坐标向量如图 4 所示。

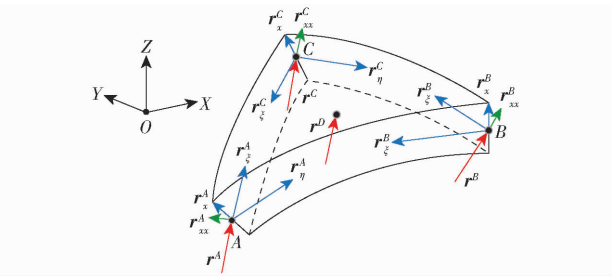


图 4 三角形厚板单元节点坐标向量

Fig.4 Node coordinate vectors of thick plate element

将式(12)改写为矩阵形式

$$e_1 = X q_{con} \tag{13}$$

其中, X 为 48×48 阶定常矩阵, 描述了单元节点坐标向量与控制点向量的转换关系。

联立式(10)~(13)可得向量 r 与 e_1 的关系为

$$r = S_1 e_1 = G X^{-1} e_1 = [S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_{16}] \otimes I_3 e_1 \tag{14}$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} S_1 &= \xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi^2\zeta - 7\xi\eta\zeta \\ S_2 &= \xi^2\eta - \xi\eta\zeta \\ S_3 &= \xi^2\zeta - \xi\eta\zeta \\ S_4 &= \xi\chi \\ S_5 &= 0.5\xi\chi^2 \\ S_6 &= \eta^3 + 3\xi\eta^2 + 3\eta^2\zeta - 7\xi\eta\zeta \\ S_7 &= \eta^2\zeta - \xi\eta\zeta \\ S_8 &= \xi\eta^2 - \xi\eta\zeta \\ S_9 &= \eta\chi \\ S_{10} &= 0.5\eta\chi^2 \\ S_{11} &= \zeta^3 + 3\xi\zeta^2 + 3\eta\zeta^2 - 7\xi\eta\zeta \\ S_{12} &= \xi\zeta^2 - \xi\eta\zeta \\ S_{13} &= \eta\zeta^2 - \xi\eta\zeta \\ S_{14} &= \zeta\chi \\ S_{15} &= 0.5\zeta\chi^2 \\ S_{16} &= 27\xi\eta\zeta \end{aligned} \right. \quad (15)$$

式中 S_1 ——厚板单元形函数矩阵

由惯性力的虚功率可得板单元的质量矩阵为

$$\mathbf{M}_1 = \iiint_V \rho_1 \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 dV = \rho_1 V \int_{-1}^1 d\chi \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi-\eta} d\eta \mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 d\zeta \quad (16)$$

式中 ρ_1 ——厚板单元密度

V ——厚板单元未变形时体积

2 三角形厚板单元之间的约束模型

图 5 描述了 2 个相邻三角形厚板单元在变形时的情况。它们对应的 Bézier 控制点向量分别为 $(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^{16})$ 和 $(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \dots, \mathbf{p}^{16})$ ，相邻连接曲面为 $JIGF$ ，假定未变形时两单元的各项参数完全相同。

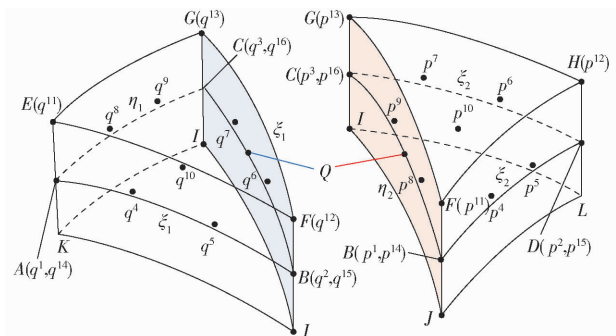


图 5 2 个相邻板单元的连接面

Fig. 5 Connecting surface of two adjacent plate elements

在变形过程中应保证两单元公共连接部分的位置连续性及其变化率的连续性，即 G^0 连续包括连接面上各点位置连续性、沿厚度截面方向的位置连续性； G^1 连续为位置变化量的连续性。

两单元连接面 $JIGF$ 上控制点 B, C, F, G 处的位置连续性约束（下层面顶点 I 和 J 处无控制点定义）满足条件

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{q}^2 &= \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{q}^3 &= \mathbf{p}^3 \\ \mathbf{q}^{12} &= \mathbf{p}^{11} \\ \mathbf{q}^{13} &= \mathbf{p}^{13} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

为保证两单元在公共边 BC 上各点位置的连续性。在三角形 ABC 和 BDC 内， BC 边各点的面积坐标分别满足 $\xi_1 = 0$ 和 $\eta_2 = 0$ 。由于 BC 边位于中性层面，其面积坐标满足 $\chi_1 = \chi_2 = 0$ ，故公共边上任意点 Q 的位置向量 $\mathbf{r}^Q$ 可按式 (10) 描述的 Bézier 基函数与对应控制点的线性组合分别表示为

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{r}^Q &= \mathbf{r}_{ABC}^{BC}(0, \eta_1, \zeta_1, 0) = \eta_1^3 \mathbf{q}^2 + \zeta_1^3 \mathbf{q}^3 + 3\eta_1^2 \zeta_1 \mathbf{q}^6 + 3\eta_1 \zeta_1^2 \mathbf{q}^7 \\ \mathbf{r}^Q &= \mathbf{r}_{BDC}^{BC}(\xi_2, 0, \zeta_2, 0) = \xi_2^3 \mathbf{p}^1 + \zeta_2^3 \mathbf{p}^3 + 3\xi_2^2 \zeta_2 \mathbf{p}^8 + 3\xi_2 \zeta_2^2 \mathbf{p}^9 \end{aligned} \right. \quad (18)$$

由于公共边 BC 上三等分点满足连续性条件，故对应控制点满足 $\mathbf{q}^6 = \mathbf{q}^8, \mathbf{q}^7 = \mathbf{q}^9$ 。根据式 (17) 和式 (18) 可求出 BC 边任意点 Q 的位置连续性约束条件

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_1 &= \xi_2 \\ \zeta_1 &= \zeta_2 \\ \mathbf{q}^6 &= \mathbf{p}^8 \\ \mathbf{q}^7 &= \mathbf{p}^9 \end{aligned} \right. \quad (19)$$

此外，还应保证两单元在连接面 $JIGF$ 上各点位置向量 $\mathbf{r}^{JIGF}$ 的连续性，即满足

$$\mathbf{r}^{JIGF}(0, \eta_1, \zeta_1, \chi_1) = \mathbf{r}^{JIGF}(\xi_2, 0, \zeta_2, \chi_2) \quad (20)$$

可得出厚度方向上的连续性约束条件为

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{q}^{15} &= \mathbf{p}^{14} \\ \mathbf{q}^{16} &= \mathbf{p}^{16} \end{aligned} \right. \quad (21)$$

还应保证两单元连接面 $JIGF$ 中任意点的 G^1 连续性。但在工程中 G^1 连续过于严格，通常难以求出满足实际要求的解^[20]，故将其简化为两部分：两单元在连接面任意点处对应梯度的连续性以及中性层面公共边 BC 上连接点处变化率的连续性。对于前者，应满足约束条件

$$\left\{ \begin{aligned} \partial \mathbf{r}^{JIGF} / \partial \eta_1 &= \partial \mathbf{r}^{JIGF} / \partial \xi_2 \\ \partial \mathbf{r}^{JIGF} / \partial \zeta_1 &= \partial \mathbf{r}^{JIGF} / \partial \zeta_2 \\ \partial \mathbf{r}^{JIGF} / \partial \chi_1 &= \partial \mathbf{r}^{JIGF} / \partial \chi_2 \end{aligned} \right. \quad (22)$$

