doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.11.050

SCARA 并联机构拓扑分析与其低耦合度机型设计

李　菊　曾氢菲　沈惠平　杨廷力

(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要: 根据基于方位特征(Position and orientation characteristics,POC)的并联机构拓扑结构设计理论与方法,首先,对已提出的一类 7 个具有较好实用价值的 SCARA 并联机构,进行了拓扑结构分析,揭示了其 POC 集、自由度(含驱动副选取)、过约束数、耦合度以及输入-输出运动解耦性等 5 个最主要的拓扑特征,且发现这些机构的耦合度均较大,为 2,表明其运动学正解和动力学求解十分复杂;继而基于机构拓扑结构降耦原理,又对 $\kappa=2$ 的这 7 个机构进行了拓扑结构降耦优化,得到了低耦合度($\kappa=1$),而机构 POC、自由度(Degree of freedom,DOF)等保持不变的实现 SCARA 运动的 14 个新机型,不仅丰富了实现 SCARA 运动的 4-DOF 三平移一转动机型库,而且降低了这些机构的运动学和动力学代数求解难度,而其数值解可用一维搜索法方便求得,从而为这一类 SCARA 并联机构的运动学和动力学分析、设计及应用提供了理论基础。

关键词: 并联机构; POC 方法; 拓扑结构分析; 耦合度; 拓扑特征; 机构综合

中图分类号: TH112　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000-1298(2017)11-0405-12

Topological Analysis for Family of SCARA Parallel Mechanisms and Their Equivalent Design with Low Coupling Degree

LI Ju　ZENG Qingfei　SHEN Huiping　YANG Tingli

(*Research Center for Advanced Mechanism Theory*, *Changzhou University*, *Changzhou* 213016, *China*)

Abstract: According to the parallel mechanism design theory and systematical method based on position and orientation characteristic (POC), a total topological structures analysis was performed on seven typical new SCARA parallel mechanisms (PMs) with proposed practical value. Five major topological features were revealed, which were POC set, degree of freedom (including the selection of drive pair), over-constraint degree, coupling degree and input-output motion decoupling relationship of PMs. It was found that the coupling degree of these PMs were bigger with $\kappa=2$, which meant that the forward kinematics solutions and inverse dynamic solution of the PMs were very complete. Therefore, decoupling and optimization of these PMs were completed based on the proposed mechanism topological structural decoupling principles, and 14 new equivalent mechanisms with lower coupling degree which had the same POC and DOF were achieved. Thus the 4-DOF mechanism with three translations and one rotation which can achieve Schonflies motion can be enriched greatly, and the forward kinematics solutions and inverse dynamic solution of these PMs can be obtained easily, and the numerical solution can be gotten conveniently by using one dimensional searching method. The research provided a theoretical basis for the kinematics synthesis and analysis, design and applications for these new SCARA PMs.

Key words: parallel mechanism; POC method; topological structure analysis; coupling degree; topological characteristics; mechanism synthesis

引言

以方位特征集(POC 集)为数学工具、以有序单开链(Single open chain, SOC)为机构组成单元的并联机构(Parallel kinematic machine, PKM)拓扑结构设计理论与方法,由杨廷力等[1-2]提出并建立,该方

收稿日期: 2017-03-12　修回日期: 2017-04-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(51405039、51375062、51475050)、江苏省重点研发计划项目(BE2015043)和江苏省科技成果转化专项资金项目(BA2015098)

作者简介: 李菊(1981—),女,讲师,博士,主要从事机器人机构设计和自动控制研究,E-mail: wangju0209@163.com

法不同于基于螺旋理论的方法[3-5]、基于位移子群的方法[6]、基于线性变换和进化算法的方法[7]，它描述的运动都是相对于动平台运动副轴线的，与定坐标系以及机构的运动位置无关，因而是一种几何方法；该方法以简单的 POC 集的“并”与“交”符号类线性运算，得到非瞬时的无过约束机构和一般过约束机构，物理意义明确，易于理解和应用，为并联机构的设计与分析提供了一种有效而系统的理论与方法。

一方面，纯三平移、纯三转动及 SCARA 运动(三平移一转动，转动轴线为动平台的法线)为 3 种典型的输出运动，在工业生产线上具有极广的应用前景。对于实现前两者运动的三自由度并联机器人，已有较多的研究和应用，而对于实现 SCARA 型输出运动的四自由度并联机器人，其机型的研究和应用开发相对较少。

