

基于几何代数的并联机构自由度自动化分析

杜 鹃 吴洪涛 杨小龙 李 耀

(南京航空航天大学机电学院, 南京 210016)

摘要: 基于 $R(3,3)$ 几何代数, 提出一种符号描述并联机构自由度的自动化算法。首先根据螺旋副之间的几何关系, 利用 $R(3,3)$ 几何代数能符号描述刚体运动的优势, 自动求解并联机构各支链螺旋系; 然后利用 $R(3,3)$ 几何代数能符号表示集合交集和并集的优势, 自动求解动平台运动空间, 该运动空间为所求并联机构自由度的符号表示式; 最后基于 C++ 软件平台对这种并联机构自由度自动化求解算法进行验证。使用 $R(3,3)$ 几何代数不仅能通过刚体运算法则得到支链螺旋系的符号表达, 同时可以直接求解动平台运动空间, 省去一般螺旋理论求互易螺旋需求解线性方程的过程, 算法简洁, 可以得到并联机构自由度的符号表达式, 从而实现自动化分析。

关键词: 并联机构; 几何代数; 自由度; 自动化

中图分类号: TP24 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2018)06-0400-08

Automatic Mobility Analysis of Parallel Mechanisms Based on Geometric Algebra

DU Juan WU Hongtao YANG Xiaolong LI Yao

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Analyzing mobility of parallel mechanisms digitally and automatically is the foundation of automatic type synthesis of parallel mechanisms. The mobility of parallel mechanisms was analyzed automatically based on $R(3,3)$ geometric algebra model, which was a R^6 geometric algebra model. Firstly, since any screw can be represented by a known screw with rigid body transformations, and the rigid body transformations can be derived by the geometric relationship between the two screws, when the twists of the first joints of the limbs were known, all twists of limbs of a parallel mechanism can be symbolically expressed and automatically computed by the geometric relationships between the joints of limbs. Then, since the motion of the limb was the union of all twists of joints and the motion of the moving platform was the intersection of all motion of limbs, by taking the advantages that the geometric algebra had the representations of the intersection set and union set, the motion of all limbs and the moving platform can also be symbolically expressed and automatically computed. Moreover, the symbolic expression of the motion of moving platform was exactly the mobility of the parallel mechanism. And the degree of a parallel mechanism was given by the blade of the symbolic expression. Finally, some examples were discussed in details by using the C++ coding to verify the proposed algorithm. The algorithm that analyzing the mobility of parallel mechanisms automatically based on geometric algebra did not need to compute the constraint twists of limbs and solve linear equations, which made this algorithm faster and more efficiency. This algorithm set the stage for automatic type synthesis of parallel mechanism.

Key words: parallel mechanisms; geometric algebra; mobility; automation

0 引言

机构自由度是指机构具有确定运动时必须给

定的独立运动参数的数目^[1]。自由度分析是机构应用的前提和基础。然而, 并联机构作为闭环运动链, 一般机构自由度计算采用的 G-K 公式很难得

收稿日期: 2017-12-06 修回日期: 2018-01-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(51375230)

作者简介: 杜鹃(1990—), 女, 博士生, 主要从事几何代数和机器人技术研究, E-mail: juan.dujf320@gmail.com

通信作者: 吴洪涛(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事机器人学及智能机器人和机械多体系统理论研究, E-mail: mehtwu@126.com

以正确应用。黄真等^[2-3]提出的基于约束螺旋理论的自由度分析方法和修正 G-K 公式是目前最通用也是最有效的并联机构自由度分析方法,能解决几乎所有并联机构的自由度问题,包括复杂过约束机构,如 Bennett 机构等^[4]。但是基于约束螺旋理论的自由度分析方法在求互易螺旋时需要求解线性方程组,虽然数值求解简单,却很难得到符号或解析表达式。文献[5-6]基于几何代数提出了一种新的自由度分析方法,得到了并联机构自由度的符号表达式。螺旋理论中互易螺旋的求解,几何代数中可以通过对偶的符号表达式来实现,该过程不要求解线性方程,只涉及几何代数框架下的加法和乘法。不仅如此,由于并联机构动平台的运动空间是各支链运动空间的交集,然而集合并没有交集运算法则,因此基于螺旋理论的自由度分析方法需要首先求解互易螺旋,即支链集合的补集,再通过对补集求并集的运算法则,间接得到动平台运动表达式。但是在几何代数框架下,集合的交集和并集均有直接的运算法则,即交集运算可以通过内积运算法则实现,而并集运算可以通过外积运算法则实现^[7]。因此基于几何代数的自由度分析方法能通过对支链运动直接求内积得到并联机构自由度,不需要通过求解补集,即约束螺旋间接得到动平台运动空间,减少自由度求解步骤,使运算更简洁。

但是,无论是基于螺旋理论还是几何代数的并联机构自由度分析方法主要是基于手工求解,难以满足快速分析成千上万机构自由度的需求。机构的构型创新是机械装备原始性创新的重要内容,构型综合是构型创新的有效手段^[8-9]。随着计算机技术的发展,建立基于计算机技术的数字化构型综合理论,进而实现机构概念创新设计的自动化、可视化、网络化和智能化是机构学研究的趋势。而并联机构自由度数字化、程序化、自动化分析是并联机构数字化结构综合的基础。曹文熬^[10]基于螺旋理论提出了一种空间并联机构自由度自动化分析算法,并成功应用于数字化结构综合中。该方法通过螺旋之间的垂直、平行等几何关系,在已知支链第一个运动螺旋的情况下,自动求解支链的所有螺旋,从而实现并联机构自由度自动化分析。文献[5-6]基于几何代数的自由度分析方法也可利用类似过程,得到自动化分析算法。但是这些方法都无法得到符号表达式,因为通过几何关系如垂直、平行等求解相邻螺旋仍然是一个线性方程求解过程。事实上,任意一个螺旋都可通过另一螺旋的旋转和平移运动得到,而几何代数的另一优势就是能符号描述几何元素的刚体运动。但是,文献[5-6]所用的 R(6,0)几何代