由式 (22) 可得出与式 (21) 相同的连续性约束条件。

对于后者，将从以下两方面进行分析。一方面，在 $\triangle ABC$ 中， BC 边满足 $\xi_1 = \chi_1 = 0$ ，由式 (2) 可知 $\zeta_1 = 1 - \eta_1$ ；同理，在 $\triangle BDC$ 中满足 $\eta_2 = \chi_2 = 0$ 和 $\zeta_2 = 1 - \xi_2$ 。根据式 (18)，公共边 BC 上各点沿切线

方向的面积坐标梯度可分别表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}_{ABC}^{BC}}{\partial \eta_1} = 3\eta_1^2(\mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^6) + 6\eta_1\zeta_1(\mathbf{q}^6 - \mathbf{q}^7) + 3\zeta_1^2(\mathbf{q}^7 - \mathbf{q}^3) \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{ABC}^{BC}}{\partial \zeta_1} = 3\eta_1^2(\mathbf{q}^6 - \mathbf{q}^2) + 6\eta_1\zeta_1(\mathbf{q}^7 - \mathbf{q}^6) + 3\zeta_1^2(\mathbf{q}^3 - \mathbf{q}^7) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}_{BDC}^{BC}}{\partial \xi_2} = 3\xi_2^2(\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^8) + 6\xi_2\zeta_2(\mathbf{p}^8 - \mathbf{p}^9) + 3\zeta_2^2(\mathbf{p}^9 - \mathbf{p}^3) \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{BDC}^{BC}}{\partial \zeta_2} = 3\xi_2^2(\mathbf{p}^8 - \mathbf{p}^1) + 6\xi_2\zeta_2(\mathbf{p}^9 - \mathbf{p}^8) + 3\zeta_2^2(\mathbf{p}^3 - \mathbf{p}^9) \end{cases} \quad (24)$$

为保证沿该方向变化梯度的连续性,只需令式(23)与式(24)中对应的面积梯度计算式相等,由此可推出与式(17)和式(19)相同的控制点约束条件。

另一方面,在变形过程中,应保证公共边 BC 上任意点空间位置变化量的连续性。根据式(10)以及 $\chi_1 = 0$ 和 $\xi_1 = 1 - \eta_1 - \zeta_1$,可知 $\triangle ABC$ 上任意点在空间产生的面积坐标梯度可表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}_{ABC}}{\partial \eta_1} = 3\eta_1^2(\mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^5) + 6\eta_1\zeta_1(\mathbf{q}^6 - \mathbf{q}^{10}) + 3\zeta_1^2(\mathbf{q}^7 - \mathbf{q}^9) + 3(1 - \eta_1 - \zeta_1)^2(\mathbf{q}^4 - \mathbf{q}^1) + 6\eta_1(1 - \eta_1 - \zeta_1)(\mathbf{q}^5 - \mathbf{q}^4) + 6\zeta_1(1 - \eta_1 - \zeta_1)(\mathbf{q}^{10} - \mathbf{q}^8) \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{ABC}}{\partial \zeta_1} = 3\eta_1^2(\mathbf{q}^6 - \mathbf{q}^5) + 6\eta_1\zeta_1(\mathbf{q}^7 - \mathbf{q}^{10}) + 3\zeta_1^2(\mathbf{q}^3 - \mathbf{q}^9) + 3(1 - \eta_1 - \zeta_1)^2(\mathbf{q}^8 - \mathbf{q}^1) + 6\eta_1(1 - \eta_1 - \zeta_1)(\mathbf{q}^{10} - \mathbf{q}^4) + 6\zeta_1(1 - \eta_1 - \zeta_1)(\mathbf{q}^9 - \mathbf{q}^8) \end{cases} \quad (25)$$

同理,可得 $\triangle BDC$ 内各点的面积坐标梯度。
由式(2)可知面积坐标的变化量满足约束关系

$$\Delta \xi + \Delta \eta + \Delta \zeta = 0 \quad (26)$$

无论中性层面发生何种变形,公共边 BC 上任意点的面积坐标始终满足 $\xi_1 = \eta_2 = 0$,其相应变化量应满足 $\Delta \xi_1 = \Delta \eta_2 = 0$ 。同时,根据式(19)和式(26)可得出 2 个三角形单元面积坐标变化量的关系

$$\Delta \eta_1 = \Delta \xi_2 = \Delta \zeta_1 = \Delta \zeta_2 \quad (27)$$

由式(25)可知,当 $\xi_1 = 1 - \eta_1 - \zeta_1 = 0$ 时,式中后 3 项为零,可求得 $\triangle ABC$ 中 BC 边上各点的面积坐标梯度。同理,可得 $\triangle BDC$ 中 BC 边上各点的面积坐标梯度。因此,两单元 BC 边上由面积坐标变化量引起的位置坐标变化量分别为

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{r}_{ABC}^{BC} = \frac{\partial \mathbf{r}_{ABC}^{BC}}{\partial \eta_1} \Big|_{\xi_1 = 1 - \eta_1 - \zeta_1 = 0} \Delta \eta_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_{ABC}^{BC}}{\partial \zeta_1} \Big|_{\xi_1 = 1 - \eta_1 - \zeta_1 = 0} \Delta \zeta_1 \\ \Delta \mathbf{r}_{BDC}^{BC} = \frac{\partial \mathbf{r}_{BDC}^{BC}}{\partial \xi_2} \Big|_{\eta_2 = 1 - \xi_2 - \zeta_2 = 0} \Delta \xi_2 + \frac{\partial \mathbf{r}_{BDC}^{BC}}{\partial \zeta_2} \Big|_{\eta_2 = 1 - \xi_2 - \zeta_2 = 0} \Delta \zeta_2 \end{cases} \quad (28)$$

为保证 BC 边空间位置变化量的连续性,变化量 $\Delta \mathbf{r}_{ABC}^{BC}$ 与 $\Delta \mathbf{r}_{BDC}^{BC}$ 应大小相等、方向相反,联立式(25)~(28)可得其连续性约束条件

$$\begin{cases} (\mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^5) + (\mathbf{q}^6 - \mathbf{q}^5) + (\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^4) + (\mathbf{p}^8 - \mathbf{p}^4) = 0 \\ (\mathbf{q}^6 - \mathbf{q}^{10}) + (\mathbf{q}^7 - \mathbf{q}^{10}) + (\mathbf{p}^8 - \mathbf{p}^{10}) + (\mathbf{p}^9 - \mathbf{p}^{10}) = 0 \\ (\mathbf{q}^7 - \mathbf{q}^9) + (\mathbf{q}^3 - \mathbf{q}^9) + (\mathbf{p}^9 - \mathbf{p}^7) + (\mathbf{p}^3 - \mathbf{p}^7) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

根据式(17)、(19)、(21)、(29)中描述的 33 个连续性约束方程便可建立 2 个相邻三角形厚板单元之间的 G^0 和 G^1 连接约束模型。

3 刚柔耦合并联机器人系统模型

以一种含有柔性三角形厚板单元模型的空间刚柔耦合并联机器人为研究对象,建立系统中各构件模型、构件之间约束方程以及系统动力学模型,以便开展对该模型的求解与仿真工作。

3.1 刚柔耦合机器人

图 6 为一种 3-RRRU 空间刚柔耦合并联机器人,它包含 3 条完全相同的刚性 RRRU 支链(R 表示转动副,U 表示虎克铰),这 3 条支链沿 Z 轴方向以 120° 夹角的方式对称分布,将刚性静平台和柔性动平台连接在一起。各支链与静平台相连的第 1 转动副为驱动副,其轴线平行于静平台所在平面与第 2 转动副轴线,但与第 3 转动副轴线相垂直,虎克铰的 2 个转动轴线分别平行于第 3 转动副和驱动副轴线。