1999 年，ABB 公司开发了称为 FlexPicker 的 SCARA 并联机器人[8]，它是在三平移 Delta[9] 并操作手的基础上，通过动平台与静平台之间再串联一条 R-U-P-U-R 支链，构成了一个具有三平移一转动功能的混联操作手，实际上，这种混联操作手可视为具有 2 个动平台(即 Delta 机构的三平移子平台和转动输出的抓取操作器平台)，这种机型已广泛应用。为克服这种操作手中间支链易磨损、只能适用于较小工作空间的缺点，文献[10-12]设计了 H4、I4、Par4 等系列的四自由度 SCARA 型(即三平移一转动)操作手，它们在结构上保留了三平移 Delta 机构所含的平行四边形结构 R∥-(4S)-∥R 或 R∥R-(4R)-∥R(S 为球副，R 为转动副)复杂支链，因而在性能上继承了 Delta 机构高速、动态性能好等优点，也因此被称为 Delta 族机器人。

2000 年，赵铁石等[13]提出了 4-URU 型三平移一转动并联机器人；2001 年金琼等[14]基于方位特征输出矩阵(后称为 POC 集)和单开链理论，提出了一类三平移一转动并联机器人，并于 2003 年申请了一组 5 个具有单动平台的三平移一转动并联机构[15]专利，但未研制样机；黄田等[16]在 H4、I4、Par4 等结构的基础上，于 2010 年设计了四自由度三平移一转动的 Cross-IV 型高速搬运机器人并实现了产业化；刘辛军等[17]于 2012 年在国内首次研制出具有一个动平台且实现三平移一转动的 X_4 型并联机构样机，并通过尺寸性能优化，实现了较大角度的输出转动[18]。

笔者团队根据基于方位特征(POC)的并联机构拓扑结构设计理论与方法，提出了一类具有较好应用前景的 13 个四自由度 SCARA 型(三平移一转动)并联机构，其中 7 种新机构已申请中国发明专利[19-25]。

文献[26]已对商业化著名并联机构，例：Delta、Diamond、Tricept、TriVariant、Exechon、Z3、H4、Steward 等，以及其他具有潜在应用价值的并联机构，进行了详细的拓扑结构分析，得到了一些有价值的结论、规律或启示。

同时，文献[27-28]在研究如何降低机构拓扑结构复杂性的基础上，提出了将机构的结构降耦和机构的运动解耦，作为并联机构拓扑结构优化的两个重要内容，研究表明：①机构的耦合度越大，其运动学正解和动力学求解越复杂，降低机构的结构耦合度可直接降低机构运动学、动力学求解的难度。②耦合度 κ 恰为机构冗余回路的虚拟变量数或约束回路的运动相容方程数，对于 $\kappa=1$ 的机构，可一维搜索法较易求得其位置正解或动力学正、逆解的数值解。③对于 $\kappa\geqslant 2$ 的任意机构，可将其降为 $\kappa=1$ 且保持自由度和运动输出不变，同时，提出了降低机构耦合度 κ 的 3 种方法[29]。

本文首先对提出的 7 个具有较好实用价值的三平移一转动并联机构进行拓扑结构分析，揭示出其 POC 集、自由度、耦合度等最主要的拓扑结构特征；为进一步简化这些机构的运动学正解和动力学求解，对其进行结构降耦优化，得到 POC、DOF 不变，但耦合度降至 $\kappa=1$ 的低耦合度机型，以期为这些机型的性能评价和优选、运动学与动力学的方便求解，及其设计和应用提供理论基础。

1 并联机构的拓扑特征

本文所述的并联机构拓扑结构特性分析，即为分析并揭示并联机构的 12 个基本拓扑结构特征[2]，它包括：方位特征集(POC 集)及其维数、独立回路数 v、独立位移方程数 ξ_{L_1}、过约束数 $N_{\mathrm{ov.}}$、自由度(DOF)类型和数目 F、基本运动链(Basic kinematic chain, BKC)类型及其数目、BKC 耦合度 κ、输入-输出运动解耦性(I-O 解耦性)、消极运动副、驱动副选择、冗余度等指标，其中[26]：

(1) POC 集及其维数，反映了机构的基本功能。

(2) 独立位移方程数、冗余度、BKC 耦合度、I-O 解耦性、驱动副选择，反映了机构运动学与动力学性能。

(3) DOF 类型及数目、BKC 耦合度、冗余度、POC 集维数、I-O 解耦性，反映了机构的控制性能。

(4) 过约束数 $N_{\mathrm{ov.}}$，反映了机构的刚度，以及制造误差对精度的敏感度：$N_{\mathrm{ov.}}$ 越大，刚度越大，但对制造误差的敏感度越高。

