doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.07.045

具有整周回转能力的3T1R并联机构运动学分析

畅博彦[1,2] 李晓宁[1] 金国光[1,2] 张 转[1] 杨 帅[1]
(1.天津工业大学机械工程学院，天津 300387；2.天津市现代机电装备技术重点实验室，天津 300387)

摘要： 设计了一种可实现整周回转运动且便于模块化装配的3T1R并联机构。首先，提出一种仅含转动副的二维移动放缩单元，模块化组合与扩展后，构造得到一种平面二维移动放缩机构，将平面二维移动放缩机构作为支链，设计得到一种新型3T1R并联机构；其次，对该3T1R机构进行拓扑结构分析，在保证机构基本功能(方位特征集和自由度)不变的情况下对其进行降耦设计，得到耦合度为1的机构；最后，基于序单开链法对降耦机构进行位置分析，同时，基于导出的机构位置反解公式，分析机构的工作空间和转动能力，并绘制转动能力图谱，根据转动能力图谱筛选出机构可实现整周回转运动的工作空间范围，为该型机构的设计和实际工程应用提供理论依据。

关键词： 并联机构；结构降耦；运动学分析；工作空间；转动能力
中图分类号： TH112.1 **文献标识码：** A **文章编号：** 1000-1298(2019)07-0406-11

Kinematics Analysis of Novel 3T1R Parallel Manipulator with Full Rotational Capability

CHANG Boyan[1,2] LI Xiaoning[1] JIN Guoguang[1,2] ZHANG Zhuan[1] YANG Shuai[1]
(1. *College of Mechanical Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin* 300387, *China*
2. *Tianjin Key Laboratory of Advanced Mechatronics Equipment Technology, Tianjin* 300387, *China*)

Abstract: There is a wide range of industrial application for the 4-DOF parallel mechanism (PM) which can achieve SCARA type output motion (i.e., three translations and one rotation). However, due to the constraints of kinematic chains, most of them have small rotational capacity and cannot meet the actual demand sometimes. A type of 3T1R PM which can realize full cycle rotary motion was proposed. Firstly, a two-dimensional moving unit which consisted of revolute joint only was constructed. According to the mechanisms and machine theory, modular principle of the pantograph mechanism for scaling two-dimensional planar graph was explained as the mechanism can be divided into three types of modules which were all derived from the two-dimensional moving unit. And then a 3T1R PM with four legs was designed by taking the obtained pantograph mechanisms as sub-chains. Secondly, the structure coupling-reducing optimization design for this PM was performed, whose POC and DOF were unchanged with lower coupling degree ($k=1$). Finally, the modeling method and the numerical solutions for forward and inverse position equations of the PM were established based on ordered single-open-chain (SOC) units. The working space and the rotational ability of this parallel mechanism were obtained and the rotational capacity map was drawn by using the inverse position equations. According to the map, the range of workspace that can realize the full rotational capability was selected which can be treated as a theoretical basis for the design and applications for this mechanism.

Key words: parallel mechanism; structure coupling-reducing; kinematics analysis; workspace; rotational capacity

---

收稿日期：2019-05-14 修回日期：2019-05-31
基金项目： 国家自然科学基金项目(51475330)、天津市自然科学基金项目(17JCQNJC03900)、天津市教委科研计划项目(2018KJ205)和天津市高等学校创新团队培养计划项目(TD13-5037)
作者简介： 畅博彦(1985—)，男，讲师，主要从事机构学和机械系统动力学研究，E-mail：mmts_tjpu@126.com
通信作者： 金国光(1963—)，男，教授，博士生导师，主要从事机构学、机械系统动力学与控制研究，E-mail：jinguoguang@tjpu.edu.cn

0　引言

3T1R 型并联机器人在高速抓放、产品分拣、零件装配等工艺过程中，尤其在需要调整工件姿态的场合下，具有广泛的应用前景。最初的 3T1R 并联机构是以 Delta 机器人为基础，通过在其动平台上添加一个独立的转动副而得到。随着数学工具的发展，相继提出了 H4、I4、Par4、Heli4 等类型的 3T1R 并联机构[1-6]。赵铁石等[7]提出了 4 - TRT 型 3T1R 并联机构；黄田等[8]提出了 Cross - IV 型四自由度 3T1R 并联机构；刘辛军等[9]提出了 X_4 型四自由度 3T1R 并联机构；沈惠平等[10-16]对国内外现有的 2 ~ 6 自由度并联机构进行拓扑结构和运动解耦性分析，提出了并联机构的 4 个运动解耦规律、4 个运动解耦设计原理及其方法和 2 个降耦原理及其 3 种降耦方法，结合并联机构拓扑结构设计理论，提出了多种 3T1R 并联机构，并对其拓扑结构特征和运动特性进行了分析；杨廷力等[17-18]基于方位特征方程，详述了 3T1R 并联机构拓扑结构综合的完整过程，并得到多种新型 3T1R 并联机构；朱小蓉等[19-20]提出了一种无过约束并联机构设计方法，并基于降耦原理设计了一种低耦合度的 3T1R 运动解耦并联机构。但是，由于受到支链间的相互约束作用，大多数的 3T1R 并联机构的转动能力较小（小于 90°），不足以满足实际工况的使用要求[21]。

实现 3T1R 并联机构整周回转运动的方法主要包括[21]：① 在动平台上直接增加一个独立的转动副，这种方法增加了机构末端的转动惯量和制造成本。② 利用齿轮放大机构动平台的旋转角，该方法使并联机构的结构更加复杂，对可靠性有一定影响。③ 采用两个轴线相同、但旋向相反的螺旋副，使动平台具有整周回转能力，该方法简单有效，但需要保证制造、装配和控制精度，以避免锁死。

本文将平行四边形机构与平行四边形剪叉机构相结合，提出一种平面二维移动放缩单元，经模块化组合和扩展后，构造一种新型平面二维移动放缩机构，并将该放缩机构作为支链应用于 3T1R 并联机构的设计，对所得并联机构的拓扑结构进行分析和降耦设计，得到耦合度为 1 的降耦机构。以降耦机构为研究对象，基于序单开链法建立机构的位置正反解方程，用于对机构的工作空间和转动能力进行分析，以确定机构可实现整周回转运动的工作空间范围。

1　平面二维移动放缩支链

1.1　支链的组成原理

图 1 所示的平面二维移动放缩支链由 3 种模块，即底部模块、中部模块和顶部模块，经转动副顺序连接而成，3 种模块均由二维移动放缩单元演变而来，演变过程如图 2 所示。二维移动放缩单元以平行四边形机构和平行四边形剪叉机构为基础构造而成，构造过程如图 3 所示。由图 1 可以看出，对于由 n 个模块（$n \geqslant 2$）组成的二维移动放缩支链，其包括 1 个底部模块、$n-2$ 个中部模块和 1 个顶部模块。

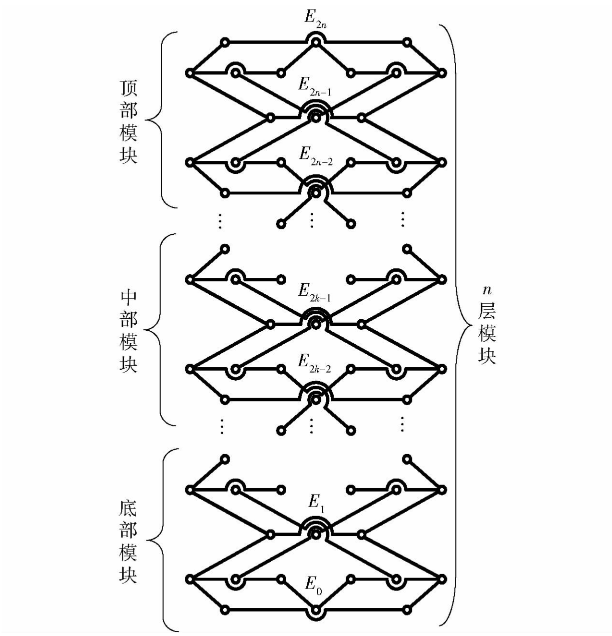
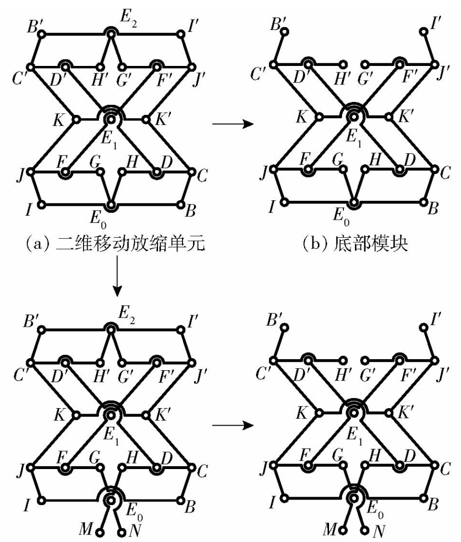