数空间,由于不是零向量空间,因而没有平移变换的符号表达式^[7],从而无法用符号描述运动螺旋间的几何关系,进而无法通过符号表达式实现并联机构自由度的自动化分析。

R(3,3)几何代数空间^[11-12]与 R(6,0)几何代数空间同为六维几何代数空间。R(3,3)不仅具有 R(6,0)的优势,还存在螺旋的符号表达式,从而可实现符号描述并联机构自由度,同时还能够符号描述平移和旋转运动。本文基于 R(3,3)几何代数空间提出一种并联机构自由度自动化分析算法。

1 R(3,3)几何代数

1.1 几何代数

几何代数又称为 Clifford 代数,由 CLIFFORD^[13]在 1876 年首次提出,随后 HESTENES^[14]将 Clifford 代数进行几何意义上的解释,使之更加完善。几何代数是一种完全不同于传统代数的计算框架,已被广泛应用到机器视觉^[15-16]、计算机图形学^[17]和机器人学^[18]等领域。

n 维几何代数空间表示该空间由 n 个正交基 e_1, e_2, \dots, e_n 组成。然而与欧几里得空间不同的是,几何代数空间中基的长度可以为正,可以为负,也可以为零。一般为

$$e_i^2 = \pm 1, 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

如果一个 n 维几何代数空间,有 p 个基为 $e_i^2 = 1$, q 个基为 $e_i^2 = -1$, r 个基为 $e_i^2 = 0$, 则用符号 R(p, q, r) 描述该几何代数空间。例如 R(3,3) 表示 6 维几何代数空间,其中 3 个基的长度为 1, 3 个基的长度为 -1, 没有长度为 0 的基。由不同基坐标构成的几何代数空间即使维度相同,也存在不同的几何元素和刚体运动符号表达式。

几何积是几何代数特有的乘积运算符。向量 \mathbf{a} 和向量 \mathbf{b} 的几何积定义为

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

其中 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 表示向量 \mathbf{a} 和向量 \mathbf{b} 的内积, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 表示向量 \mathbf{a} 和向量 \mathbf{b} 的外积。关于内积和外积,有以下运算法则

$$\begin{aligned} e_i e_i &= \pm 1, 0 & e_i \wedge e_i &= 0 \\ e_i e_j &= 0 & e_i \wedge e_j &= -e_j \wedge e_i \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

同时,在几何代数空间中,向量 \mathbf{a} 的长度可以用内积描述为

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{aa} \quad (1)$$

通常,用 e_{ijk} 简化表示 $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ 。由 n 个单位基组成的伪标量定义为

$$I = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = e_{12\dots n}$$

向量 \mathbf{A} 的对偶为 \mathbf{A} 的正交补,定义为

$$D = AI^{-1}$$

其中 $I^{-1} = e_{n \dots 21}$

式中 I^{-1} ——伪标量 I 的逆

更多关于几何代数的定义和定理见文献[19]。

1.2 R(6,0) 几何代数空间

文献[5-6]基于 $R(6,0)$ 几何代数空间提出了一种新的并联机构自由度分析算法。 $R(6,0)$ 是一个六维几何代数空间。设 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 和 e_6 是 R^6 的一组单位正交基, 其中

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = e_6^2 = 1$$

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

则螺旋理论中的螺旋

$$\mathcal{S} = (v_1, v_2, v_3; b_1, b_2, b_3)$$

在 $R(6,0)$ 几何代数空间中可写成

$$l = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + b_1 e_4 + b_2 e_5 + b_3 e_6$$

由式(1)可知, l 的长度为

$$\|l\|^2 = ll = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

在几何代数中, 无论是旋转算子还是平移算子, 都具有保长性, 即向量经过平移或旋转后, 自身长度保持不变。然而在 $R(6,0)$ 几何代数空间中, 若 t 为平移向量, 则

$$\begin{aligned} \|l+t\|^2 &= (l+t)(l+t) = \\ \|l\|^2 + \|t\|^2 + 2lt &\neq \|l\|^2 \end{aligned}$$

因此, $R(6,0)$ 几何代数空间中并没有平移算子。同时, 几何代数空间中向量具有平移算子的前提是该向量的长度为零, 称为零向量^[7]。例如, 共形几何存在平移算子是由于共形几何中的向量是零向量, 即

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= \left\| v + \frac{v^2}{2} e_\infty + e_0 \right\|^2 = v^2 + v^2(e_\infty e_0) = \\ v^2 - v^2 &= 0 \end{aligned}$$

因而, 为了将平移算子和旋转算子应用于螺旋, 从而实现并联机构自由度自动化分析的符号描述, 需要寻找一个新的空间, 该空间需要既能符号描述螺旋, 还能符号描述对螺旋进行平移和旋转的刚体变换。

1.3 R(3,3) 几何代数空间

$R(3,3)$ 几何代数空间^[11-12] 是一种六维几何代数空间, 能够描述空间运动的 6 个独立坐标。在 $R(3,3)$ 几何代数中, 设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2$ 和 $\bar{\epsilon}_3$ 是 R^6 的一组单位正交基, 其中

$$\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon_3^2 = 1$$

$$\bar{\epsilon}_1^2 = \bar{\epsilon}_2^2 = \bar{\epsilon}_3^2 = -1$$

$$\epsilon_i \epsilon_j = -\epsilon_j \epsilon_i \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3)$$

$$\bar{\epsilon}_i \bar{\epsilon}_j = -\bar{\epsilon}_j \bar{\epsilon}_i \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3)$$

$$\epsilon_i \bar{\epsilon}_j = -\bar{\epsilon}_j \epsilon_i \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3)$$

但是这一组正交基向量主要用于计算, 不用于几何元素的描述。为了描述螺旋, 定义以下一组基向量, 称为 Witt 基^[20]。令

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}(\epsilon_1 + \bar{\epsilon}_1)}{2} \quad e_4 = \frac{\sqrt{2}(\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1)}{2}$$

$$e_2 = \frac{\sqrt{2}(\epsilon_2 + \bar{\epsilon}_2)}{2} \quad e_5 = \frac{\sqrt{2}(\epsilon_2 - \bar{\epsilon}_2)}{2}$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{2}(\epsilon_3 + \bar{\epsilon}_3)}{2} \quad e_6 = \frac{\sqrt{2}(\epsilon_3 - \bar{\epsilon}_3)}{2}$$