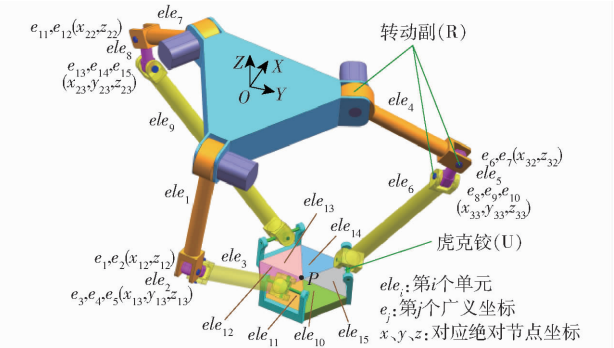


图 6 3-RRRU 刚柔耦合并联机器人

Fig. 6 3-RRRU rigid-flexible parallel robot

本文旨在研究柔性动平台的变形状态对并联机构动力学特性及轨迹跟踪精度的影响,暂不考虑系统中其他构件的柔性变形状态,因此,各支链的运动关节与运动杆件均假定为刚性构件。在刚柔耦合机

器系统中,各支链运动杆件采用刚性梁单元模型进行建模;动平台为柔性可变形构件,其形状为六边形结构,采用所提出的高阶柔性三角形厚板单元建模,这里将其划分为 6 个柔性三角形厚板单元。

图 6 对系统中各构件进行了编号,9 个刚性梁单元依次编号为 $ele_1 \sim ele_9$;6 个柔性板单元依次编号为 $ele_{10} \sim ele_{15}$ 。每个梁单元和板单元分别包含 6 个节点坐标和 48 个节点坐标。其中,各支链前两个刚性杆件可简化为平面梁单元,对于支链 $k(k=1,2,3)$,采用位置坐标 (x_{k2}, z_{k2}) 与 (x_{k3}, z_{k3}) 即可描述两单元的运动;第 3 个刚性杆件为空间梁单元,其末端点位置可用描述动平台的柔性板单元节点坐标进行表示,其位置坐标为 (x_{k3}, y_{k3}, z_{k3}) 。因此,刚柔耦合系统共有 303 个广义坐标:9 个刚性梁单元对应 15 个广义坐标 $e_1 \sim e_{15}$,6 个柔性板单元对应 288 个广义坐标 $e_{16} \sim e_{303}$ 。

3.2 刚性梁单元模型

机器人系统中刚性杆件采用刚性梁单元模型来描述,该模型不产生变形,且单元长度远大于截面直径。图 7 描述了全局系 $OXYZ$ 中的刚性梁单元 MN ,其长度为 L ,截面面积为 A 且形状相同,质量分布均匀,端点处位置向量分别为 r_M 和 r_N 。

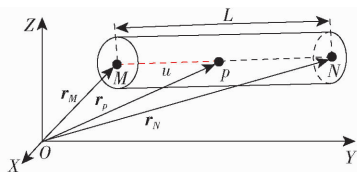


图 7 空间刚性梁单元
Fig.7 Spatial rigid beam element

对于单元中性线上任意点 p ,假定其与端点 M 之间的距离为 u ,则该点位置向量 r_p 可表示为^[21]

$$r_p = (L - u)r_M/L + ur_N/L \quad (u \in [0, L]) \quad (30)$$

将单元节点坐标依次设为两个端点的向量坐标,即令 $e_2 = (r_M^T, r_N^T)^T$,则绝对位置向量 r_p 与单元节点坐标 e_2 之间的转换关系为

$$r_p = [(1 - u)/L \quad u/L] \otimes I_3 e_2 = S_2 e_2 \quad (31)$$

式中 S_2 ——刚性梁的形函数, $S_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$

由惯性力虚功率可得刚性梁单元质量矩阵为

$$M_2 = \rho_2 A \int_0^L S_2^T S_2 du = \begin{bmatrix} m/3 & m/6 \\ m/6 & m/3 \end{bmatrix} \otimes I_3 \quad (32)$$

式中 ρ_2 ——刚性梁密度

m ——刚性梁质量

3.3 系统约束方程

3.3.1 连接性约束方程

系统中连接性约束主要有 3 类:①刚性连杆约束,即保证各个刚性连杆长度不变。②刚性关节约

束,保证连杆之间的相对运动姿态不变。③柔性动平台约束,包括第 2 节中三角形厚板单元之间的连接约束,以及各支链第 3 连杆通过虎克铰与动平台的连接约束。

以第 1 支链为例建立其刚性约束方程

$$\begin{cases} (e_1 + R)^2 + e_2^2 - l_1^2 = 0 \\ (e_3 - e_1)^2 + (e_5 - e_2)^2 - l_2^2 = 0 \\ (U_{1x} - e_3)^2 + (U_{1y} - e_4)^2 + (U_{1z} - e_5)^2 - l_3^2 = 0 \\ e_4 = 0 \\ (e_2 - e_5)(U_{1x} - e_3) + (e_3 - e_1)(U_{1z} - e_5) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

式中 R ——静平台外接圆半径

l_1, l_2, l_3 ——各连杆长度

U_{1x}, U_{1y}, U_{1z} ——虎克铰 U_1 位置坐标分量

其中,前 3 个方程为 3 个刚性连杆的长度约束方程;第 4 个约束方程表明第 2 连杆只做平面运动;第 5 个方程为第 3 转动副轴线与第 3 连杆之间的垂直约束。同理,可列写另外两条支链的 10 个约束方程,共计 15 个约束方程。

考虑虎克铰与动平台的连接约束方程。图 8 描述了各支链第 3 连杆与动平台的连接关系,以及中性面对应的面积坐标梯度。该约束包含点约束和直线约束两个层面。对于前者,保证虎克铰 2 个转动轴线的交点与动平台中性面对应连接侧边中点 W_1, W_2, W_3 的相对位置关系不变,以第 1 支链为例,虎克铰 U_1 与动平台 CB 边中点 W_1 的位置坐标满足约束关系

$$\begin{cases} U_{1x} = (e_{112} + e_{142})/2 + (e_{118} + e_{145})/8 \\ U_{1y} = (e_{113} + e_{143})/2 + (e_{119} + e_{146})/8 \\ U_{1z} = (e_{114} + e_{144})/2 + (e_{120} + e_{147})/8 + \Delta h \end{cases} \quad (34)$$

式中 Δh ——虎克铰 U_1 相对于点 W_1 的偏置距离

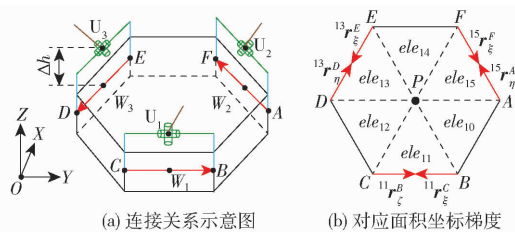


图 8 动平台连接关系及对应面积坐标梯度

Fig.8 Connection and corresponding area coordinate gradients of moving platform

后者保证刚性虎克铰将动平台的各连接侧边(图 8 中红色部分)约束为 1 条直线。由于虎克铰 U_1 的第 1 转动轴线与第 3 转动副轴线平行,故 U_1 第 1 转动轴线可用向量 $U_{1\perp}$ 表示为

$$\boldsymbol{U}_{1-1} = (e_2 - e_5, 0, e_3 - e_1)^T \tag{35}$$

选取 CB 边的方向向量 $\boldsymbol{U}_{1-2}$ 作为 U_1 第 2 转动轴线向量, 根据虎克铰连接关系, 可知其与动平台的直线连接约束方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}_{1-1}^T \boldsymbol{U}_{1-2} = 0 \\ \boldsymbol{U}_{1-2} + {}^{11}\boldsymbol{r}_\xi^B = 0 \\ \boldsymbol{U}_{1-2} - {}^{11}\boldsymbol{r}_\xi^C = 0 \end{cases} \tag{36}$$