图 1　n 层平面二维移动放缩支链简图

Fig. 1　Two-dimensional pantograph mechanism consisted of n-layer modules



(a) 二维移动放缩单元　(b) 底部模块

(c) 顶部模块　(d) 中部模块

图 2　3 种模块构造简图

Fig. 2　Construction diagrams of three kinds of module

1.2　支链的运动学分析

以二维移动放缩单元为研究对象，以 E_0 为原点，杆 IB 为 x 轴，建立固定坐标系 Oxy 如图 4 所示，杆 BC、IJ、FE_1、CK' 与 x 轴正向的夹角分别为 θ_{11}、

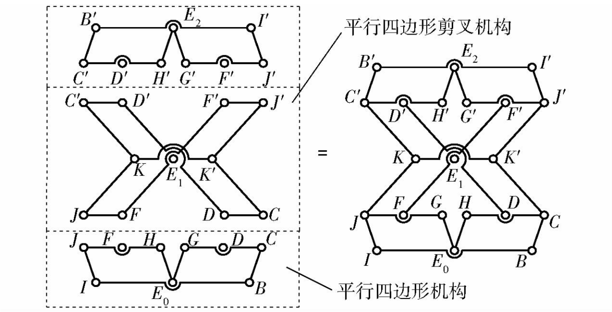


图 3 二维移动放缩单元

Fig. 3 Two-dimensional pantograph unit

θ_{12}、θ_{13}、θ_{14}；杆 E_0G、IJ、E_0H、BC 的长度为 l_1，杆 E_0I、E_0B 的长度为 l_2，杆 FG、FJ、DH、DC 的长度为 $0.5l_2$，杆 JK、FE_1、CK'、DE_1 的长度为 l_3。

采用矢量代数法可建立机构的闭环矢量方程，针对闭环运动链 $E_0GFE_1E_0$，列写闭环矢量方程

$$\boldsymbol{E_0G}+\boldsymbol{GF}+\boldsymbol{FE}_1=\boldsymbol{E_0E}_1$$

即

$$\begin{cases} l_1\cos\theta_{12}-0.5l_2+l_3\cos\theta_{13}=x_{E_1} \\ l_1\sin\theta_{12}+l_3\sin\theta_{13}=y_{E_1} \end{cases} \tag{1}$$

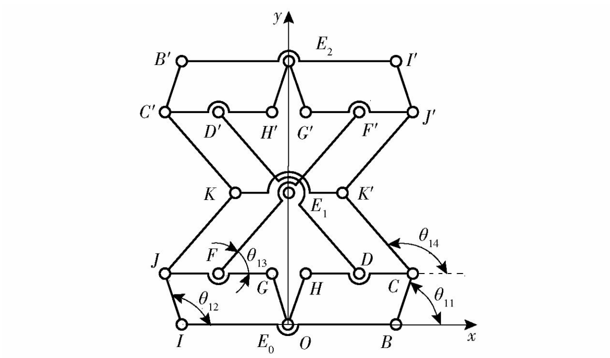


图 4 二维移动放缩单元运动建模

Fig. 4 Kinematic modeling of two-dimensional pantograph unit

针对闭环运动链 $E_0HDE_1E_0$，列写闭环矢量方程

$$\boldsymbol{E_0H}+\boldsymbol{HD}+\boldsymbol{DE}_1=\boldsymbol{E_0E}_1$$

即

$$\begin{cases} l_1\cos\theta_{11}+0.5l_2+l_3\cos\theta_{14}=x_{E_1} \\ l_1\sin\theta_{11}+l_3\sin\theta_{14}=y_{E_1} \end{cases} \tag{2}$$

联立式(1)、(2)，可将 θ_{13}、θ_{14} 分别表示为 θ_{11} 和 θ_{12} 的函数

$$\begin{cases} \theta_{13}=2\arctan(((\cos\theta_{11}+1)(\cos\theta_{12}+1)((((2l_1^2\cos(\theta_{11}-\theta_{12})-2l_1^2-l_2^2+4l_3^2-2l_1l_2\cos\theta_{11}+2l_1l_2\cos\theta_{12})\cdot \\ \quad (l_2^2+4l_1^2\tan(\theta_{11}/2)^2+4l_1^2\tan(\theta_{12}/2)^2+l_2^2\tan(\theta_{11}/2)^2+l_2^2\tan(\theta_{12}/2)^2+l_2^2\tan(\theta_{11}/2)^2\tan(\theta_{12}/2)^2- \\ \quad 8l_1^2\tan(\theta_{11}/2)\tan(\theta_{12}/2)-4l_1l_2\tan(\theta_{11}/2)^2+4l_1l_2\tan(\theta_{12}/2)^2))/((\cos\theta_{11}+1)(\cos\theta_{12}+1)))^{1/2}+ \\ \quad 2l_1l_3\tan(\theta_{11}/2)-2l_1l_3\tan(\theta_{12}/2)+2l_1l_3\tan(\theta_{11}/2)\tan(\theta_{12}/2)^2-2l_1l_3\tan(\theta_{11}/2)^2\tan(\theta_{12}/2)))/ \\ \quad (2(2l_2l_3-2l_1^2\cos(\theta_{11}-\theta_{12})+2l_1^2+l_2^2+2l_1l_2\cos\theta_{11}-2l_1l_2\cos\theta_{12}+2l_1l_3\cos\theta_{11}-2l_1l_3\cos\theta_{12}))) \\ \theta_{14}=2\arctan(((\cos\theta_{11}+1)(\cos\theta_{12}+1)((((2l_1^2\cos(\theta_{11}-\theta_{12})-2l_1^2-l_2^2+4l_3^2-2l_1l_2\cos\theta_{11}+2l_1l_2\cos\theta_{12})\cdot \\ \quad (l_2^2+4l_1^2\tan(\theta_{11}/2)^2+4l_1^2\tan(\theta_{12}/2)^2+l_2^2\tan(\theta_{11}/2)^2+l_2^2\tan(\theta_{12}/2)^2+l_2^2\tan(\theta_{11}/2)^2\tan(\theta_{12}/2)^2- \\ \quad 8l_1^2\tan(\theta_{11}/2)\tan(\theta_{12}/2)-4l_1l_2\tan(\theta_{11}/2)^2+4l_1l_2\tan(\theta_{12}/2)^2))/((\cos\theta_{11}+1)(\cos\theta_{12}+1)))^{1/2}+ \\ \quad 2l_1l_3\tan(\theta_{11}/2)-2l_1l_3\tan(\theta_{12}/2)+2l_1l_3\tan(\theta_{11}/2)\tan(\theta_{12}/2)^2-2l_1l_3\tan(\theta_{11}/2)^2\tan(\theta_{12}/2)))/ \\ \quad (2(2l_1^2\cos(\theta_{11}-\theta_{12})+2l_2l_3-2l_1^2-l_2^2-2l_1l_2\cos\theta_{11}+2l_1l_2\cos\theta_{12}+2l_1l_3\cos\theta_{11}-2l_1l_3\cos\theta_{12}))) \end{cases} \tag{3}$$

因此，在已知 θ_{11} 和 θ_{12} 时，可求得 E_1 点坐标为

$$\begin{cases} x_{E_1}=l_1\cos\theta_{12}-0.5l_2+l_3\cos\theta_{13} \\ y_{E_1}=l_1\sin\theta_{12}+l_3\sin\theta_{13} \end{cases} \tag{4}$$