计算可知, 该组基向量为零向量, 因为

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = e_6^2 = 0$$

同时该组基向量并不是两两正交, 其中

$$e_1 e_4 = e_2 e_5 = e_3 e_6 = -1$$

那么, 螺旋理论中的螺旋

$$\mathcal{S} = (v_1, v_2, v_3; b_1, b_2, b_3)$$

在 $R(3,3)$ 几何代数空间中可写成

$$l = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + b_1 e_4 + b_2 e_5 + b_3 e_6$$

这里, l 也为零向量。

$R(3,3)$ 几何代数空间不仅能符号描述螺旋, 还能符号描述刚体运动。单位矢量为 $t = (t_1, t_2, t_3)$, 平移距离为 a 的平移算子在 $R(3,3)$ 几何代数空间为

$$T = 1 - \frac{1}{2} at =$$

$$1 - \frac{1}{2} a(t_1 e_{56} + t_2 e_{64} + t_3 e_{45}) \quad (2)$$

旋转描述较之于平移描述略微复杂。绕过原点 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 轴, 旋转角度为 θ 的旋转算子在 $R(3,3)$ 几何代数空间为

$$R = 1 + \sin\theta B + (1 - \cos\theta) B^2 \quad (3)$$

其中 $B = u_1 B_x + u_2 B_y + u_3 B_z$ $B_x = \frac{1}{2}(e_{26} - e_{35})$

$$B_y = \frac{1}{2}(e_{34} - e_{16}) \quad B_z = \frac{1}{2}(e_{15} - e_{24})$$

对于 $R(3,3)$ 模型中的任意螺旋, 其刚体运动都可描述成

$$Q' = \prod_{i=1}^n M_i Q \prod_{i=1}^n \tilde{M}_{n-i+1} \quad (4)$$

其中 M_i 为平移或旋转算子, \tilde{M}_i 为 M_i 的逆^[7]。特别的, 绕过任意点 $p = (p_1, p_2, p_3)$ 、方向矢量为 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 的轴旋转 θ 的旋转算子的 $R(3,3)$ 形式可写成

$$M = T_p R \tilde{T}_p \quad (5)$$

其中 $T_p = 1 - \frac{1}{2} a(p_1 e_{56} + p_2 e_{64} + p_3 e_{45})$

不仅如此, 若螺旋 l_{i+1} 为螺旋 l_i 绕 u 轴旋转 θ 后

沿 t 轴平移 a 所得螺旋, 则 $R(3,3)$ 形式可写成

$$l_{i+1} = TRl_i\tilde{R}\tilde{T} \quad (6)$$

因此, 任意一个螺旋都可通过另一螺旋的刚体变换得到。例如螺旋 $l_2 = e_2 + 2e_4 + e_6$ 可以由螺旋 $l_1 = e_1 + e_6$ 沿 z 轴旋转 90° 后再沿 z 轴平移 2 个单位得到, 即

$$l_2 = T(1 + B_z)(e_1 + e_6)(1 - B_z)\tilde{T} = (1 - e_{45})(e_2 + e_6)(1 + e_{45}) = e_2 + 2e_4 + e_6$$

基于螺旋之间刚体运动符号表达式, 可以实现并联机构在已知分支第一个运动副螺旋的情况下, 自动求解该分支所有螺旋系, 进而实现并联机构自由度的自动化分析算法。

2 基于几何代数的支链运动空间自动求解

2.1 构型描述

为实现并联机构自由度自动化分析, 首先需要建立便于计算机程序识别的字符串构型描述, 这一字符串描述包含机构自由度分析所需的所有必要信息。螺旋的相关性能通过初等变换的方式来判定, 但从几何角度判定更加简洁^[21]。基于几何关系的并联机构字符串描述更加直接。使用文献[10]中的字符串定义方法。表1为相邻轴线之间的6种几何关系以及符号描述, 其中垂直为两螺旋异面情况, 正交为两螺旋共面情况。

表1 相邻轴线几何关系的描述

Tab.1 Representation of geometric relationships between adjacent axes

几何关系	平行	垂直	正交	相交	异面	共线
描述	R/R	R⊥R	R+R	R∧R	R!R	R R

机构中常见的单自由度运动副为转动副(R)和移动副(P)。复合副如球副(S)、虎克铰(U)和圆柱副(C)都能看作是单自由度运动副的组合。一般地, 将分支看作只由单自由度运动副组成, 并将单自由度运动副从静平台到动平台依次编号为 $1, 2, \dots, t$ 。若一个移动副和一个转动副正交, 那么字符串根据表1可描述为 $P+R$ 。球铰(S)可描述为 $R+R^*$, 其中 $*$ 表示正交于前两个轴线所成平面。并联机构 $3-RPS$ 有3个相同的 RPS 分支运动链, 其中 R 与定平台相连接; P 为驱动关节, 与 R 正交; S 与动平台相连接。因此每个分支运动链的计算机构型字符串可以描述为 $R+P|R+R^*R$ 。

通过几何关系分析可知, 任意轴线都可由另一已知轴线通过平移和旋转的刚体变换得到。例如若一个螺旋平行于另一个螺旋, 那么该螺旋可以由另一个螺旋平移得到。利用 $R(3,3)$ 几何代数空间不

仅能符号描述螺旋, 还能符号描述螺旋的刚体运动的优势, 基于螺旋间的几何关系, 建立由已知螺旋求解未知螺旋的符号表达式, 可以实现并联机构在已知分支第一个运动副螺旋的情况下, 自动求解该分支所有螺旋系, 进而实现并联机构自由度的自动化算法。

2.2 分支螺旋系自动求解算法

不失一般性, 假定第 i 个运动轴线在 $R(3,3)$ 几何代数空间中的表达式为

$$l_i = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 + b_1e_4 + b_2e_5 + b_3e_6$$

那么该运动轴线的方向矢量为 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 。令 $u_\perp = v = (v_1, v_2, v_3)$, 由于 $vu = 0, v^2 = 1$, 因此垂直矢量 v 有一个自由度。根据不同的几何关系, 可写出第 $i+1$ 个运动轴线的符号表达式 l_{i+1} 。第 $i+1$ 个运动副与第 i 运动副有如下关系:

(1) 共轴, 则 l_{i+1} 相当于 l_i 沿 u 轴平移 a 的刚体变换后所得。

(2) 平行, 则 l_{i+1} 相当于 l_i 沿 $t = (t_1, t_2, t_3)$ 轴平移 a 的刚体变换后所得。

(3) 正交, 则 l_{i+1} 相当于 l_i 绕过交点 $p = (p_1, p_2, p_3)$ 、方向为 v_\perp 的轴旋转 90° 的刚体变换后所得。

(4) 相交, 则 l_{i+1} 相当于 l_i 绕过交点 $p = (p_1, p_2, p_3)$ 、方向为 $w = (w_1, w_2, w_3)$ 的轴旋转 θ 的刚体变换后所得。

(5) 垂直, 则 l_{i+1} 相当于 l_i 绕过垂足 $p = (p_1, p_2, p_3)$ 、方向为 v_\perp 的轴旋转 90° , 然后沿 v_\perp 平移 a 的刚体变换后所得。

(6) 异面, 则 l_{i+1} 相当于 l_i 方向为 $w = (w_1, w_2, w_3)$ 的轴旋转 θ , 然后沿 $t = (t_1, t_2, t_3)$ 平移 a 的刚体变换后所得。

利用 1.3 节中 $R(3,3)$ 几何代数空间的刚体运动符号描述, 得到根据已知螺旋求解未知螺旋的符号表达式, 见表2。

表2 未知螺旋求解符号表达式

Tab.2 Symbolic expressions of unknown twists

几何关系	符号表达式
共轴($ $)	$l_{i+1} = T_\parallel l_i \tilde{T}_\parallel$
平行($/$)	$l_{i+1} = Tl_i \tilde{T}$
正交($+$)	$l_{i+1} = T_p R_\perp \tilde{T}_p l_i T_p \tilde{R}_\perp \tilde{T}_p$
相交(\wedge)	$l_{i+1} = T_p R \tilde{T}_p l_i T_p \tilde{R} \tilde{T}_p$
垂直(\perp)	$l_{i+1} = T_\perp T_p R_\perp \tilde{T}_p l_i T_p \tilde{R}_\perp \tilde{T}_p \tilde{T}_\perp$
异面(!)	$l_{i+1} = TRl_i \tilde{R} \tilde{T}$

表中 $T = 1 - \frac{1}{2}a(t_1e_{56} + t_2e_{64} + t_3e_{45})$

$$T_p = 1 - \frac{1}{2}a(p_1e_{56} + p_2e_{64} + p_3e_{45})$$

$$T_{\parallel} = 1 - \frac{1}{2}a(u_1e_{56} + u_2e_{64} + u_3e_{45})$$

$$T_{\perp} = 1 - \frac{1}{2}a(v_1e_{56} + v_2e_{64} + v_3e_{45})$$

$$R = 1 + \sin\theta B + (1 - \cos\theta) B^2$$

$$R_{\perp} = 1 + B_{\perp} + B_{\perp}^2$$

$$B = w_1B_x + w_2B_y + w_3B_z$$

$$B_{\perp} = v_1B_x + v_2B_y + v_3B_z$$

在自动求得分支所有运动轴线 l_i 的符号表达式后,再根据运动副类型得到该分支的运动螺旋。不失一般性,若运动轴线表达式为

$$l = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 + b_1e_4 + b_2e_5 + b_3e_6$$

那么如果运动副类型为转动副(R),运动螺旋 $S = l$;如果运动副类型为平移副(P),运动螺旋 $S = F(l) = u_1e_4 + u_2e_5 + u_3e_6$ 。

通过以上分析,以字符串描述为基础,结合运动副轴线符号表达式,可以实现分支运动螺旋的计算机程序化、自动化求解,算法流程图如图1所示。

3 基于几何代数的并联机构自由度自动化分析

不同于螺旋理论没有直接求解集合交集的运算法则,在几何代数框架下,集合的交集和并集可以通过内积和外积运算法则直接得到。因此,基于几何代数的并联机构自由度分析不需要通过求解约束螺旋间接得到动平台运动空间,从而简化自由度求解步骤。因此在得到并联机构支链自动化求解符号表达式后,可以通过几何代数符号描述并联机构自由度。

根据第2节中的讨论,R(3,3)几何代数空间不仅能描述并联机构的螺旋运动,还能对螺旋运动进行平移和旋转的刚体变换的符号描述。同时R(3,3)几何代数与R(6,0)几何代数一样,均为六维几何代数空间,具有相同的旋量表达式;并且2个空间有着相同的内积和对偶表达式。因而在自动求解支链螺旋符号表达式后,R(3,3)几何代数和R(6,0)几何代数有着相同的并联机构自由度符号表达式。

综上所述,并联机构自由度自动化算法分为以下几个步骤:

(1) 利用螺旋之间的几何关系,基于R(3,3)几何代数刚体运动符号表达式,自动写出第*i*个分支运动链上第*j*个运动副在几何代数框架下螺旋表达式 $S_{m_{ij}}$ 。

(2) 利用几何代数能通过外积运算法则求解集合交集的优势,计算出第*i*个分支运动链末端的许动子空间

$$S_{m_i} = S_{m_{i1}} \cup S_{m_{i2}} \cup \dots \cup S_{m_{ij}} \cup \dots \cup S_{m_{ik}} = S_{m_{i1}} \wedge S_{m_{i2}} \wedge \dots \wedge S_{m_{ij}} \wedge \dots \wedge S_{m_{ik}}$$