式中 ${}^{11}\boldsymbol{r}_\xi^B$ —— ele_{11} 单元点 B 处面积坐标 ξ 梯度
 ${}^{11}\boldsymbol{r}_\xi^C$ —— ele_{11} 单元点 C 处面积坐标 ξ 梯度
同理, 可得其余两个虎克铰的 14 个约束方程, 共计 21 个约束方程。因此, 系统中连接性约束方程共有 36 个。

3.3.2 轨迹约束方程

动平台几何中心点处的运动轨迹应满足设定的轨迹约束方程。由于动平台中心点 P 与 6 个三角形厚板单元的公共顶点重合, 故将 ele_{15} 单元中性层面处的顶点坐标作为被约束量, 系统轨迹约束方程为

$$\begin{cases} e_{46} - P_x = 0 \\ e_{47} - P_y = 0 \\ e_{48} - P_z = 0 \end{cases} \tag{37}$$

式中 P_x, P_y, P_z ——点 P 运动轨迹坐标
由于动平台上相邻 2 个三角形厚板单元之间包含 33 个约束方程, 去除公共点处重复的 15 个约束方程, 动平台上 6 个板单元之间共有 183 个约束方程。此外, 还存在 36 个连接性约束方程和 3 个轨迹约束方程, 因此, 刚柔耦合系统合计 222 个约束方程。

3.4 动力学方程建立

刚柔耦合系统的动力学模型由系统广义坐标表示的拉格朗日动力学方程与系统约束方程组成^[22], 可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{e}} - \boldsymbol{F}_e - \boldsymbol{F}_d - \boldsymbol{F}_g + \boldsymbol{\Phi}_e^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \\ \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{e}, t) = 0 \\ \boldsymbol{\Phi}_e(\boldsymbol{e}, t) = 0 \end{cases} \tag{38}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ ——系统常数质量矩阵
 $\boldsymbol{e}$ ——系统广义坐标向量
 $\boldsymbol{F}_e$ ——系统广义弹性力向量
 $\boldsymbol{F}_d$ ——系统广义驱动力/力矩向量
 $\boldsymbol{F}_g$ ——系统广义重力向量
 $\boldsymbol{\Phi}_e$ ——约束方程雅可比矩阵
 $\boldsymbol{\lambda}$ ——拉格朗日乘子向量
 $\boldsymbol{\Phi}$ ——系统约束方程
 $\boldsymbol{\Phi}_e$ ——系统轨迹约束方程

若运动轨迹已知, 则可求出系统的驱动力矩以及各关节变量的运动状态。若系统的初始状态为静

止状态, 可将式 (38) 中广义坐标的导数项设为零, 即可得到系统静力学方程。

4 刚柔耦合动力学模型求解方法

为解决泊松闭锁问题, 在求解过程中可引入缩减积分法来计算系统广义弹性力^[23]。

根据广义- α 法^[24], 将系统动力学方程进行离散化处理, 可得 n 与 $n+1$ 时刻的迭代方程为

$$(1 - \alpha_m) \boldsymbol{M} \boldsymbol{a}_{n+1} + \alpha_m \boldsymbol{M} \boldsymbol{a}_n = (1 - \alpha_f) \boldsymbol{f}_{n+1} + \alpha_f \boldsymbol{f}_n \tag{39}$$

式中 α_m, α_f ——迭代参数
 $\boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{a}_n$ ——辅助加速度迭代向量
 $\boldsymbol{f}_{n+1}, \boldsymbol{f}_n$ ——广义力迭代向量
将加速度向量 $\ddot{\boldsymbol{q}}_{n+1}, \ddot{\boldsymbol{q}}_n$ 代入式 (39) 可得
 $(1 - \alpha_f) \ddot{\boldsymbol{q}}_{n+1} + \alpha_f \ddot{\boldsymbol{q}}_n = (1 - \alpha_m) \boldsymbol{a}_{n+1} + \alpha_m \boldsymbol{a}_n \tag{40}$

根据 Newmark 法^[25], 可知系统坐标向量 $\boldsymbol{q}_{n+1}, \boldsymbol{q}_n$ 与速度向量 $\dot{\boldsymbol{q}}_{n+1}, \dot{\boldsymbol{q}}_n$ 的迭代公式为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{q}}_n + \eta(1 - \gamma) \boldsymbol{a}_n + \eta\gamma \boldsymbol{a}_{n+1} \\ \boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n + \eta\dot{\boldsymbol{q}}_n + \eta^2(0.5 - \beta) \boldsymbol{a}_n + \eta^2\beta \boldsymbol{a}_{n+1} \end{cases} \tag{41}$$

式中 β, γ ——迭代参数
 η ——迭代步长
联立式 (40)、(41) 可得各向量之间的微分关系为

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \ddot{\boldsymbol{q}}} = \frac{\eta^2 \beta (1 - \alpha_f)}{1 - \alpha_m} \boldsymbol{I} = \beta \boldsymbol{I} \\ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}{\partial \ddot{\boldsymbol{q}}} = \frac{\eta \gamma (1 - \alpha_f)}{1 - \alpha_m} \boldsymbol{I} = \gamma \boldsymbol{I} \end{cases} \tag{42}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ ——单位矩阵, 阶数等于系统广义坐标数
式 (40) ~ (42) 为广义- α 法的求解迭代方程, 通过调整以下参数可实现对高频分量的数值耗散

$$\begin{cases} \alpha_m = (2\rho_\infty - 1)/(1 + \rho_\infty) \\ \alpha_f = \rho_\infty/(1 + \rho_\infty) \\ \beta = 1/(1 + \rho_\infty)^2 \\ \gamma = 0.5 - \alpha_m + \alpha_f \end{cases} \tag{43}$$

式中 ρ_∞ ——谱半径, 取 0 ~ 1
将迭代方程的坐标向量替换为系统广义坐标, 根据牛顿迭代法, 选取广义加速度 $\ddot{\boldsymbol{e}}$ 、驱动力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 、拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 为迭代变量, $\boldsymbol{F}$ 为系统广义力与约束合力, 则相应的雅可比迭代矩阵为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \partial(\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{F})/\partial\ddot{\boldsymbol{e}} & \partial(\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{F})/\partial\boldsymbol{\lambda} & \partial(\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{F})/\partial\boldsymbol{\tau} \\ \partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\ddot{\boldsymbol{e}} & \partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{\lambda} & \partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{\tau} \\ \partial\boldsymbol{\Phi}_e/\partial\ddot{\boldsymbol{e}} & \partial\boldsymbol{\Phi}_e/\partial\boldsymbol{\lambda} & \partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \tag{44}$$

5 多体系统动力学仿真

假设刚柔耦合并联机器人刚性静平台的外接圆半径 $R = 0.175\text{ m}$ ；六边形柔性动平台的厚度 $h = 0.006\text{ m}$ ，内切圆半径 $r = 0.09\text{ m}$ ，弹性模量 $E = 6.9 \times 10^8\text{ Pa}$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ；动平台负载 $m_L = 6\text{ kg}$ ，作用于动平台中心点 P 处。其余物理参数如表 1 所示，谱半径 $\rho_\infty = 0.1$ 。

表 1 刚柔耦合机器人物理参数

Tab. 1 Physical parameters of rigid-flexible robot

参数	构件			
	连杆 1	连杆 2	连杆 3	动平台
质量/kg	0.8	0.3	0.6	0.5
长度/m	0.375	0.09	0.815	

5.1 系统初始状态仿真

假设柔性动平台上点 P 的运动起始点坐标为 $(0.1\text{ m}, 0, -0.8\text{ m})$ ，此时系统处于静力平衡状态，各构件的速度和加速度均为零，将式 (44) 中的迭代变量改为系统广义坐标来对系统静力学模型进行迭代求解，可求出机器人空间姿态与柔性动平台中性层的变形状态，如图 9 所示（坐标轴比例 $X:Y:Z = 1:1:0.05$ ）。