限于篇幅，仅介绍重要的 POC 集、DOF 数、过约束数 $N_{ov.}$、耦合度 κ、I－O 解耦性这 5 个指标，其相应的计算公式[1-2]如表 1 所示。

表 1　机构的拓扑结构特征指标

Tab. 1　Indexes of topological structure characteristics of mechanisms

指标	公式或判定准则
POC 集及数目	$M_S = \bigcup_{i=1}^{m} M_{J_i};M_{pa} = \bigcup_{i=1}^{v+1} M_{bi}$
DOF 及驱动副	$F = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{v} \dim.\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{j} M_{b_j}\right) \cup M_{b_{(j+1)}}\right\}$
过约束数	$N_{ov.} = 6v - \xi$
BKC 耦合度	$\kappa = \frac{1}{2}\min\left\{\sum_{j=1}^{v} \lvert\Delta_j\rvert\right\}$
I－O 解耦性	运动解耦判定准则[1-2]

2　SCARA 并联机构的拓扑分析

笔者团队最近综合得到了 10 个新机构[19-25]，以下仅对 7 个具有较好使用价值的Ⅰ～Ⅶ型单动平台 SCARA 型并联机构进行拓扑结构分析，且按机构组成描述、POC 集、DOF 数、过约束数 $N_{ov.}$、耦合度 κ、I－O 解耦性分析等方面来阐述。

2.1　Ⅰ型 3T1R 机构

2.1.1　Ⅰ型 3T1R 机构的组成描述

Ⅰ型 3T1R 机构如图 1 所示[19]，它由静平台 0、动平台 1 以及 4 条结构相同的支链组成；从静平台 0 到动平台 1，前 3 个转动副相互平行，后 2 个转动副相互平行，但第 3、4 个转动副轴线垂直；4 条支链的一端通过转动副 R_{15}、R_{25}、R_{35}、R_{45} 与动平台 1 连接，这 4 个转动副的轴线须平行于动平台 1 平面的法线；4 条支链的另一端通过驱动副 R_{11}、R_{21}、R_{31}、R_{41} 与静平台 0 连接，其中，$R_{11} \perp R_{21}$，$R_{31} \perp R_{41}$。

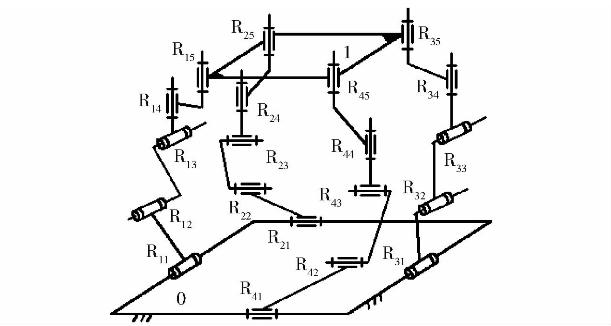

图 1　Ⅰ型 3T1R 并联机构

Fig. 1　Type Ⅰ 3T1R parallel mechanism

2.1.2　Ⅰ型 3T1R 机构的 DOF、$N_{ov.}$、POC 计算

(1) 机构的拓扑结构

$$\mathrm{SOC}\{-R_{i1} \parallel R_{i2} \parallel R_{i3} \perp R_{i4} \parallel R_{i5}-\}$$
$$(i=1,2,3,4)$$

(2) 确定支链末端构件的 POC 集

约定：动平台 1 上任意一点 O' 为基点，下同。

$$M_{b_i} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{i3},R_{i4})) \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4)$$

(3) 确定第 1 回路的独立位移方程数 ξ_{L_1}

①由第 1、2 支链构成第 1 回路

$$\xi_{L_1} = \dim.\{M_{b_1} \cup M_{b_2}\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{13},R_{14})) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{23},R_{24})) \end{bmatrix}\right\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right\} = 6$$

②第 1、2 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{1} \xi_{L_j} = 10-6=4$$

$$M_{pa(1-2)} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{13},R_{14})) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{23},R_{24})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

(4) 确定第 2 回路的独立位移方程数 ξ_{L_2}

①由第 3 支链再构成第 2 回路

$$\xi_{L_2} = \dim.\{M_{pa(1-2)} \cup M_{b_3}\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{33},R_{34})) \end{bmatrix}\right\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{33},R_{34})) \end{bmatrix}\right\} = 5$$