对于由 n 个模块（$n\geqslant 2$）组成的平面二维移动放缩支链，根据机构的中心对称性，可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_0=2\boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_1=2\boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{E}_4+\boldsymbol{E}_2=2\boldsymbol{E}_3 \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{E}_{2k-1}+\boldsymbol{E}_{2k-3}=2\boldsymbol{E}_{2k-2} \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{E}_{2n}+\boldsymbol{E}_{2n-2}=2\boldsymbol{E}_{2n-1} \end{cases} \tag{5}$$

由于 $\boldsymbol{E}_0=(0,0)$，代入式(5)可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_2=2\boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_3=3\boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_4=4\boldsymbol{E}_1 \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{E}_{2k-1}=(2k-1)\boldsymbol{E}_1 \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{E}_{2n}=2n\boldsymbol{E}_1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_{E_{2n}}=2nx_{E_1} \\ y_{E_{2n}}=2ny_{E_1} \end{cases} \tag{6}$$

由此可知，对于 n 层平面二维运动放缩机构，第 n 层中 E_{2n} 点可将 E_1 点处的运动轨迹放大 $2n$ 倍。如图 5 所示，对于 3 层平面二维运动放缩机构，第 3 层

中 E_6点可将 E_1点处的运动轨迹放大 6 倍。

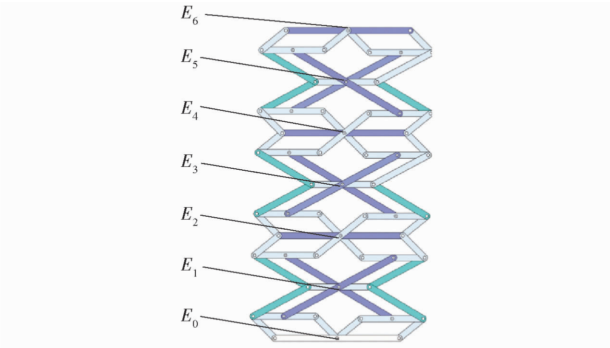


图 5　3 层平面二维移动放缩机构

Fig. 5　Two-dimensional pantograph mechanism consisted of 3-layer modules

2　3T1R 并联机构及其拓扑特性分析

2.1　机构设计

本文提出的 3T1R 并联机构由动平台 1、静平台 0 通过 4 条结构相同的平面二维移动放缩支链连接而成，如图 6、7 所示，其中，各支链与动平台 1 相连的 4 个转动副 R_{10}、R_{20}、R_{30}、R_{40} 的轴线与动平台平面垂直；各支链与静平台 0 相连的转动副 R_{11}、R_{21}、R_{31}、R_{41} 为驱动副，其轴线共面且 $R_{11} \parallel R_{31} \perp R_{21} \parallel R_{41}$。

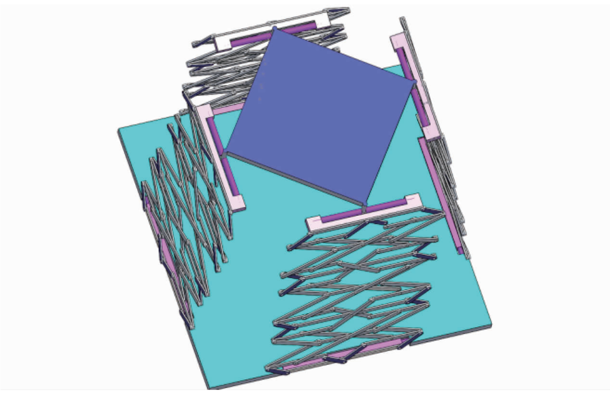


图 6　3T1R 并联机构三维模型

Fig. 6　3D modeling of 3T1R PM

2.2　机构的拓扑特性分析

2.2.1　机构的方位特征集和自由度

选定动平台 1 上任意一点 O' 为基点。确定支链末端构件的方位特征集为

$$M_{bi} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel R_{i1}, R_{i0}) \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

第Ⅰ、Ⅱ支链组成第 1 回路，其第 1 个独立回路位移方程数 ξ_{L1} 为

$$\xi_{L1} = \dim.\{M_{b1} \cup M_{b2}\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right\} = 6$$

第Ⅰ、Ⅱ支链组成的第 1 子并联机构的自由度和方位特征集为

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{1} \xi_{Lj} = 10 - 6 = 4$$

$$M_{pa(1-2)} = M_{b1} \cap M_{b2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{10}) \end{bmatrix}$$

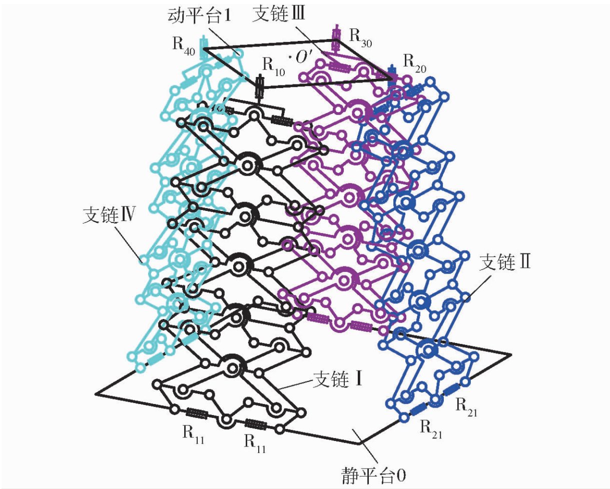


图 7　3T1R 原始机构

Fig. 7　Original 3T1R PM

由第 1 子并联机构及第Ⅲ支链组成第 2 个回路，其第 2 个独立回路位移方程数 ξ_{L2} 为

$$\xi_{L2} = \dim.\{M_{pa(1-2)} \cup M_{b3}\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{11}, R_{10})) \end{bmatrix}\right\} = 5$$

第 1 子并联机构及第Ⅲ支链组成的第 2 子并联机构的自由度和方位特征集为

$$F_{(1-3)} = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{2} \xi_{Lj} = 15 - 6 - 5 = 4$$

$$M_{pa(1-3)} = M_{pa(1-2)} \cap M_{b3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{10}) \end{bmatrix}$$

由第 2 子并联机构及第Ⅳ支链组成第 3 个回路，其第 3 个独立回路位移方程数 ξ_{L3} 为

$$\xi_{L3} = \dim.\{M_{pa(1-3)} \cup M_{b4}\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{11}, R_{10})) \end{bmatrix}\right\} = 5$$

机构自由度为

$$F = F_{(1-4)} = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{3} \xi_{Lj} = 20 - 6 - 5 - 5 = 4$$

机构动平台的方位特征集为

$$M_{pa(1-4)} = M_{pa(1-3)} \cap M_{b4} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{10}) \end{bmatrix}$$

机构的过约束度 N_{ov} 为

$$N_{ov} = 6v - \xi = 6v + F - \sum_{i=1}^{m} f_i = 18 + 4 - 20 = 2$$

因此，取静平台 0 上的 4 个转动副 R_{11}、R_{21}、

R_{31}、R_{41}为驱动副时,动平台1具有3个移动和1个绕其法线方向上的转动输出。

2.2.2 机构的耦合度计算

第1个回路的约束度 Δ_1 为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 10 - 2 - 6 = 2$$

第2个回路的约束度 Δ_2 为

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 5 - 1 - 5 = -1$$

第3个回路的约束度 Δ_3 为

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L3} = 5 - 1 - 5 = -1$$

耦合度 k 为

$$k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v} |\Delta_j| = \frac{1}{2}(|2| + |-1| + |-1|) = 2$$

由于该机构的耦合度 $k=2$,机构位置正解比较复杂,但可通过降耦设计,在保持机构的基本功能(方位特征集和自由度)不变的前提下,使机构的正向运动学和逆向运动学方便求解。

3 3T1R 降耦机构的设计

根据第2.2节中对该机构进行拓扑特性分析时,发现第1回路的方位特征集和自由度与整个机构的方位特征集、自由度相同,即 $M_{pa(1-2)} = M_{pa(1-4)}$、$F_{(1-2)} = F_{(1-4)}$,因此当机构只包含支链Ⅰ和支链Ⅱ时,可得到降耦机构如图8所示。