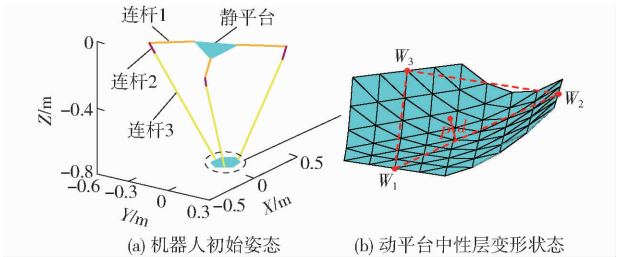


图 9 初始姿态与动平台中性层变形状态
Fig. 9 Initial attitude and neutral layer deformation

由图 9 可知，在初始状态下，各支链虎克铰与动平台中性层相连的 3 条边均保持为直线，这与设定的约束条件一致；在负载作用下，动平台呈中央凹陷变形的特征，若将动平台中性层面侧边中点 W_1 、 W_2 、 W_3 相连，求出它们对应的几何中心点坐标，进而计算出点 P 到此中心点的直线距离 d 为 1.269 mm ，该距离可用于描述动平台凹陷变形的程度，其整体变形状态也与自重和负载的作用方式相符。此外，侧边中点 W_1 、 W_2 、 W_3 的坐标分别为 $(0.01\text{ m}, -1.312 \times 10^{-14}\text{ m}, -0.800\text{ m})$ 、 $(0.145\text{ m}, -0.077\text{ m}, -0.797\text{ m})$ 、 $(0.145\text{ m}, 0.077\text{ m}, -0.797\text{ m})$ ，再结合机器人第 2 支链与第 3 支链的姿态以及动平台中性层的变形状态，可知当前位姿关于 XOZ 平面呈现出良好的对称性，这与 3-RRRU 刚柔耦合机器人各支链及动平台的结构对称

性相一致。通过分析上述求解结果，可初步验证所建系统模型及静力学模型的有效性。

5.2 直线运动轨迹仿真

为验证系统动力学模型的正确性，首先研究动平台中心点 P 的直线运动轨迹，如图 10a 所示。运动起止阶段添加了加减速过程，并采用正弦函数分别进行描述

$$\begin{cases} a_{acc}(t) = H(\omega^2 \sin(\omega t - \pi/2) + \omega^2) \\ a_{dec}(t) = -H(\omega^2 \sin(\omega t - \pi/2) + \omega^2) \end{cases} \quad (45)$$

式中 a_{acc} 、 a_{dec} ——加速段、减速段的加速度函数
 H 、 ω ——加速度幅值和角频率

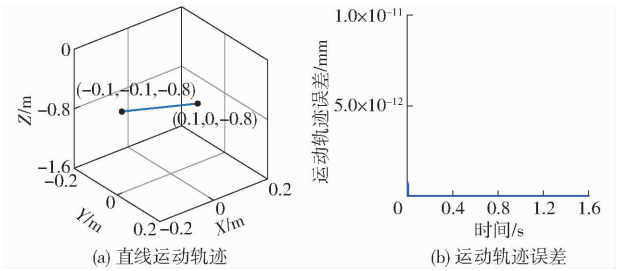


图 10 直线运动轨迹及其误差
Fig. 10 Linear trajectory and its errors

轨迹运行时间为 0.8 s ，采样时间为 5 ms ，加减速段时间占比均为 40% ，加速度幅值 H 为 0.003 m/s^2 ，角频率 ω 为 19.6 rad/s ，起止点均为静止状态，匀速段线速度为 0.37 m/s 。图 10b 为实际运动轨迹与理想轨迹之间误差，最大值出现在运动初始阶段，为 $6.8 \times 10^{-13}\text{ mm}$ ，轨迹误差满足精度要求。

图 11 描述了柔性动平台的凹陷变形程度（通过距离 d ）以及 3 个连接侧边中点的 Z 轴坐标。其中，动平台凹陷变形范围为 $[1.243\text{ mm}, 1.275\text{ mm}]$ ，同时呈现出周期性的变化规律，最大值 1.275 mm 出现在匀速段，最小值 1.243 mm 出现在加速阶段；在初始位置，侧边中点 W_1 的 Z 轴坐标比点 P 的 Z 轴坐标小 0.39 mm ，而点 W_2 和点 W_3 的 Z 轴坐标比点 P 的 Z 轴坐标大 2.1 mm ，这与系统初始状态的仿真结果一致。因此，在直线运动过程中动平台姿态发生了倾斜，不再保持平动状态。

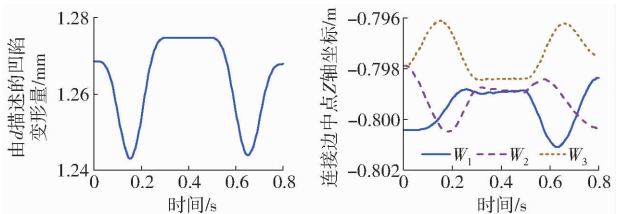


图 11 动平台变形程度及姿态说明
Fig. 11 Deformation and posture of platform

系统驱动关节力矩和驱动角位移如图 12a、12c 所示。其中，驱动力矩在加减速阶段的幅值变化较为明显，而匀速阶段的变化则相对平稳，其最大值出现

在第3支链,为 $-19.93\text{ N}\cdot\text{m}$;最小值出现在第1支链,为 $-5.89\text{ N}\cdot\text{m}$ 。角位移整体幅值变化较为平滑,最大值出现在第3支链,为 -9.87° 。

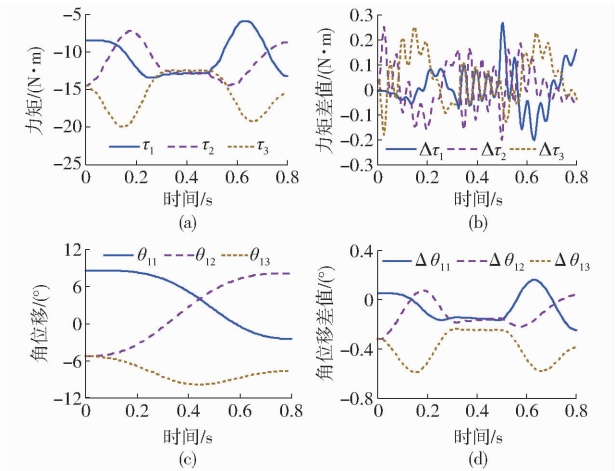


图 12 驱动关节变量及其偏差

图 12b、12d 为驱动关节力矩、角位移与理想纯刚性机器人系统对应值的差值变化曲线。其中,驱动力矩差值的变化呈明显的非线性振动特性,其最大差值出现在第1支链,为 $0.27\text{ N}\cdot\text{m}$;角位移最大差值出现在第3支链,为 -0.59° ,在匀速段其变化相对平稳、波动较小,在加减速阶段变化幅度较大。相比之下,刚柔耦合机器人关节变量的非线性变化特征更为复杂。

系统动力学方程和约束方程的误差函数分别定义为各自向量方程的 Frobenius 范数。由于大多数工业机器人的重复定位精度为 $\pm 0.1\text{ mm}$,为保证求解精度在实际工程中的可用性,将动力学方程和约束方程的误差阈值分别设为 10^{-6} 和 10^{-14} 。图 13 为直线运动时二者的误差变化曲线,均低于预设值,故理论模型的求解结果完全满足迭代精度要求,证明了所提出迭代算法的有效性。