②第 1、2、3 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC

$$F_{(1-3)} = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{2} \xi_{L_j} = 15-6-5=4$$

$$M_{pa(1-3)} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{33},R_{34})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

(5) 确定第 3 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_3}

由第 4 支链再构成第 3 回路

$$\xi_{L_3} = \dim.\{M_{pa(1-3)} \cup M_{b_4}\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{43},R_{44})) \end{bmatrix}\right\} = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{43},R_{44})) \end{bmatrix}\right\} = 5$$

(6) 确定机构的自由度

$$F = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{3} \xi_{L_j} = 20-6-5-5=4$$

(7)确定机构过约束数 $N_{ov.}$

$$N_{ov.}=6v+F-\sum_{i=1}^{m}f_i=6\times3+4-20=2$$

(8)确定该机构动平台的 POC 集

$$M_{pa}=M_{pa(1-3)}\cap M_{b_4}=$$

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{43},\ R_{44})) \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

因此,根据驱动副的选择准则[1-2],当静平台 0 上的转动副 R_{11}、R_{21}、R_{31}、R_{41} 为驱动时,该机构动平台 1 产生 3 个平移和 1 个绕动平台 1 法线的转动。

2.1.3 Ⅰ型 3T1R 机构的 κ 计算、I-O 解耦性分析

(1)确定第 1 回路及其约束度 Δ_1

$$\text{loop}_1\{-R_{11}\parallel R_{12}\parallel R_{13}\perp R_{14}\parallel R_{15}-R_{24}\parallel R_{25}\perp R_{21}\parallel R_{22}\parallel R_{23}-\}$$

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1}f_i-I_1-\xi_{L_1}=10-2-6=2$$

(2)确定第 2 回路及其约束度 Δ_2

$$\text{loop}_2\{-R_{31}\parallel R_{32}\parallel R_{33}\perp R_{34}\parallel R_{35}-\}$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2}f_i-I_2-\xi_{L_2}=5-1-5=-1$$

(3)确定第 3 回路及其约束度 Δ_3

$$\text{loop}_3\{-R_{41}\parallel R_{42}\parallel R_{43}\perp R_{44}\parallel R_{45}-\}$$

$$\Delta_3=\sum_{i=1}^{m_3}f_i-I_3-\xi_{L_3}=5-1-5=-1$$

(4)确定机构包含的 BKC 及其耦合度 κ

$$\kappa=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|=\frac{1}{2}(|+2|+|-1|+|-1|)=2$$

这样,该机构只包含一个 BKC;由于 4 个驱动副均在一个 BKC 内,因此,无 I-O 解耦性。

该机构的拓扑结构特性如表 2 所示。

表 2 Ⅰ型 3T1R 机构的拓扑结构特征

Tab.2 Topological structure characteristics of type Ⅰ 3T1R mechanism

POC 集	v	F	N_{BKC}	κ	$N_{ov.}$	I-O 解耦性	制造
$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \end{bmatrix}$	3	4	1	2	2	无	复杂

2.2 Ⅱ型 3T1R 机构

2.2.1 Ⅱ型 3T1R 机构的组成描述

Ⅱ型 3T1R 机构如图 2 所示[19],它可视为用 2 条 RSS 无约束支链,替代图 1 机构中的 2 条约束支链而得。动平台 1 上的转动副 R_{15}、R_{35} 的轴线,须平行于动平台 1 平面的法线;静平台 0 上的转动副 $R_{11}\perp R_{31}$,但 R_{21}、R_{41} 可任意布置。

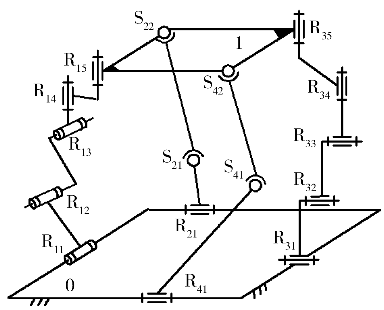

图 2 Ⅱ型 3T1R 机构

Fig.2 Type Ⅱ 3T1R parallel mechanism

2.2.2 Ⅱ型 3T1R 机构的 DOF、$N_{ov.}$、POC 计算

(1)机构的拓扑结构

1、3 支链同为 SOC$\{-R_{i1}\parallel R_{i2}\parallel R_{i3}\perp R_{i4}\parallel R_{i5}-\}$ $(i=1,3)$;其余 2 条无约束支链为 SOC$\{-S-S-R-\}$。