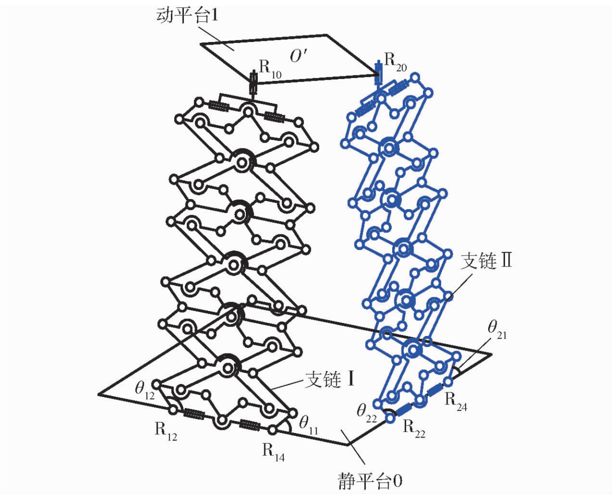


图8 3T1R 并联机构的降耦设计

Fig. 8 Coupling-reducing design of 3T1R PM

3.1 降耦机构的 POC 集和自由度

选定动平台1上任意一点 O' 为基点。确定支链末端构件的方位特征集

$$M_{bi} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel R_{i1}, R_{i0}) \end{bmatrix} \quad (i=1,2)$$

第Ⅰ、Ⅱ支链组成唯一回路,其回路位移方程数 ξ_{L1} 为

$$\xi_{L1} = \dim.\{M_{b1} \cup M_{b2}\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right\} = 6$$

机构自由度为

$$F = F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{1} \xi_{Lj} = 10 - 6 = 4$$

机构动平台的方位特征集为

$$M_{pa(1-2)} = M_{b1} \cap M_{b2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{10}) \end{bmatrix}$$

机构的过约束度 N_{ov} 为

$$N_{ov} = 6v - \xi = 6v + F - \sum_{i=1}^{m} f_i = 6 + 4 - 10 = 0$$

因此,取转动副 R_{12}、R_{14}、R_{22}、R_{24} 为驱动副时,动平台1具有3个移动和1个绕其法线方向上的转动输出。

3.2 降耦机构的耦合度计算

回路的约束度 Δ_1 为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 10 - 2 - 6 = 2$$

耦合度 k 为

$$k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v} |\Delta_j| = \frac{1}{2}(|2|) = 1$$

由此可知,通过减少支链的数目,并改变其驱动副,实现了机构的基本功能(方位特征集和自由度)不变,但机构的耦合度降低为1,此时,机构的位置正解可由基于序 SOC 的一维搜索法求得[14]。

4 降耦机构的位置分析

4.1 位置正解

4.1.1 坐标系建立及符号标注

机构位置分析求解模型如图9所示,静平台为边长为 $2a$ 的正方形,动平台为边长为 b 的正方形,4个驱动分别为 R_{12}、R_{14}、R_{22}、R_{24}。静坐标系 $OXYZ$ 建立在静平台的中心点 O 处,X 轴和 Y 轴分别与 R_{21}、R_{11} 轴线平行,Z 轴由右手法则确定;而动坐标系 $puvw$ 位于动平台的中心点 p,pR_{10} 为 u 轴、pR_{20} 为 v 轴,w 轴由右手法则确定。机构的主要结构参数为:在各支链中,R_{14}、R_{12}、R_{24}、R_{22} 的转角 θ_{11}、θ_{12}、θ_{21}、θ_{22} 为输入角,α_1、α_2 为支链Ⅰ、Ⅱ的转角,E_6 点到动平台的直线距离为 l_4,动平台绕 w 轴方向的转角为姿态角 γ,如图10所示。

该机构的位置正解可描述为:已知输入角 θ_{11}、θ_{12}、θ_{21}、θ_{22},求动平台中心的位置坐标 $p(x,y,z)$ 及姿态角 γ。

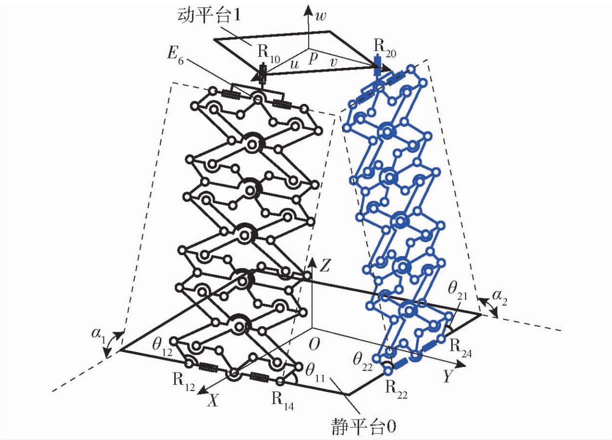


图 9　3T1R 并联机构的位置分析模型

Fig. 9　Model of position analysis in 3T1R coupling-reducing PM

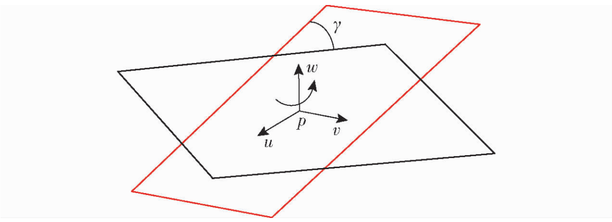


图 10　姿态角 γ 的测量

Fig. 10　Measurement of angle γ

4.1.2　SOC 上各运动副位置求解

由 SOC 中的分支链，可求得转动副 R_{10} 的位置坐标，再由矢量方程 $\boldsymbol{Op}=\boldsymbol{OR}_{10}-\boldsymbol{pR}_{10}$ 求得 p 点的坐标为

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+6(l_1\sin\theta_{11}\cos\alpha_1+l_3\sin\theta_{14}\cos\alpha_1)-\frac{\sqrt{2}}{2}b\cos\gamma\\6(l_1\cos\theta_{11}+0.5l_2+l_3\cos\theta_{14})-\frac{\sqrt{2}}{2}b\sin\gamma\\6(l_1\sin\theta_{11}\sin\alpha_1+l_3\sin\theta_{14}\sin\alpha_1)+l_4\end{bmatrix}\tag{7}$$

同理，由 SOC 的另一分支链，求得转动副 R_{20} 的位置坐标，再由矢量方程 $\boldsymbol{Op}=\boldsymbol{OR}_{20}-\boldsymbol{pR}_{20}$ 求得 p 点的坐标为

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6(-l_1\cos\theta_{21}-0.5l_2-l_3\cos\theta_{24})+\frac{\sqrt{2}}{2}b\sin\gamma\\a+6(l_1\sin\theta_{21}\cos\alpha_2+l_3\sin\theta_{24}\cos\alpha_2)-\frac{\sqrt{2}}{2}b\cos\gamma\\6(l_1\sin\theta_{21}\sin\alpha_2+l_3\sin\theta_{24}\sin\alpha_2)+l_4\end{bmatrix}\tag{8}$$

由式(7)和式(8)可得

$$a+6A_1-\frac{\sqrt{2}}{2}b\cos\gamma=6A_2+\frac{\sqrt{2}}{2}b\sin\gamma\tag{9}$$

$$6B_1-\frac{\sqrt{2}}{2}b\sin\gamma=a+6B_2-\frac{\sqrt{2}}{2}b\cos\gamma\tag{10}$$

$$6C_1+l_4=6C_2+l_4\tag{11}$$

其中
$$A_1=l_1\sin\theta_{11}\cos\alpha_1+l_3\sin\theta_{14}\cos\alpha_1$$
$$A_2=-l_1\cos\theta_{21}-0.5l_2-l_3\cos\theta_{24}$$
$$B_1=l_1\cos\theta_{11}+0.5l_2+l_3\cos\theta_{14}$$
$$B_2=l_1\sin\theta_{21}\cos\alpha_2+l_3\sin\theta_{24}\cos\alpha_2$$
$$C_1=l_1\sin\theta_{11}\sin\alpha_1+l_3\sin\theta_{14}\sin\alpha_1$$
$$C_2=l_1\sin\theta_{21}\sin\alpha_2+l_3\sin\theta_{24}\sin\alpha_2$$