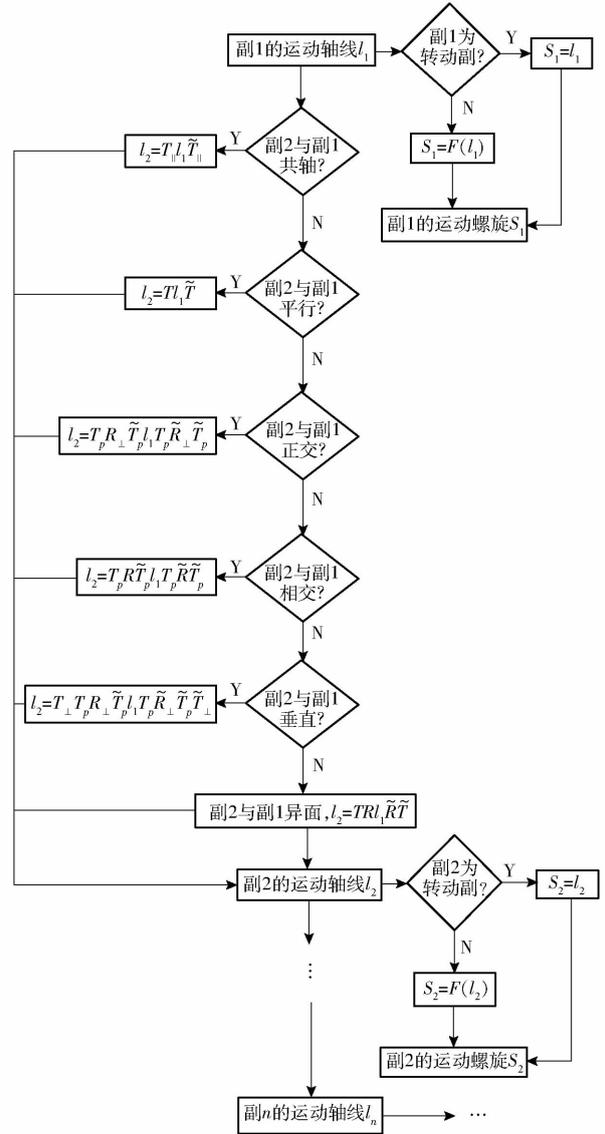


图1 并联机构支链运动螺旋系自动化算法流程

Fig.1 Flow chart of automatic motion analysis of limbs using geometry algebra

其中 \wedge 为几何代数外积符号。若运动副线性相关,即运动副运动空间有交集,表示并联机构具有冗余驱动力,此时需要对冗余驱动力在几何代数空间中进行判别和剔除。

(3) 利用几何代数能通过内积和对偶运算法则求解集合交集的优势计算出动平台许动子空间

$$S_m = S_{m_1} \cap S_{m_2} \cap \dots \cap S_{m_i} \cap \dots \cap S_{m_n}$$

其中,当2个分支运动链末端的许动子空间的并集为 I_6 时,交集可写为

$$S_{mM} = S_{m_i} \cap S_{m_{i+1}} = (S_{m_i} I_6^{-1}) \cdot S_{m_{i+1}}$$

其中 \cdot 为几何代数内积符号。当两个分支运动链末端的许动子空间的并集不等于 I_6 时,需要使用两者的并集替代 I_6 。

所求的动平台许动子空间符号表达式基的维度即为并联机构自由度个数,基的外积组成即为并联

机构自由度运动方向。例如,若动平台许动子空间 $S = e_1 \wedge e_2 \wedge e_6$,则表示该并联机构的自由度为 3,运动方向分别是沿 x 轴和 y 轴的旋转,以及绕 z 轴的平移。并联机构自由度自动化算法流程图见图 2。

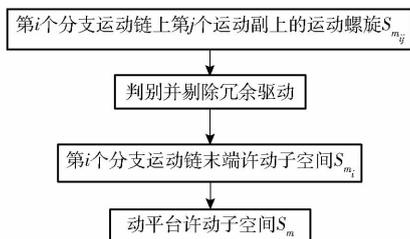


图 2 并联机构自由度自动化算法流程

Fig. 2 Flow chart of mobility analysis using geometry algebra

4 基于几何代数的并联机构自由度自动化分析算法验证

4.1 算法可行性一般性验证

为了对本文提出的并联机构自由度自动化求解算法的正确性进行一般性验证,需对该算法进行可行性分析:

(1) 并联机构任意运动副的螺旋均可在 $R(3, 3)$ 几何代数空间进行描述。

(2) 任意螺旋均可通过已知螺旋的刚体运动得到。

(3) 在已知并联机构支链第 1 个运动副螺旋以及支链各运动副之间几何关系的情况下,该支链所有螺旋系能够符号描述,并且能利用符号描述进行自动化求解。

(4) 在自动求得并联机构所有螺旋系的几何代数表达式后,可以通过几何代数框架下的运算法则得到并联机构的自由度和运动方向的符号表达式,进而实现并联机构自由度自动化算法。

证明如下:

(1) 由文献[12]可知, $R(3, 3)$ 几何代数中 6 个一维向量对应旋量中的 6 个参数,即 e_1, e_2, e_3 表示旋转, e_4, e_5, e_6 表示移动;因此旋量与 $R(3, 3)$ 空间存在一一对应的映射关系,并联机构任意运动副的螺旋均可在 $R(3, 3)$ 空间中进行描述。

(2) 任意两旋量之间只存在 6 种几何关系,即共轴、平行、正交、相交、垂直、异面,而这 6 种几何关系均可通过平移和旋转的刚体运动来描述,例如某螺旋与一已知螺旋异面,其中两螺旋距离为 d ,夹角为 θ ,那么该螺旋可以通过已知螺旋绕公垂线旋转 θ 后再沿着公垂线平移 d 后得到。

(3) 在文献[11]中已证明,通过 $R(3, 3)$ 描述的旋量存在平移和旋转的刚体运动符号表达式。

因此在 $R(3, 3)$ 几何代数空间中,已知并联机构支链第 1 个运动副螺旋以及支链各运动副之间几何关系的情况下,可以通过刚体运动符号表达式描述该支链所有螺旋,从而实现并联机构螺旋系的自动化计算。

(4) 在自动求得并联机构所有螺旋系的几何代数表达式后,可以通过几何代数的并集和交集运算法则求得并联机构自由度和运动情况,这在文献[5-6]中已得到证明。这是因为并联机构各支链的运动是该支链所有螺旋的并集,同时并联机构动平台的运动是各支链运动的交集;而在几何代数框架下可以通过外积运算法则符号描述螺旋并集,内积运算法则符号描述螺旋交集,从而得到并联机构自由度的符号表达式,进而实现并联机构自由度自动化算法。