(2)确定支链末端构件的 POC 集

$$M_{b_i}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{i3},R_{i4})) \end{bmatrix}\quad(i=1,3)$$

$$M_{b_i}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\quad(i=2,4)$$

(3)确定第 1 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_1}

①由第 1、3 支链构成第 1 回路

$$\xi_{L_1}=\dim.\{M_{b_1}\cup M_{b_3}\}=$$

$$\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{13},R_{14})) \end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{33},R_{34})) \end{bmatrix}\right\}=\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right\}=6$$

②第 1、3 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC

$$F_{(1-3)}=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{1}\xi_{L_j}=10-6=4$$

$$M_{pa(1-3)}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{13},R_{14})) \end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{23},R_{24})) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

(4)确定第 2 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_2}

①由第 2 支链再构成第 2 回路

$$\xi_{L_2}=\dim.\{M_{pa(1-3)}\cup M_{b_2}\}=$$

$$\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right\}=\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right\}=6$$

②第 1、3、2 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC

$$F_{(1-3-2)}=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{2}\xi_{L_j}=16-6-6=4$$

$$M_{pa(1-3-2)}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

(5)确定第 3 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_3}

由第 4 支链再构成第 3 回路

$$\xi_{L_3}=\dim.\{M_{pa(1-3-2)}\cup M_{b_4}\}=$$

$$\dim.\left\{\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{14})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}\right\}=\dim.\left\{\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}\right\}=6$$

(6)确定机构的自由度

$$F=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{3}\xi_{L_j}=22-6-6-6=4$$

(7)确定机构过约束数 $N_{ov.}$

$$N_{ov}=6v+F-\sum_{i=1}^{m}f_i=6\times3+6-22=2$$

(8)确定并联机构动平台的 POC 集

$$M_{pa}=M_{pa(1-3-2)}\cap M_{b_4}=$$

$$\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{14})\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{14})\end{bmatrix}$$

因此，当取静平台 0 上的 R_{11}、R_{21}、R_{31}、R_{41} 为驱动副时，该机构作三平移一转动的运动。

2.2.3　Ⅱ型 3T1R 机构的 κ 计算、I－O 解耦性分析

(1)确定 loop_1 及其约束度 Δ_1

$$\text{loop}_1\{-R_{11}\parallel R_{12}\parallel R_{13}\perp R_{14}\parallel R_{15}-R_{35}\parallel R_{34}\perp R_{33}\parallel R_{32}\parallel R_{31}-\}$$

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1}f_i-I_1-\xi_{L_1}=10-2-6=2$$

(2)确定 loop_2 及其约束度 Δ_2

$$\text{loop}_2\{-S_{42}-S_{41}-R_{41}-\}$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2}f_i-I_2-\xi_{L_2}=6-1-6=-1$$

(3)确定 loop_3 及其约束度 Δ_3

$$\text{loop}_3\{-S_{22}-S_{21}-R_{21}-\}$$

$$\Delta_3=\sum_{i=1}^{m_3}f_i-I_3-\xi_{L_3}=6-1-6=-1$$

(4)确定机构包含的 BKC 及其耦合度 κ

$$\kappa=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|=\frac{1}{2}(|+2|+|-1|+|-1|)=2$$

因该机构只包含一个 BKC，同样无 I－O 解耦性。

该机构的拓扑结构特性如表 3 所示。

表 3　Ⅱ型 3T1R 机构的拓扑结构特性

Tab. 3　Topological structure characteristics of type Ⅱ 3T1R mechanism

POC 集	v	F	N_{BKC}	κ	$N_{ov.}$	I－O 解耦性	制造
$\begin{bmatrix}t^3\\ r^1\end{bmatrix}$	3	6	1	2	2	无	简单

2.3　Ⅲ、Ⅳ型 3T1R 机构

2.3.1　Ⅲ型 3T1R 机构的组成描述

Ⅲ型 3T1R 机构如图 3 所示[20]，它由动平台 1、静平台 0、4 条结构相同且包含由 4 个转动副组成的平行四边形的复杂支链组成；动平台 1 上的 4 个转动副 R_{13}、R_{23}、R_{43}、R_{33}的轴线须平行于动平台 1 平面的法线；静平台 0 上的 4 个转动副 R_{11}、R_{21}、R_{41}、R_{31}平行于动平台 1 上 4 个转动副的轴线。