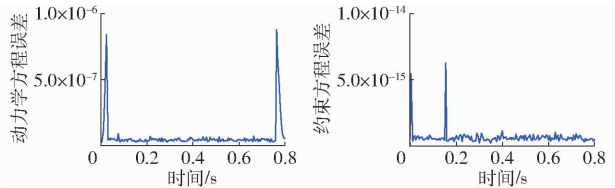


图 13 动力学方程与约束方程的迭代误差

Fig. 13 Iterative errors of dynamic and constraint equations

5.3 圆周运动轨迹仿真分析

为更全面地验证和分析系统动力学模型与动平台变形的运动规律,在 XOY 平面上建立以点 $(0, 0, -0.8\text{ m})$ 为圆心、半径为 0.1 m 的圆周运动轨迹,令动平台点 P 沿逆时针方向进行运动,如图 14a 所示。轨迹运行时间为 1.6 s ,加速度幅值 H 为 0.011 m/s^2 ,角频率 ω 为 9.82 rad/s ,起止点均为静止状态,匀速段线

速度为 0.68 m/s ,其他仿真参数与条件不变。图 14b 为实际运动轨迹与理想轨迹之间误差,与直线轨迹相似,其最大误差出现在运动初始阶段,为 $1.2\times 10^{-12}\text{ mm}$,误差满足精度要求。

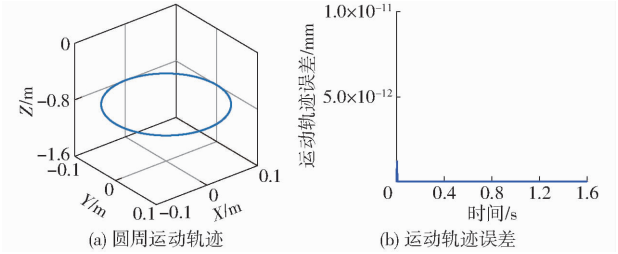


图 14 圆周运动轨迹及其误差

Fig. 14 Circumferential trajectory and its errors

图 15 为柔性动平台凹陷变形程度 d 及3个连接侧边中点 Z 轴坐标的变化曲线,二者的运动过程均呈现出较为规范的对称性和周期性。但由于存在向心加速度,它们的变化趋势与直线运动时有所差异。其中,动平台凹陷变形范围为 $[1.232\text{ mm}, 1.269\text{ mm}]$,整体呈先减小后增大的变化趋势,在加、减速与匀速运动的过渡阶段及加速度最值点附近均发生了非线性“回弹”现象;由于初始位置相同, W_1 、 W_2 和 W_3 3个中点的 Z 轴坐标与直线轨迹相同,同时动平台在圆周运动过程中发生明显的倾斜,亦不再保持平动状态。

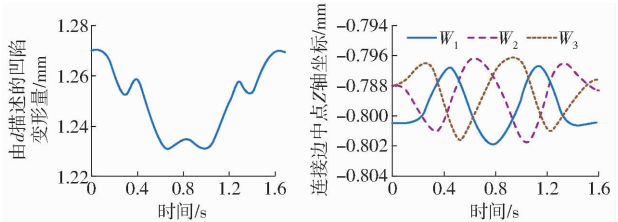


图 15 动平台变形程度和姿态变化说明

Fig. 15 Deformation and posture of platform

图 16 描述了 0.4 、 0.8 、 1.2 s 时刻动平台的变形。动平台不仅发生了凹陷与弯曲变形,且整体产生了倾斜,这与图 15 中对应时刻所描述的变形与姿态一致。图 17 描述了动平台下层面、中性层面与上层面对应的正应变曲线。其中,下层面为压缩变形,中性层面与上层面对应拉伸变形;各层面中心点在 Z 轴方向的正应变 ε_{33} 变化相对平稳;下层面中心点在 X 轴、 Y 轴方向正应变 ε_{11} 和 ε_{22} 的整体变化趋

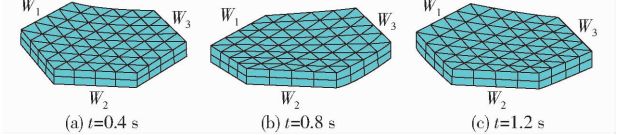


图 16 柔性动平台在不同时刻的变形状态(坐标轴比例为 $X:Y:Z=1:1:0.3$)

Fig. 16 Deformation of flexible moving platform at different moments

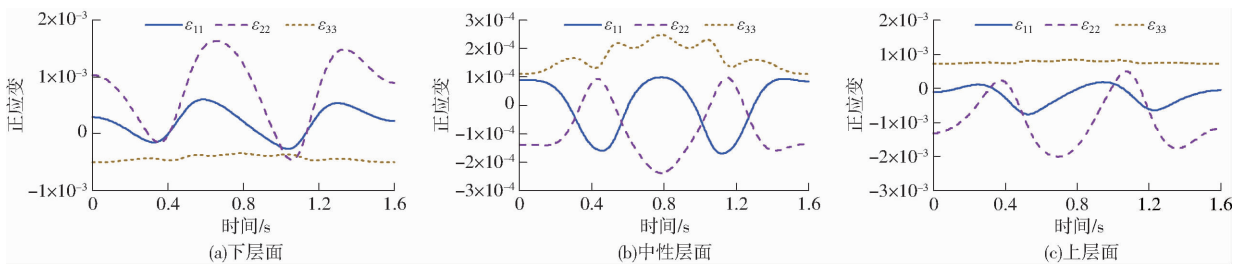


图 17 柔性动平台 3 个层面中心点正应变变化曲线

Fig. 17 Normal strains at center point of three layers of flexible moving platform

势与上层面相反,二者呈明显的对称性;上层面与下层面应变的平均值均大于中性层面应变的平均值。动平台变形与设定运动轨迹下系统受力状态的变化相一致。

图 18 为驱动关节变量的变化曲线。其中,关节角位移、角速度与驱动力矩均呈平稳的周期性变化规律,不存在大幅度波动和突变现象,且三者之间满足导数关系;关节角位移最大值为 -9.5° ,出现在第 3 支链,角速度最大值为 1.03 rad/s 、最小值为 0.76 rad/s ,分别出现在第 3 支链和第 2 支链,驱动力矩最大值为 $-23.7 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、最小值为 $-3.09 \text{ N}\cdot\text{m}$,分

别出现在第 2 支链和第 1 支链。图 19 为刚柔耦合系统各驱动关节变量与理想纯刚性系统对应值的差值变化曲线。其中,角位移差值呈周期性变化,其最大差值为 -0.53° ,出现在第 3 支链;角速度差值仍保留一定的周期性变化规律,但同时也表现出非线性变化特征,其最大差值为 0.09 rad/s ,出现在第 3 支链;驱动力矩差值的变化曲线呈现出明显的非线性振动特征,其最大差值为 $-0.16 \text{ N}\cdot\text{m}$,出现在第 2 支链。显然,各关节变量始终在理想纯刚性系统的对应值附近上下波动,符合刚柔耦合系统动力学模型的非线性变化规律,验证了所建模型的有效性。

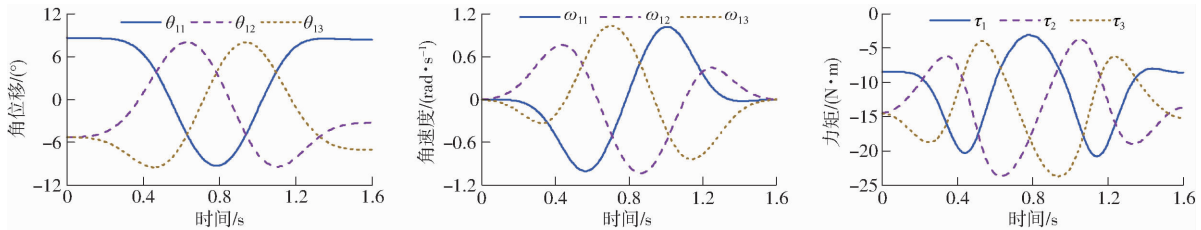


图 18 刚柔耦合系统的驱动关节变量变化曲线

Fig. 18 Actuated joint variables of rigid-flexible coupling system

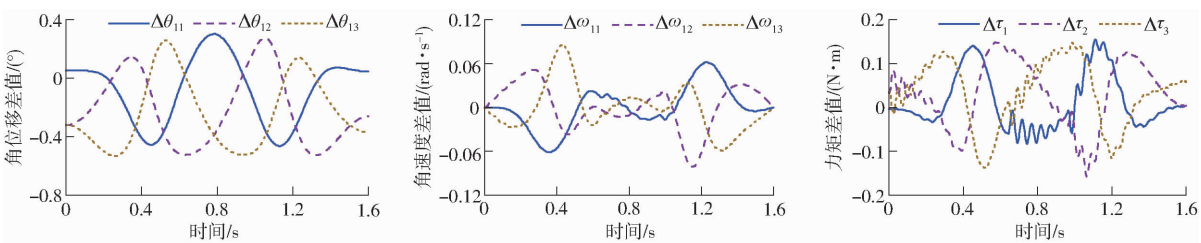


图 19 刚柔耦合系统与纯刚性系统输入变量差值变化曲线

Fig. 19 Differences of input variables between rigid-flexible coupling system and pure rigid system