在并联机构自由度自动化求解算法包含的 4 个步骤均证明可行的情况下可证明该算法可行。

4.2 算法可行性例子验证

基于 gaigen 2.5 几何代数分析软件包^[22],生成满足 $R(3, 3)$ 几何代数运算法则的源文件,基于 C++ 平台实现并联机构自由度自动化分析算法,从而验证该算法的正确性、有效性。

以 3-RPS 并联机构为例验证并联机构自由度自动化分析算法。3-RPS 有 3 个相同的 RPS 分支运动链,如图 3 所示,每个运动分支的计算机构型字符串可以描述为 $R + P | R + R * R$ 。

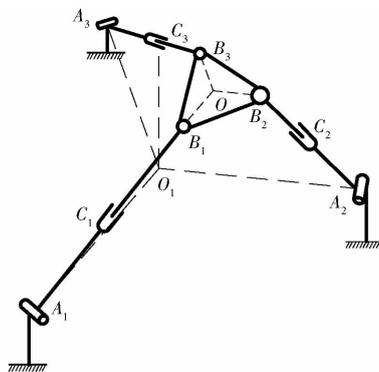


图 3 3-RPS 并联机构机构简图

Fig. 3 Schematic diagram of 3-RPS parallel mechanism

首先对第 1 个分支进行自动求解。不失一般性,令该分支的第 1 个运动副过点 $B_1 = (B_{1x}, B_{1y}, B_{1z})$,运动轴线为

$$l_{11} = u_{111}e_1 + u_{112}e_2 + u_{113}e_3 + b_{111}e_4 + b_{112}e_5 + b_{113}e_6$$

由计算机构型字符串可知,该运动副为转动副,因此第 1 个运动副的运动螺旋为 $S_{11} = l_{11}$ 。

第 2 个运动螺旋和第 1 个运动螺旋正交,交点为 p_1 ,那么由表 2 可知

$$l_{12} = T_{p_1} R_{\perp} \tilde{T}_{p_1} l_{11} T_{p_1} \tilde{R}_{\perp} \tilde{T}_{p_1} = u_{121} e_1 + u_{122} e_2 + u_{123} e_3 + b_{121} e_4 + b_{122} e_5 + b_{123} e_6$$

该运动副为移动副,因此运动螺旋为

$$S_{12} = F(l_{12}) = u_{121} e_4 + u_{122} e_5 + u_{123} e_6$$

同理可知,第3个运动螺旋和第2个运动螺旋共轴,运动螺旋为

$$S_{13} = l_{13} = T_{\parallel} l_{12} \tilde{T}_{\parallel}$$

第4个运动副与第3个运动副正交,交点为 p_2 , 运动螺旋为

$$S_{14} = l_{14} = T_{p_2} R_{\perp} \tilde{T}_{p_2} l_{13} T_{p_2} \tilde{R}_{\perp} \tilde{T}_{p_2}$$

第5个运动副与第3个和第4个运动副正交,交点为 p_2 ,运动螺旋为

$$S_{15} = l_{15} = T_{p_2} R_{13} \tilde{T}_{p_2} l_{14} T_{p_2} \tilde{R}_{13} \tilde{T}_{p_2}$$

那么,第1个分支运动链末端的许动子空间为

$$S_1 = S_{11} \cup S_{12} \cup S_{13} \cup S_{14} \cup S_{15} = S_{11} \wedge S_{12} \wedge S_{13} \wedge S_{14} \wedge S_{15}$$

同理可求得第2、3个分支运动链末端的许动子空间 S_2, S_3 。

因而3-RPS并联机构的自由度符号表达式为

$$S = ((S_1 I^{-1}) S_2 I^{-1}) S_3 =$$

$$a_1 e_{123} + a_2 e_{124} + a_3 e_{125} + a_4 e_{126} + a_5 e_{134} + a_6 e_{135} + a_7 e_{136} + a_8 e_{145} + a_9 e_{146} + a_{10} e_{156} + a_{11} e_{234} + a_{12} e_{235} + a_{13} e_{236} + a_{14} e_{245} + a_{15} e_{246} + a_{16} e_{256} + a_{17} e_{345} + a_{18} e_{346} + a_{19} e_{356} + a_{20} e_{456}$$

其中 $e_{ijk} = e_i \wedge e_j \wedge e_k$

式中 a_i ——标量系数

由 S 的符号表达式可知,动平台许动子空间为一个3维基(3-blade),因此3-RPS并联机构的自由度为3。

即使相同的并联机构在不同位形下自由度和运动情况也可能不同。基于几何代数的并联机构的自由度自动化算法不仅能求解某种机构在通用参数下的自由度,还能求解在已知连杆参数尺寸和位置下的自由度和运动情况。以3-URU并联机构为例,对本文提出方法进行验证。

如图4所示,若3-URU并联机构的动平台 $B_1 B_2 B_3$ 为外接圆半径为3的等边三角形,外接圆圆心为 O ;3个基座 A_1, A_2, A_3 分布在外接圆半径为5的等边三角形的3个顶点上,外接圆圆心为 O_1 ;杆长 $A_i C_i$ 为4,杆长 $B_i C_i$ 为3, $i = 1, 2, 3$;每个运动分支的计算机构型字符串描述为 $R \perp R | R | R \perp R$ 。

由文献[21]可知,若动平台 $B_1 B_2 B_3$ 与3个基座 $A_1 A_2 A_3$ 共面,且2个外接圆圆心 O, O_1 不重合,如

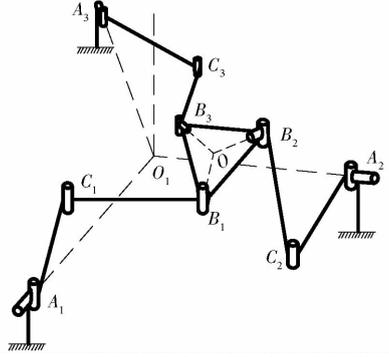


图4 3-URU并联机构处于平面运动位形机构简图

Fig.4 Schematic diagram of 3-URU parallel mechanism in planar mode

图4所示,那么该并联机构的自由度为3,分别为沿 x, y 的平移和绕 z 轴的旋转。

若第1个基座的第1个运动副过点 $(5, 0, 0)$, 方向为 $(1, 0, 0)$,运动轴线为

$$S_{11} = l_{11} = e_1$$

第2个运动螺旋和第1个运动螺旋正交,交点为 $(5, 0, 0)$,那么由表2可知

$$S_{12} = l_{12} = T_{p_1} R_{\perp} \tilde{T}_{p_1} l_{11} T_{p_1} \tilde{R}_{\perp} \tilde{T}_{p_1} = e_3 + 5e_5$$