由式(11)可得

$$\alpha_2=\arcsin\frac{\sin\alpha_1(l_1\sin\theta_{11}+l_3\sin\theta_{14})}{l_1\sin\theta_{21}+l_3\sin\theta_{24}}\tag{12}$$

设定转角 α_1 为虚拟变量 α_1^*，则由式(12)可知，转角 α_2^* 为 α_1^* 的函数，即

$$\alpha_2^*=\arcsin\frac{\sin\alpha_1^*(l_1\sin\theta_{11}+l_3\sin\theta_{14})}{l_1\sin\theta_{21}+l_3\sin\theta_{24}}$$

由式(9)和式(10)联立并消去 γ 后可得

$$A^2+B^2=b^2\tag{13}$$

其中
$$A=a+6A_1-6A_2$$
$$B=6B_1-a-6B_2$$

由此可建立目标函数

$$f(\alpha_1^*)=A^2+B^2-b^2\tag{14}$$

通过改变 α_1^*，使 $f(\alpha_1^*)=0$；再将满足 $f(\alpha_1^*)=0$ 的真实值 α_1 代入式(9)或式(10)，即可求得动平台姿态角 γ，将 α_1 和 γ 代入式(7)或式(8)即可得到动平台 1 上 p 点的位置坐标。

4.2　位置反解

该机构的位置反解可描述为：已知动平台中心的位置 $p(x, y, z)$ 及姿态角 γ，求输入转角 θ_{11}、θ_{12}、θ_{21}、θ_{22}。

4.2.1　输入角 θ_{11} 和 θ_{12} 求解

由式(7)中 x、z 坐标，可知

$$6\sin\alpha_1(l_1\sin\theta_{11}+l_3\sin\theta_{14})=z-l_4\tag{15}$$

$$6\cos\alpha_1(l_1\sin\theta_{11}+l_3\sin\theta_{14})=x+\frac{\sqrt{2}}{2}b\cos\gamma-a\tag{16}$$

将式(15)和式(16)联立可求得

$$\alpha_1=\arctan\frac{z-l_4}{x+\frac{\sqrt{2}}{2}b\cos\gamma-a}$$

由式(7)中 y、z 坐标，可得

$$6l_1\cos\theta_{14}=P_1-6l_1\cos\theta_{11}\tag{17}$$

$$6l_3\sin\theta_{14}=\frac{P_2}{\sin\alpha_1}-6l_1\sin\theta_{11}\tag{18}$$

其中　$P_1=y+\frac{\sqrt{2}}{2}b\sin\gamma-3l_2$　　$P_2=z-l_4$

将式(17)和式(18)联立消去 θ_{14}，有

$$P_3\sin\theta_{11}+P_4\cos\theta_{11}+P_5=0 \tag{19}$$

其中 $P_3=\dfrac{12P_2l_1}{\sin\alpha_1}\qquad P_4=12P_1l_1$

$$P_5=36l_3^2-36l_1^2-p_1^2-\frac{p_2^2}{\sin^2\alpha_1}$$

令 $$w_1=\tan\frac{\theta_{11}}{2}$$

可得方程式(19)的解为

$$w_1=\frac{-P_3\pm\sqrt{P_3^2+P_4^2-P_5^2}}{P_5-P_4} \tag{20}$$

将式(17)和式(18)联立消去 θ_{11},有

$$P_6\sin\theta_{14}+P_7\cos\theta_{14}+P_8=0 \tag{21}$$

其中 $P_6=-\dfrac{12P_2l_3}{\sin\alpha_1}\qquad P_7=-12P_1l_3$

$$P_8=36l_3^2-36l_1^2+p_1^2+\frac{p_2^2}{\sin^2\alpha_1}$$

令 $$w_2=\tan\frac{\theta_{14}}{2}$$

可得方程式(21)的解为

$$w_2=\frac{-P_6\pm\sqrt{P_6^2+P_7^2-P_8^2}}{P_8-P_7} \tag{22}$$

根据式(20)、式(22)和式(3)可求解得到输入角 θ_{11}、θ_{12}。

4.2.2 输入角 θ_{21} 和 θ_{22} 求解

由式(8)中 y、z 坐标,可知

$$6\sin\alpha_2(l_1\sin\theta_{21}+l_3\sin\theta_{24})=z-l_4 \tag{23}$$

$$6\cos\alpha_2(l_1\sin\theta_{21}+l_3\sin\theta_{24})=y+\frac{\sqrt{2}}{2}b\cos\gamma-a \tag{24}$$

将式(23)和式(24)联立可求得

$$\alpha_2=\arctan\frac{z-l_4}{y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\cos\gamma-a}$$

由式(8)中 x、z 坐标,可得

$$-6l_3\cos\theta_{24}=Q_1+6l_1\cos\theta_{21} \tag{25}$$

$$6l_3\sin\theta_{24}=\frac{Q_2}{\sin\alpha_2}-6l_1\sin\theta_{21} \tag{26}$$

其中 $Q_1=x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\sin\gamma+3l_2\qquad Q_2=z-l_4$

将式(25)和式(26)联立消去 θ_{24},有

$$Q_3\sin\theta_{21}+Q_4\cos\theta_{21}+Q_5=0 \tag{27}$$

其中 $Q_3=-\dfrac{12Q_2l_1}{\sin\alpha_2}\qquad Q_4=12Q_1l_1$

$$Q_5=36l_1^2-36l_3^2+Q_1^2+\frac{Q_2^2}{\sin^2\alpha_1}$$

令 $$u_1=\tan\frac{\theta_{21}}{2}$$

可得方程式(27)的解为

$$u_1=\frac{-Q_3\pm\sqrt{Q_3^2+Q_4^2-Q_5^2}}{Q_5-Q_4} \tag{28}$$

将式(25)和式(26)联立消去 θ_{21},有

$$Q_6\sin\theta_{24}+Q_7\cos\theta_{24}+Q_8=0 \tag{29}$$

其中 $Q_6=-\dfrac{12Q_2l_3}{\sin\alpha_2}\qquad Q_7=12Q_1l_3$

$$Q_8=36l_3^2-36l_1^2+Q_1^2+\frac{Q_2^2}{\sin^2\alpha_2}$$

令 $$u_2=\tan\frac{\theta_{24}}{2}$$

可得方程式(29)的解为

$$u_2=\frac{-Q_6\pm\sqrt{Q_6^2+Q_7^2-Q_8^2}}{Q_8-Q_7} \tag{30}$$

根据式(28)、(30)和式(3)可求解得到输入角 θ_{21}、θ_{22}。

4.3 位置正反解实例验算

4.3.1 正解算例

设置该并联机构的结构参数为:$l_1=0.2$ m,$l_2=0.4$ m,$l_3=0.4$ m,$l_4=0.13$ m,$a=0.82$ m,$b=1$ m;输入角为 $\theta_{11}=15.24°$,$\theta_{12}=94.91°$,$\theta_{21}=31.04°$,$\theta_{22}=131.03°$。动平台始终在静平台上方运动,虚拟变量 α_1^* 的搜索范围为 $0\sim\pi$,根据式(7)~(14),求得其中一组实数位置解如表1所示。

表1 机构位姿正解数值

Tab.1 Numerical forward solutions of PM

参数	x/m	y/m	z/m	γ/(°)
数值	−0.868 9	1.547 0	1.773 6	−71.711 4

4.3.2 反解算例

将表1中位置正解结果代入式(20)、(22)、(28)、(30)和式(3),得到的位置反解结果为 $\theta_{11}=15.240\,6°$,$\theta_{12}=94.91\,0°$,$\theta_{21}=31.035°$,$\theta_{22}=131.03°$。与给定的4个输入角一致,从而验证了所建机构正反解模型的正确性。

5 降耦机构的工作空间和转动能力分析

5.1 工作空间分析

工作空间是衡量并联机器人性能的一个重要指标,本文采用极限边界搜索法对该3T1R降耦机构进行工作空间分析。首先设定其工作空间的搜索范围,基于导出的位置反解公式,求解出该搜索范围内每一点所对应的杆长和运动副转角,筛选出所有满足杆长约束和运动副转角约束条件的点,若其中的任一值超出了其允许值,则对应的点在工作空间外,