圆周运动时系统动力学方程和约束方程的误差变化曲线如图 20 所示,二者均低于设定的误差阈值 10^{-6} 和 10^{-14} ,满足迭代精度要求,充分证明了系统动力学模型求解策略的有效性。

5.4 不同负载与弹性模量下对比仿真

为进一步验证动力学模型的有效性,通过修改负载和动平台弹性模量,来对比分析圆周轨迹下刚柔耦合系统的运动规律。图 21 为负载为 6 kg (实线表示) 和 10 kg (虚点线表示) 时驱动力矩的变化曲线,二者平均值分别为 $-13.23 \text{ N}\cdot\text{m}$ 和

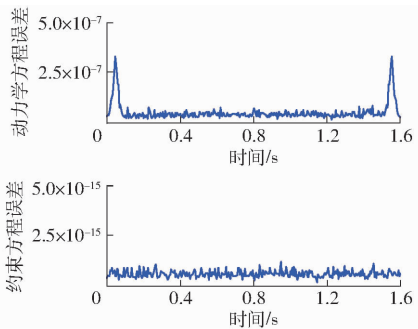


图 20 动力学方程与约束方程的迭代误差变化曲线

Fig. 20 Iterative errors of dynamic and constraint equations

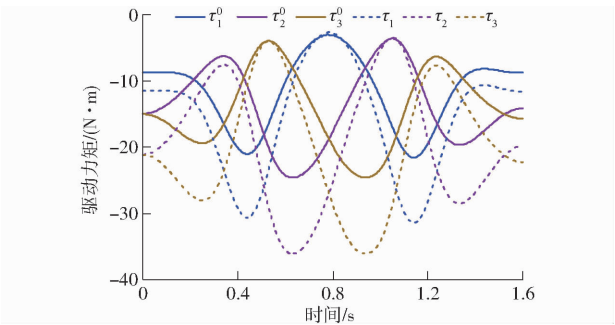


图 21 不同负载条件下系统的驱动力矩变化曲线
Fig. 21 Actuated torques under different system loadings

-18.44 N·m，平均差值分别为 5.05 N·m 和 7.74 N·m。随着负载的增加，系统驱动力矩的反向幅值整体随之增大，各力矩与平均值的差异程度变大，符合负载条件改变后的理论变化趋势。

表 2 给出了不同材质动平台对应的弹性模量，系统对应驱动力矩的平均差值如图 22 所示。其中，动平台弹性模量越小，系统柔性变形程度越大，驱动力矩平均差值也将逐渐增大，相较于理想刚性系统的幅值波动也会不断增大；随着动平台弹性模量的增大，刚柔耦合系统驱动力矩的平均

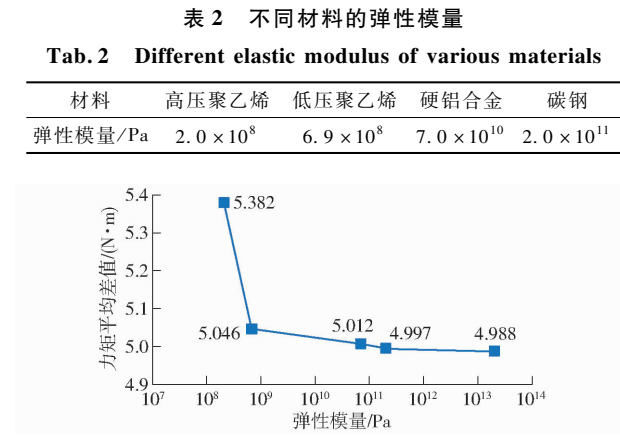
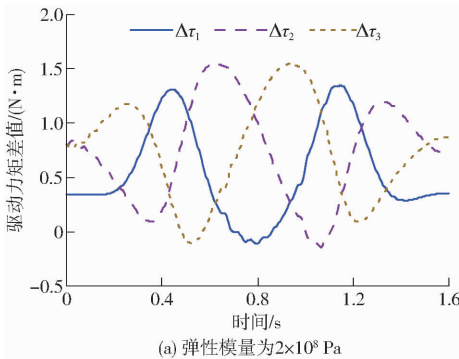


图 22 不同弹性模量下驱动力矩的平均差值
Fig. 22 Mean deviations of actuated torques with different elastic modulus

差值将逐渐接近纯刚性系统，其运动规律与变形特性亦将逐步退化为理想纯刚性系统。图 23 分别描述了弹性模量为 2×10^8 Pa (高压聚乙烯材料) 和 7×10^{10} Pa (硬质铝合金材料) 时，系统驱动力矩与纯刚性系统驱动力矩的对应差值。最大差值分别为 1.55 N·m 和 0.01 N·m，其幅值变化趋势与弹性模量值相对应。

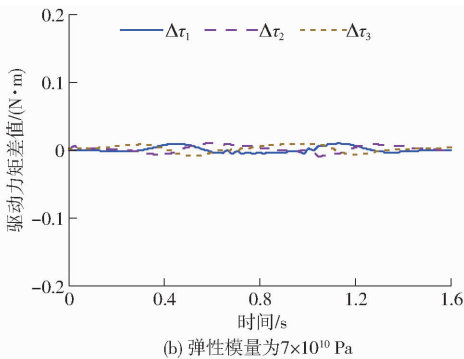


图 23 2 种典型弹性模量下驱动力矩差值变化曲线
Fig. 23 Differences of actuated torques with two modulus

通过上述对比分析，验证了不同负载、不同弹性模量下，所述动力学建模方法与求解策略的有效性和一致性。该方法可用于包含柔性板单元的其他结构类型的柔性多体机器人进行动力学建模和求解研究，其建模步骤具有良好的通用性。

6 结论

- (1) 针对含柔性动平台的空间并联机器人刚柔耦合问题，构建了基于高阶柔性三角形厚板单元划分的动平台模型，该模型能有效地描述板单元厚度方向上的弹性变形，并建立了动平台内部相邻厚板单元之间的 G^0 和 G^1 连接约束模型。
- (2) 对含柔性动平台的 3-RRRU 并联机器人进行了动力学建模，并结合广义- α 法与牛顿迭代法求解了约束条件下的拉格朗日动力学方程。通过

- 对系统初始状态的仿真分析，验证了机器人的空间位姿和动平台变形状态符合系统各构件的布局方式、质量分布与负载作用方式。
- (3) 由动力学的仿真结果可知，动平台上点 P 的实际运动轨迹与理想规划轨迹拟合较好，运动轨迹误差小于 1.2×10^{-12} mm；刚柔耦合系统驱动关节输入量变化平稳，且始终在纯刚性系统对应值的附近波动，各刚性构件与柔性动平台的运动耦合方式符合多体动力学模型的非线性规律；动力学方程和约束方程的迭代误差小于给定的误差阈值 10^{-6} 和 10^{-14} ，其数量级在理论上均满足工程应用的需要。
 - (4) 根据动平台仿真结果，柔性动平台除了存在凹陷变形和弯曲变形外，还存在着倾斜的现象；柔性动平台变形的变化符合力学规律，与理论模型相

一致;最后通过对比分析验证了提出的建模方法在不同负载、不同弹性模量下均具有较好的有效性,且所述建模与求解步骤具有良好的通用性,可用于同类系统的建模与求解。

参 考 文 献

[1] WANG X Y, WANG H F, ZHAO J C, et al. Rigid-flexible coupling dynamics modeling of spatial crank-slider mechanism based on absolute node coordinate formulation[J]. *Mathematics*, 2022, 10(6): 881.