同理可知,第3个运动螺旋和第2个运动螺旋平行且过点 $(4.47, 3.96, 0)$,运动螺旋为

$$S_{13} = l_{13} = T_{p_2} l_{12} \tilde{T}_{p_2} = e_3 + e_5$$

第4个运动副与第3个运动副平行且过点 $(3, 0, 0)$,运动螺旋为

$$S_{14} = l_{14} = T_{p_3} l_{13} \tilde{T}_{p_3} = e_3 + 2.6e_4 + 2.5e_5$$

第5个运动副与第4个运动副正交,交点为 $(3, 0, 0)$,运动螺旋为

$$S_{15} = l_{15} = T_{p_3} R_{\perp} \tilde{T}_{p_3} l_{14} T_{p_3} \tilde{R}_{\perp} \tilde{T}_{p_3} = 0.5e_1 - 0.87e_2 + 0.87e_6$$

那么,第1个分支运动链末端的许动子空间为 $S_1 = S_{11} \wedge S_{12} \wedge S_{13} \wedge S_{14} \wedge S_{15} = 9e_{12345} + 9e_{13456}$

同理可求得第2、3个分支运动链末端的许动子空间分别为

$$S_2 = 10.31e_{12345} + 5.16e_{13456} - 8.93e_{23456}$$

$$S_3 = 10.06e_{12345}$$

因而3-URU并联机构的自由度符号表达式为

$$S = ((S_1 I^{-1}) S_2 I^{-1}) S_3 = a(e_3 \wedge e_4 \wedge e_5)$$

式中 a ——标量系数

由 S 的符号表达式可知,在该运动空间情况下,3-URU并联机构的自由度为3,分别为沿 x, y 轴的平移和绕 z 轴的旋转。

同理可求,若动平台 $B_1 B_2 B_3$ 与3个基座 $A_1 A_2 A_3$ 平行但不共面,且2个外接圆圆心 O, O_1 不重合,如图5所示,则并联机构的自由度符号表达式为

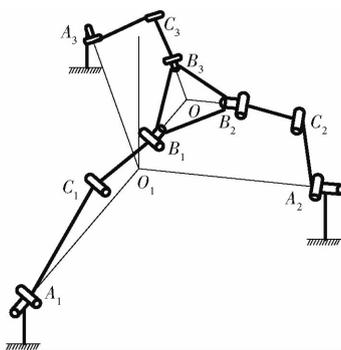


图 5 3-URU 并联机构处于平移运动位形机构简图

Fig.5 Schematic diagram of 3-URU parallel mechanism in translation mode

$$S = ((S_1 I^{-1}) S_2 I^{-1}) S_3 = a(e_4 \wedge e_5 \wedge e_6)$$

3-URU 并联机构的自由度为 3, 分别为沿 x 、 y 、 z 轴的平移。

若动平台 $B_1 B_2 B_3$ 与 3 个基座 $A_1 A_2 A_3$ 不平行, 但 2 个外接圆圆心 O 、 O_1 重合, 如图 6 所示, 那么根据并联机构的自由度符号表达式可知, 3-URU 并联机构的自由度为 3, 分别为绕 x 、 y 、 z 轴的旋转。

基于本文提出的算法对 3-URU 并联机构在不同位形下自由度分析所得结论与文献[23]中的结论相同, 从而证明本文算法可行。

5 结论

(1) $R(3,3)$ 几何代数空间不仅与 $R(6,0)$ 空间一

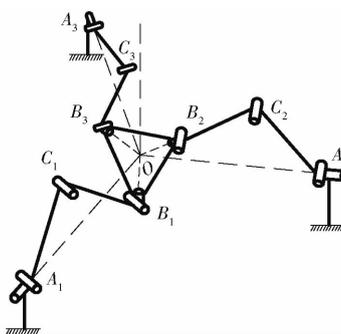


图 6 3-URU 并联机构处于旋转运动位形机构简图

Fig.6 Schematic diagram of 3-URU parallel mechanism in orientation mode

样能够描述运动螺旋, 得到并联机构自由度的符号表达式, 而且 $R(3,3)$ 空间具有平移、旋转刚体运动的符号表达式, 从而能够实现并联机构自由度自动化算法。

(2) 提出的算法不仅具有基于几何代数算法的优点, 即不需要求解线性方程组, 能给出自动化求解的符号表达式, 算法简单, 效率高, 同时由于几何代数具有集合求交的运算法则, 因而在自由度分析过程中可以直接通过各支链求交运算得到自由度运动空间, 不需要通过约束螺旋间接得到并联机构自由度。并且由于即使并联机构字符串构型描述相同, 机构也可能会有不同的自由度, 本文提出的算法不仅能求解机构在通用参数情况下的自由度, 还能求解机构在特定参数和位置情况下的自由度和运动情况。