表示机构达不到此时的位置，反之，即可判断该点是在工作空间内，这些符合条件的点组成的三维立体图，即为该机构能够达到的工作空间。

机构的结构参数已在 4.3 节给出。为了找到空间内所有满足要求的点，首先确定其三维搜索范围：$0\leqslant Z\leqslant 4$ m、$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$、$0\leqslant\rho\leqslant 5$ m（θ、ρ 分别为柱坐标系中搜索角度和搜索半径）；约束条件为 θ_{11}、θ_{12}、θ_{21}、θ_{22} 存在实数解；通过 Matlab 数值分析，取沿 Z 方向的步长 $\Delta Z=0.1$ m，搜索半径步长 $\Delta\rho=0.1$ m，旋转角步长 $\Delta\theta=\pi/36$，姿态角 γ 在 0°～360°之间变化。可求得机构的工作空间三维立体图如图 11 所示，$X-Y$ 的截面图如图 12 所示。

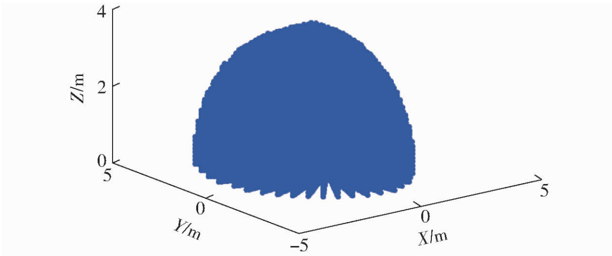


图 11　降耦机构的三维工作空间

Fig. 11　Three-dimensional workspace of coupling-reducing PM

从图 11、12 可以看出，该 3T1R 机构的工作空间连续，随着 Z 的增加，机构的工作空间 $X-Y$ 的截面积逐渐减小，但图形更加规则。

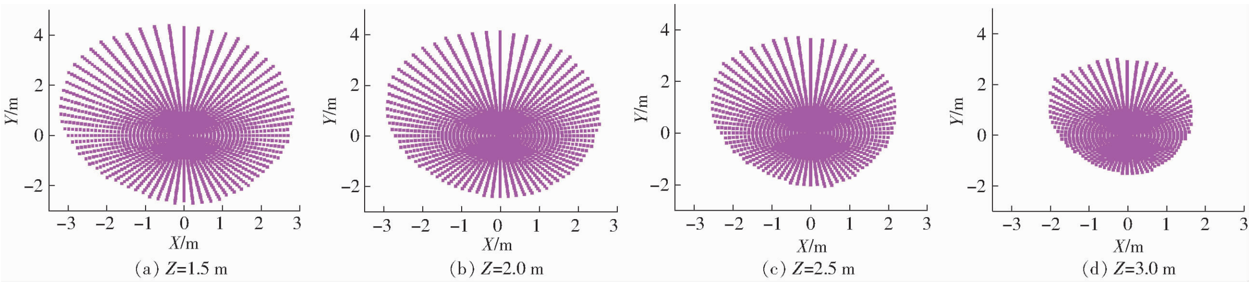


图 12　工作空间的 $X-Y$ 截面图

Fig. 12　$X-Y$ cross-sectional views of workspace

5.2　转动能力分析

动平台的转动能力即为末端执行器在工作区域内的转角范围，是衡量并联机构输出转动灵活性能的一个重要指标。在分析其转动能力时同样采用极限边界搜索法，基于导出的位置反解公式，通过固定高度 Z 处的 $X-Y$ 截面来分析该机构动平台的转动能力[14]。通过改变搜索半径 ρ 以及搜索角 θ，分别计算动平台在此 $X-Y$ 截面内转角的最大值 $\gamma_{\max}$ 和最小值 $\gamma_{\min}$，用于评价机构在该截面上的转动能力。由此，在得到降耦机构工作空间的基础上，可进一步研究其在不同 $X-Y$ 截面上的转动能力，即动平台在不同高度情况下，输出转角的最大值 $\gamma_{\max}$ 和最小值 $\gamma_{\min}$ 的分布规律，如图 13 所示。

由图 13 可以看出，动平台转动能力即输出转角的最大值 $\gamma_{\max}$ 和最小值 $\gamma_{\min}$ 的分布规律，在某些高度条件下，可分别达到 180°和 －180°。由此可得，当机构动平台中心位置 p 为工作空间内某一特定点时，若对应的动平台输出转角最大值 $\gamma_{\max}=180°$，且输出转角最小值 $\gamma_{\min}=-180°$，则称动平台在该点处具有整周回转能力，满足上述条件的点的集合即为机构具有整周回转能力的工作空间。

在对降耦机构进行转动能力分析的基础上，可进一步筛选得到不同高度下机构具有整周回转能力的工作空间，如表 2 所示。图 14 为动平台中心位置 $p(x,y,z)=(0.812$ m$,1.016$ m$,2$ m$)$ 时，对应其整周回转过程的示意图。

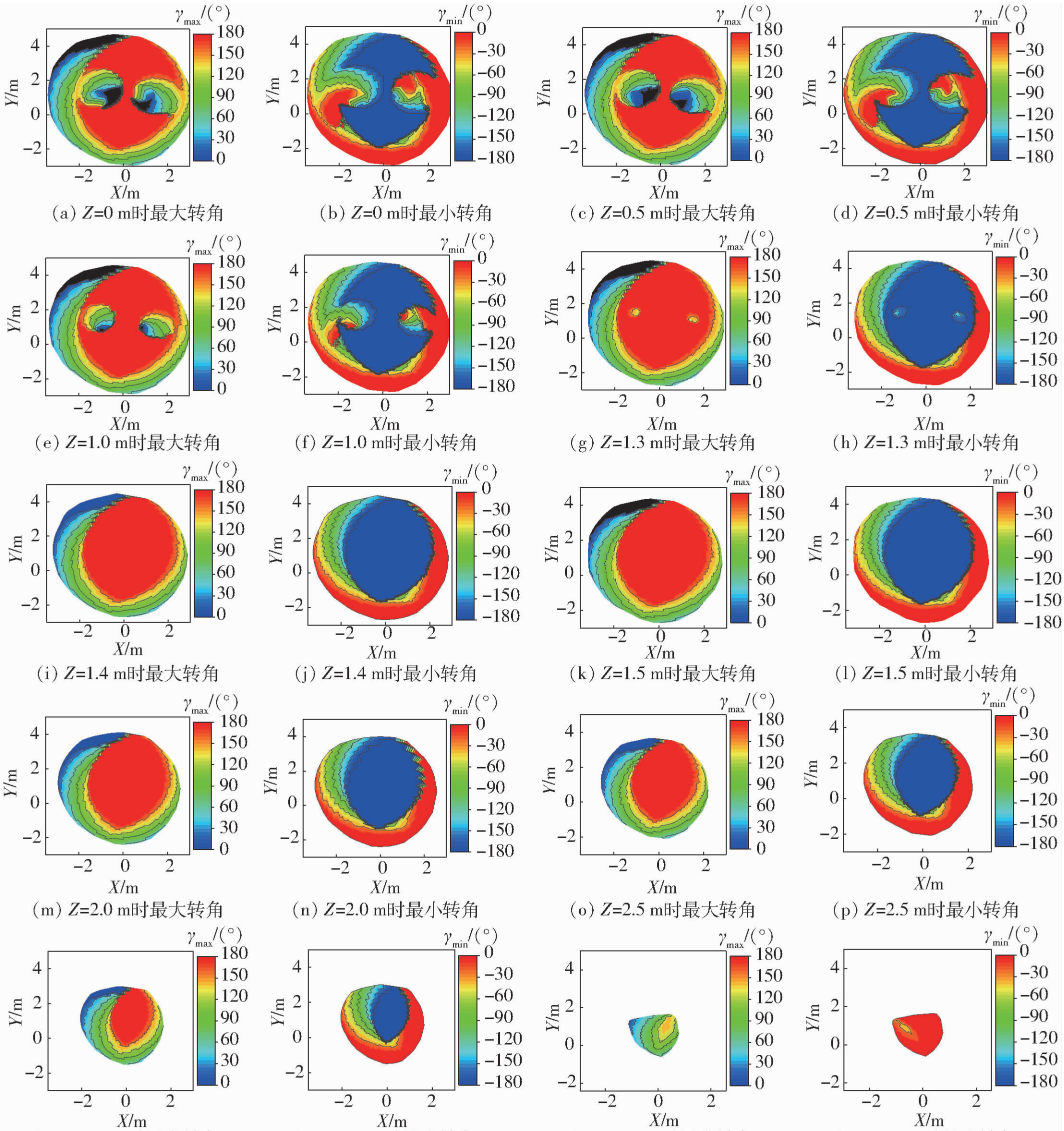
由表 2 可以看出，当 $Z\in[0,3.4$ m$]$ 时机构均具有整周回转能力，其中 $Z\in[0,1.4$ m$)$ 时，机构具有整周回转能力的工作空间的截面是复连通点集，定义为Ⅰ型工作空间；$Z\in[1.4$ m$,3.4$ m$]$ 时，机构具有整周回转能力的工作空间的截面是单连通点集，定义为Ⅱ型工作空间。在Ⅱ型工作空间内，动平台的运动轨迹规划和姿态调整灵活简便。