[2] 孙加亮, 田强, 胡海岩. 多柔体系统动力学建模与优化研究进展[J]. *力学学报*, 2019, 51(6): 1565 – 1586.
SUN Jialiang, TIAN Qiang, HU Haiyan. Advances in dynamic modeling and optimization of flexible multibody systems[J]. *Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(6): 1565 – 1586. (in Chinese)

[3] NANDIHAL V P, MOHAN A, SAHA K S. Dynamics of rigid-flexible robots and multibody systems[M]. Singapore:Springer, 2022.

[4] SHABANA A A. Dynamics of multibody systems[M]. New York: Cambridge University Press, 2013.

[5] XU Y D, TENG Z C, YAO J T, et al. Elastodynamic analysis of a novel motion-decoupling forging manipulator[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 147: 103771.

[6] CAMMARATA A. Global flexible modes for the model reduction of planar mechanisms using the finite-element floating frame of reference formulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 489: 115668.

[7] SHENG F F, ZHONG Z Y, WANG K H. Theory and model implementation for analyzing line structures subject to dynamic motions of large deformation and elongation using the absolute nodal coordinate formulation (ANCF) approach[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 101: 333 – 359.

[8] RONG B, RUI X T, TAO L, et al. Theoretical modeling and numerical solution methods for flexible multibody system dynamics[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98: 1519 – 1553.

[9] CHEN T, WEN H, HU H Y, et al. Quasi-time-optimal controller design for a rigid-flexible multibody system via absolute coordinate-based formulation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88: 623 – 633.

[10] 陈修龙, 崔梦强. 基于绝对节点坐标法的空间并联机构刚柔耦合动力学建模[J]. *农业机械学报*, 2021, 52(4): 392 – 401.
CHEN Xiulong, CUI Mengqiang. Rigid flexible coupling dynamic modeling of spatial parallel mechanism based on absolute node coordinate formulation[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2021, 52(4): 392 – 401. (in Chinese)

[11] 夏椰林. 基于绝对节点坐标法的平面 3 – RRR 并联机构动力学分析[D]. 长春: 长春工业大学, 2018.
XIA Yelin. Dynamics analysis of planar 3 – RRR parallel mechanism based on absolute nodal coordinate formulation method [D]. Changchun: Changchun University of Technology, 2018. (in Chinese)

[12] ABBAS L K, RUI X, HAMMOUDI Z S. Plate/shell element of variable thickness based on the absolute nodal coordinate formulation[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-Body Dynamics*, 2010, 224(2): 127 – 141.

[13] SUN J, TIAN Q, HU H, et al. Topology optimization of a flexible multibody system with variable-length bodies described by ALE – ANCF[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 93: 413 – 441.

[14] CHEN Y Z, GUO X, ZHANG D G, et al. A novel radial point interpolation method for thin plates in the frame of absolute nodal coordinate formulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 469: 115132.

[15] 薛鹏聪, 刘铖, 水小平. 基于 ANCF 的薄膜太阳帆自旋展开动力学模拟[J]. *深空探测学报(中英文)*, 2022, 9(2): 217 – 229.
XUE Pengcong, LIU Cheng, SHUI Xiaoping. Spin deployment dynamics simulation of membrane solar sail based on ANCF [J]. *Journal of Deep Space Exploration*, 2022, 9(2): 217 – 229. (in Chinese)

[16] YU H D, ZHAO Z J, YANG D, et al. A new composite plate/plate element for stiffened plate structures via absolute nodal coordinate formulation[J]. *Composite Structures*, 2020, 247: 112431.

[17] 林张鹏, 余海东, 袁可. 基于高阶复合曲面单元的非均匀大薄板装配偏差计算模型[J]. *上海交通大学学报*, 2022, 56(5): 584 – 593.
LIN Zhangpeng, YU Haidong, YUAN Ke. Model of assembly deviation of irregular large thin-walled structures based on higher-order composite shell element[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2022, 56(5): 584 – 593. (in Chinese)

[18] CHANG H J, LIU C, TIAN Q, et al. Three new triangular shell elements of ANCF represented by Bézier triangles[J]. *Multibody System Dynamics*, 2015, 35: 321 – 351.

[19] WANG T F. Two new triangular thin plate/shell elements based on the absolute nodal coordinate formulation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 99(4): 2707 – 2725.

[20] 常汉江. 空间结构展开动力学的等几何有限元建模方法[D]. 北京: 北京理工大学, 2018.
CHANG Hanjiang. Finite element modeling of deployment dynamics of space structures via isogeometric analysis[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2018. (in Chinese)

[21] ZHANG X C, ZHANG X M. Elastodynamics of the rigid-flexible 3 – RRR mechanism using ANCF method[C] // Proceedings of the 7th International Conference on Intelligent Robotics and Applications, Lecture Notes in Computer Science, 2014, 8918: 24 – 35.

[22] 陈修龙, 郭景尧, 贾永皓. 3 – RRPaR 并联机构刚体动力学建模与分析[J]. 农业机械学报, 2020, 51(6): 404 – 411. CHEN Xiulong, GUO Jingyao, JIA Yonghao. Rigid body dynamics modeling and analysis of 3 – RRPaR parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(6): 404 – 411. (in Chinese)

[23] SHABANA A A. Computational continuum mechanics[M]. Hoboken: Wiley, 2018.

[24] XU C, DAI R, DONG C Y, et al. RI – IGABEM based on generalized- α method in 2D and 3D elastodynamic problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 383: 113890.

[25] 谭月胜, 詹登辉, 张彭豪. 刚柔耦合串联机械臂末端位置误差分析与补偿[J]. 农业机械学报, 2021, 52(2): 416 – 426. TAN Yuesheng, ZHAN Denghui, ZHANG Penghao. Analysis and compensation of end position error of rigid-flexible coupling serial manipulator[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(2): 416 – 426. (in Chinese)

~~~~~

( 上接第 396 页 )

[27] LIU X D, BAI Y, YU C H, et al. Multi-strategy improved sparrow search algorithm and application[ J ]. Mathematical and Computational Applications, 2022, 27(6): 96.

[28] 褚小立. 化学计量学方法与分子光谱分析技术[ M ]. 北京: 化学工业出版社, 2011.

[29] 王昌冰. 三维荧光光谱技术在食用植物油检测中的应用研究[ D ]. 秦皇岛: 燕山大学, 2019. WANG Changbing. Study on the detection of edible vegetable oils using excitation-emission matrices[ D ]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2019. ( in Chinese )

[30] XIA R Z, JIA Y, LI H, et al. A BP neural network text categorization method optimized by an improved genetic algorithm[ C ] // 2013 9th International Conference on Natural Computation ( ICNC ), 2013: 257 – 261.

[31] WANG H Y, ZHAO Y, PEI J H, et al. Non-negative radial basis function neural network in polynomial feature space[ C ] // Journal of Physics: Conference Series, 2019.

[32] CHEN J, SUN D. Partial least squares regression ( PLSR ) applied to NIR and HSI spectral data modeling to predict chemical properties of fish muscle[ J ]. Food Engineering Reviews, 2017, 9(1): 36 – 49.