参 考 文 献

- 邹慧君, 楼鸿棣. 高等机械原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.
- 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- 黄真, 刘婧芳, 曾达幸. 基于约束螺旋理论的机构自由度分析的普遍方法[J]. 中国科学, 2009, 39(1): 84-93.
HUANG Zhen, LIU Jingfang, ZENG Daxing. General method formobility analysis of mechanisms based on constrained screw theory [J]. Science in China Press, 2009, 39(1): 84-93. (in Chinese)
- 黄真, 夏平, 丁华锋. Bennett 机构自由度的螺旋分析[J]. 燕山大学学报, 2004, 28(3): 189-191.
HUANG Zhen, XIA Ping, DING Huafeng. Mobility analysis of Bennett based on constrained screw theory[J]. Journal of Yanshan University, 2004, 28(3): 189-191. (in Chinese)
- LI Q, CHAI X. Mobility analysis of limited degrees of freedom parallel mechanisms in the framework of geometric algebra[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 8(4): 041005.
- CHAI X, LI Q. Mobility analysis of two limited-DOF parallel mechanisms using geometric algebra[C]// International Conference on Intelligent Robotics and Applications. Cham. Springer, 2016: 13-22.
- DORST L, FONTIJNE D, MANN S. Geometric algebra for computer science: an object-oriented approach to geometry[M]. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2009.
- 曹毅, 秦友蕾, 陈海, 等. 基于 GF 集理论的五自由度混联机器人构型综合[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(11): 392-398. http://www.jcsam.org/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20151153&flag=1&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2015.11.053.
CAO Yi, QIN Youlei, CHEN Hai, et al. Structural synthesis of 5-DOF hybrid mechanisms based on GF set[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(11): 392-398. (in Chinese)
- 朱小蓉, 宋月月, 沈惠平, 等. 基于 POC 方法的少自由度无过约束并联机构构型综合[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(8): 370-377. http://www.jcsam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20160849&flag=1&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2016.08.049.
ZHU Xiaorong, SONG Yueyue, SHEN Huiping, et al. Structural synthesis based on POC set for lower-mobility non-overconstrained parallel mechanisms [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(8): 370-377. (in Chinese)

- 20 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012.
- 21 YANG Tingli,LIU Anxin,SHEN Huiping,et al. Topology design of robot mechanisms[M]. Springer,2018.
- 22 SHEN Huiping,ZHU Xiaorong,ZHANG Dan,et al. The design methodology for less input-more output parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory,2016,104(10):43-58.
- 23 沈惠平,邓嘉鸣,孟庆梅,等. 少输入-多输出并联机构的设计方法及其应用[J]. 机械工程学报,2018,54(1):223-232. SHEN Huiping,DENG Jiaming,MENG Qingmei,et al. Design methods and applications for the fewer input-more output parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering,2018,54(1):223-232. (in Chinese)
- 24 邓嘉鸣,沈惠平,李菊,等. 三维并联振动筛设计与实验[J/OL]. 农业机械学报,2013,44(11):342-346. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20131157&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.11.057. DENG Jiaming,SHEN Huiping,LI Ju,et al. Design and experiment research for three-dimensional parallel kinematics vibration sieve[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2013,44(11):342-346. (in Chinese)
- 25 李菊,曾氢菲,邓嘉鸣,等. 多维并联振动筛筛分过程解析与筛面运动形式优选[J/OL]. 农业机械学报,2016,47(11):399-407. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20161154&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.11.054. LI Ju,ZENG Qingfei,DENG Jiaming,et al. Screening process analysis for multidimensional parallel vibrating screen and optimization of screen surface movement[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2016,47(11):399-407. (in Chinese)
- 26 沈惠平,杨梁杰,邓嘉鸣. 用于肩关节康复训练的单输入三转动输出并联机构及其运动学设计[J]. 中国机械工程,2015,26(22):2983-2988. SHEN Huiping,YANG Liangjie,DENG Jiaming. A one-input three-rotation output parallel mechanism used for shoulder rehabilitation and its kinematics design[J]. China Mechanical Engineering,2015,26(22):2983-2988. (in Chinese)
- 27 邓嘉鸣,戴丽芳,沈惠平,等. 并联式脚底按摩机构的设计及其研制[J]. 机械设计,2016,33(2):78-82. DENG Jiaming,DAI Lifang,SHEN Huiping,et al. A novel parallel foot massage mechanism and its kinematics design[J]. Journal of Machine Design,2016,33(2):78-82. (in Chinese)
- 28 刘平松,郭钢,朱海宁. 4R 并联机器人工作空间分析[J]. 机械制造与自动化,2012,41(4):156-157. LIU Pingsong,GUO Gang,ZHU Haining. Workspace analysis of the 4R parallel robot[J]. Machine Building & Automation,2012,41(4):156-157. (in Chinese)

(上接第 407 页)

- 10 曹文熬. 空间多环耦合机构数字化构型综合理论[D]. 秦皇岛:燕山大学,2014. CAO Wena. Digital type synthesis theory of spatial multiloop coupling mechanism[D]. Qinhuangdao:Yanshan University,2014. (in Chinese)
- 11 DORST L. 3D oriented projective geometry through versors of $R(3,3)$ [J]. Advances in Applied Clifford Algebras,2016,26(4):1-36.
- 12 LI H,ZHANG L. Line geometry in terms of the null geometric algebra over $R(3,3)$,and application to the inverse singularity analysis of generalized Stewart platforms[M]//LASENBY J. Guide to geometric algebra in practice. Springer London,2011:207-221.
- 13 CLIFFORD W. Elements of dynamic: an introduction to the study of motion and rest in solid and fluid bodies[M]. MacMillan and Company,1878.
- 14 HESTENES D. New foundations for classical mechanics[M]. Springer Science and Business Media,2012.
- 15 SOMMER G. Applications of geometric algebra in robot vision[J]. Computer Algebra and Geometric Algebra with Applications,2005:258-277.
- 16 SOMMER G. Geometric computing with Clifford algebras: the oretical foundations and applications in computer vision and robotics[M]. Springer Science and Business Media,2013.
- 17 HILDENBRAND D. Geometric computing in computer graphics using conformal geometric algebra[J]. Computers and Graphics,2005,29(5):795-803.
- 18 ARISTIDOU A. Inverse kinematics solutions using conformal geometric algebra[M]//LASENBY J. Guide to geometric algebra in practice. Springer London,2011:47-62.
- 19 DORAN C,LASENBY A. Geometric algebra for physicists[M]. Cambridge University Press,2003.
- 20 DU J,GOLDMAN R,MANN S. Modeling 3D geometry in the Clifford algebra $R(4,4)$ [J]. Advances in Applied Clifford Algebras,2017:1-24.
- 21 黄真,赵永生,赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
- 22 FONTIJNE D. Gaigen 2: a geometric algebra implementation generator[C]//Proceedings of the 5th International Conference on Generative Programming and Component Engineering. ACM,2006:141-150.
- 23 ZLATANOV D,BONEV I,GOSSELIN C. Constraint singularities as C-space singularities[J]. Advances in Robot Kinematics,2002:183-192.