为了更直观地评价机构在不同 $X-Y$ 截面上工作空间的大小，需要求解对应的截面积。但是若截面形状是不规则图形，其面积就无法使用常规的几何图形面积计算公式进行求解，因此采用蒙特卡洛方法来计算工作空间内不同高度 Z 下 $X-Y$ 截面的面积。在上文所述边界搜索法中，其最大搜索边界是半径为 5 m 的圆，因此选取边长为 10 m 的正方形为边界，可使机构工作空间面积均在该正方形内；当搜索点符合均匀分布时，落入工作面积内部的点的数量，与工作面积所占正方形面积的比例成正比。

假设在面积为 S 的正方形内搜索点数为 N，落入待求工作空间面积内部的点数为 n，则该工作面积 s 可表示为

$$s=S\frac{n}{N}\tag{31}$$

由式(31)可求得，在 Z 取不同值时机构的工作空间的截面积和机构具有整周回转能力的工作空间



(a) Z=0 m时最大转角 (b) Z=0 m时最小转角 (c) Z=0.5 m时最大转角 (d) Z=0.5 m时最小转角

(e) Z=1.0 m时最大转角 (f) Z=1.0 m时最小转角 (g) Z=1.3 m时最大转角 (h) Z=1.3 m时最小转角

(i) Z=1.4 m时最大转角 (j) Z=1.4 m时最小转角 (k) Z=1.5 m时最大转角 (l) Z=1.5 m时最小转角

(m) Z=2.0 m时最大转角 (n) Z=2.0 m时最小转角 (o) Z=2.5 m时最大转角 (p) Z=2.5 m时最小转角

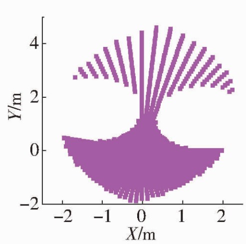
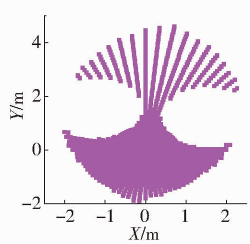
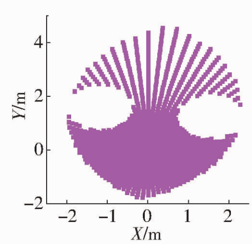
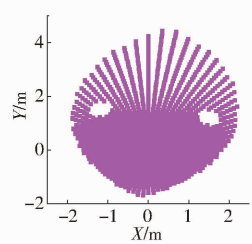
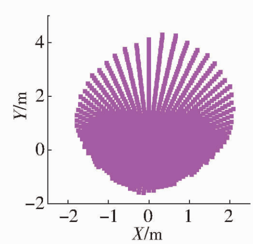
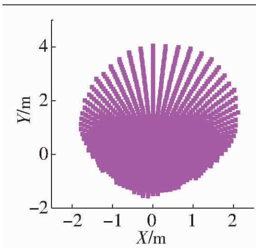
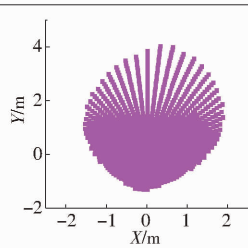
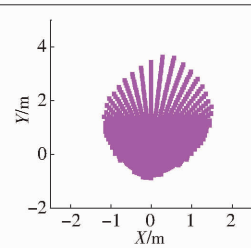
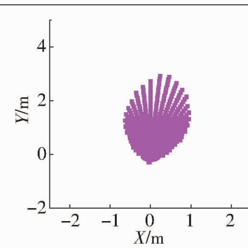
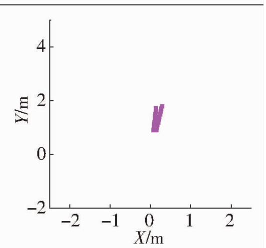
(q) Z=3.0 m时最大转角 (r) Z=3.0 m时最小转角 (s) Z=3.5 m时最大转角 (t) Z=3.5 m时最小转角

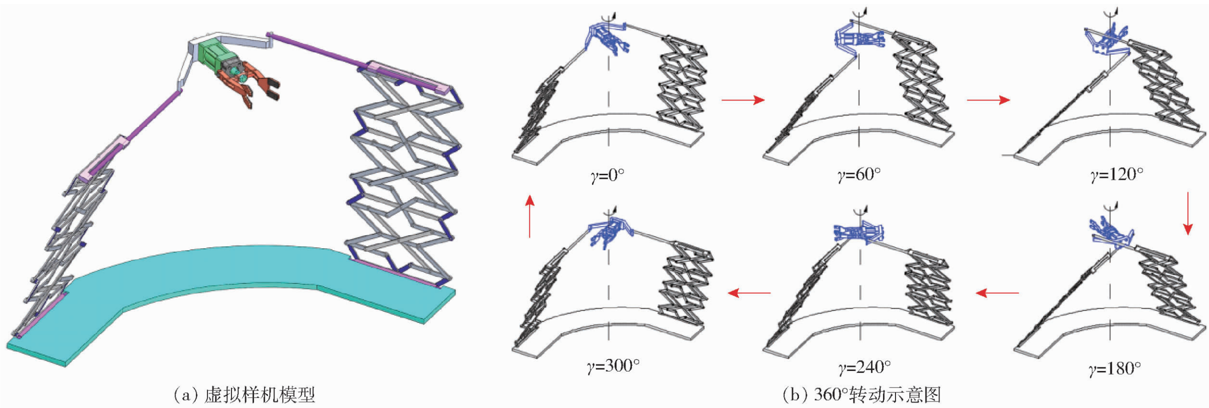
图 13 不同高度条件下降耦机构的转动能力

Fig. 13 Rotational capacity of coupling-reducing PM at different heights

表 2 具有整周回转能力的工作空间 $X-Y$ 截面

Tab. 2 $X-Y$ cross-sectional views of workspace with full rotational capability

Z=0 m	Z=0.5 m	Z=1.0 m	Z=1.3 m	Z=1.4 m
				
Z=1.5 m	**Z=2.0 m**	**Z=2.5 m**	**Z=3.0 m**	**Z=3.4 m**
				



(a) 虚拟样机模型　　(b) 360°转动示意图

图 14　动平台中心位置 $p(x,y,z) = (0.812\ \mathrm{m}, 1.016\ \mathrm{m}, 2\ \mathrm{m})$ 时的整周回转过程示意图

Fig. 14　Rotational capacity of moving platform with its geometric center $p(x,y,z) = (0.812\ \mathrm{m}, 1.016\ \mathrm{m}, 2\ \mathrm{m})$

的截面积，如图 15 所示。可以看出，机构的工作空间的截面积随着 Z 的增大而减小，当 Z 取值为 3.7 m 时，工作空间的截面积为 0，即动平台沿 Z 轴方向移动的最大高度为 3.7 m。此外，机构具有整周回转能力的工作空间的截面积随着 Z 的增大先增大后减小，且当 Z 取值为 1.4 m 时达到最大，为 17.336 m^2，当 Z 取值为 3.5 m 时，机构不具备整周回转能力。

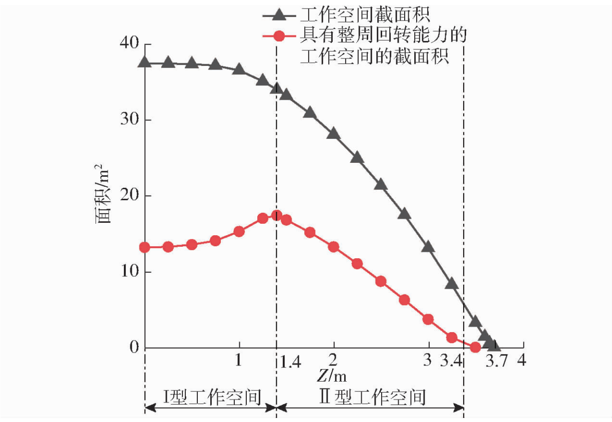


图 15　$X-Y$ 截面积变化曲线

Fig. 15　Changing curves of $X-Y$ cross-sectional area

6　结论

(1) 提出了一种二维移动放缩单元，经模块化组合与扩展后，构造了一种新型平面二维移动放缩机构，将该放缩机构作为支链，设计得到一种新型 4 支链3T1R 并联机构，分析了该并联机构的拓扑结构特性，求得机构的耦合度为 2，位置正解求解比较复杂。

(2) 对 4 支链 3T1R 并联机构进行降耦设计，在保证基本功能（方位特征集和自由度）不变的情况下，将机构耦合度降为 1，使其位置正解求解得到简化。

(3) 采用基于序单开链法的位置正解求解原理，建立了降耦机构的正解方程，采用一维搜索法求得其数值解，并通过数值解验证了正反解方程的正确性。

(4) 基于机构的位置反解公式，分析了降耦机构的工作空间和转动能力，结果表明：该并联机构的工作空间大，且具有连续性；动平台转动能力强，且在一定工作空间范围内具有整周回转能力；在转动能力分析的基础上，筛选得到了不同高度下机构具有整周回转能力的工作空间，将其分为 Ⅰ 型工作空间和 Ⅱ 型工作空间，在 Ⅱ 型工作空间内，动平台的运动轨迹规划和姿态调整灵活、简便。

(5) 基于蒙特卡洛方法研究了工作空间截面积随 Z 的变化规律，结果表明：机构的工作空间的截面积随着 Z 的增大而减小，动平台沿 Z 轴方向移动的最大高度为 3.7 m。机构具有整周回转能力的工作空间的截面积随着 Z 的增大先增大后减小，且当 Z 取值为 1.4 m 时达到最大，当 Z 取值为 3.5 m 时，机构不具备整周回转能力。该方法对不同结构参数的同类型机构均适用。

参　考　文　献

[1]　PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4-DOF parallel robots [C] // Proceedings of the 1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 1999: 508 – 513.

[2]　KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4: a new parallel mechanism for scara motions [C] // Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2003: 1875 – 1880.

[3]　NABAT V, RODRIGUEZ M, COMPANY O, et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place [C] // Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005: 553 – 558.

[4]　KRUT S, COMPANY O, NABAT V, et al. Heli4: a parallel robot for scara motions with a very compact travelling plate and a symmetrical design [C] // Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2006:

1656 – 1661.

[5] PIERROT F, NABAT V, COMPANY O, et al. Optimal design of a 4-DOF parallel manipulator: from academia to industry[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(2): 213 – 224.

[6] LI Y H, MA Y, LIU S T, et al. Integrated design of a 4-DOF high-speed pick-and-place parallel robot[J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 2014, 63(1): 185 – 188.

[7] 赵铁石，黄真. 一种新型四自由度并联平台机构及其位置分析[J]. 机械科学与技术，2000,19(6):927 – 929.
ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. A novel spatial four-DOF parallel mechanism and its position analysis[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2000, 19(6): 927 – 929. (in Chinese)

[8] 黄田，赵学满，梅江平，等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构:CN202528189U[P]. 2012 – 11 – 14.

[9] 刘辛军，谢福贵，王立平. 一种可实现SCARA运动的四自由度单动平台并联机构:CN102922513A[P]. 2013 – 02 – 13.

[10] 沈惠平，熊坤，孟庆梅，等. 并联机构运动解耦设计方法与应用研究[J/OL]. 农业机械学报，2016，47(6):348 – 356.
SHEN Huiping, XIONG Kun, MENG Qingmei, et al. Design methods for kinematic decoupled parallel mechanisms and its applications[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 348 – 356. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20160646&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2016.06.046. (in Chinese)

[11] 沈惠平，曾氢菲，李菊，等. 典型并联机构拓扑结构特征分析[J/OL]. 农业机械学报，2016，47(8):388 – 398.
SHEN Huiping, ZENG Qingfei, LI Ju, et al. Topological structure characteristics analysis for typical and practical parallel mechanisms[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(8): 388 – 398. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20160851&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2016.08.051. (in Chinese)

[12] 沈惠平，朱小蓉，尹洪波，等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报，2016，52(23):102 – 113.
SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Principle and design method for structure coupling-reducing of parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23): 102 – 113. (in Chinese)

[13] 沈惠平，尹洪贺，邵国为，等. 低耦合度3T1R并联操作手设计与运动学分析[J/OL]. 农业机械学报，2017，48(5):405 – 412.
SHEN Huiping, YIN Honghe, SHAO Guowei, et al. Design and kinematics analysis of a novel 3T1R parallel manipulator with lower coupling degree[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(5): 405 – 412. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20170552&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2017.05.052. (in Chinese)

[14] 沈惠平，张震，杨廷力，等. 3T1R并联机构结构降耦设计与运动学分析[J/OL]. 农业机械学报，2017，48(10):380 – 389，400.
SHEN Huiping, ZHANG Zhen, YANG Tingli, et al. Structure coupling-reducing design and kinematics analysis of 3T1R parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(10): 380 – 389, 400. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20171049&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2017.10.049. (in Chinese)

[15] 沈惠平，许可，杨廷力，等. 一种零耦合度且运动解耦的新型3T1R并联操作手2-(RPa3R)3R的设计及其运动学[J]. 机械工程学报，2019，55(5):53 – 64.
SHEN Huiping, XU Ke, YANG Tingli, et al. New 3T1R parallel manipulator 2-(RPa3R)3R with zero coupling degree and partial decoupling: design and kinematics[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(5): 53 – 64. (in Chinese)

[16] 沈惠平，吕蒙，朱小蓉，等. 一种单自由度3T1R并联机构的拓扑设计及其运动学[J]. 中国机械工程，2019，30(8):961 – 968.
SHEN Huiping, LÜ Meng, ZHU Xiaorong, et al. Topological design and kinematics of 3T1R PM with single degree of freedom[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(8): 961 – 968. (in Chinese)

[17] 杨廷力，刘安心，罗玉峰，等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社，2012.

[18] 杨廷力，刘安心，沈惠平，等. 基于方位特征方程的3T-1R并联机构的拓扑结构综合[J]. 机械工程学报，2017，53(21):54 – 64.
YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topological structural synthesis of 3T-1R parallel mechanism based on POC equations[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(21): 54 – 64. (in Chinese)

[19] 朱小蓉，宋月月，沈惠平，等. 基于POC方法的少自由度无过约束并联机构构型综合[J/OL]. 农业机械学报，2016，47(8):370 – 377.
ZHU Xiaorong, SONG Yueyue, SHEN Huiping, et al. Structural synthesis based on POC set for lower-mobility non-overconstrained parallel mechanisms[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(8): 370 – 377. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20160849&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2016.08.049. (in Chinese)

[20] 朱小蓉，胡旸，沈惠平，等. 3T1R并联机构降耦设计与分析[J/OL]. 农业机械学报，2018，49(12):393 – 401.
ZHU Xiaorong, HU Yang, SHEN Huiping, et al. Design and analysis of structure coupling reduction on novel 3T1R parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(12): 393 – 401. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20181247&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2018.12.047. (in Chinese)

[21] 贺磊盈，涂叶凯，叶伟，等. 一种可整周回转的新型3T1R并联机构运动学分析[J]. 机械工程学报，2018，54(11):151 – 160.
HE Leiying, TU Yekai, YE Wei, et al. Kinematics analysis of a novel 3T1R parallel manipulator with full rotational capability[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(11): 151 – 160. (in Chinese)