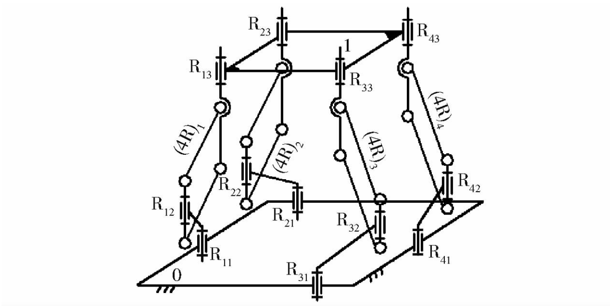

图 3　Ⅲ型 3T1R 机构

Fig. 3　Type Ⅲ 3T1R parallel mechanism

2.3.2　Ⅲ型 3T1R 机构的 DOF、$N_{ov.}$、POC 计算

(1)机构的拓扑结构

4 条支链同为：$\text{SOC}\{-R_{i1}\parallel R_{i2}(-\diamond(4R)_i)-\parallel R_{i3}\}(i=1,2,3,4)$。

(2)确定支链末端构件的 POC 集

$$M_{bi}=\begin{bmatrix}t^1(\perp R_{i1})\\ r^1(\parallel R_{i1})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^1(\perp R_{i2})\\ r^1(\parallel R_{i2})\end{bmatrix}\cup$$

$$\begin{bmatrix}t^1(\parallel\diamond(4R)_i)\\ r^0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^1(\perp R_{i3})\\ r^1(\parallel R_{i3})\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{i1})\end{bmatrix}\quad(i=1,2,3,4)$$

(3)确定第 1 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_1}

①第 1、2 支链构成第 1 回路

$$\xi_{L_1}=\dim.(M_{b1}\cup M_{b2})=$$

$$\dim.\left\{\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{12})\end{bmatrix}\right\}=4$$

②第 1、2 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC

$$F_{(1-2)}=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{1}\xi_{L_1}=8-4=4$$

$$M_{pa(1-2)}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{12})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}$$

(4)确定第 2 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_2}

①由第 3 支链构成第 2 回路

$$\xi_{L_2}=\dim.(M_{pa(1-2)}\cup M_{b3})=$$

$$\dim.\left\{\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{31})\end{bmatrix}\right\}=4$$

②第 1、2、3 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC

$$F_{(1-2-3)}=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{2}\xi_{L_1}=12-(4+4)=4$$

$$M_{pa(1-2-3)}=\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{31})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}$$

(5)确定第 3 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_3}

由第 4 支链构成第 3 回路

$$\xi_{L_3}=\dim.(M_{pa(1-2-3)}\cup M_{b_4})=$$

$$\dim.\left(\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{41})\end{bmatrix}\right)=$$

$$\dim.\left\{\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}\right\}=4$$

(6)确定机构自由度 F

$$F_{(1-4)}=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{3}\xi_{L_1}=16-(4+4+4)=4$$

(7)确定机构的过约束数 $N_{ov.}$

$$N_{ov.}=6\nu-\xi=6\nu+F-\sum_{i=1}^{m}f_i=18+4-16=6$$

(8)确定动平台 POC 集

$$M_{pa(1-4)}=M_{pa(1-3)}\cap M_{b4}=$$

$$\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{41})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}$$

因此,当选取静平台 0 上的 4 个转动副 R_{11}、R_{21}、R_{31}、R_{41} 为驱动副时,该机构作三平移一转动的运动。

2.3.3 Ⅲ 型 3T1R 机构 κ 计算、I - O 解耦性分析

(1)确定 $loop_1$ 及其约束度 Δ_1

$$loop_1\{-R_{11}\parallel R_{12}(-P^{(4R_{14})})\parallel R_{13}-R_{23}\parallel(-P^{(4R_{24})})R_{22}\parallel R_{21}-\}$$

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1}f_i-I_1-\xi_{L_1}=8-2-4=2$$

(2)确定 $loop_2$ 及其约束度 Δ_2

$$loop_2\{-R_{31}\parallel R_{32}(-P^{(4R_{34})})\parallel R_{33}-\}$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2}f_i-I_2-\xi_{L_2}=4-1-4=-1$$

(3)确定 $loop_3$ 及其约束度 Δ_3

$$loop_3\{-R_{41}\parallel R_{42}(-P^{(4R_{44})})\parallel R_{43}-\}$$

$$\Delta_3=\sum_{i=1}^{m_3}f_i-I_3-\xi_{L_3}=4-1-4=-1$$

(4)确定所含 BKC 及其耦合度 κ

$$\kappa=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}|\Delta_j|=\frac{1}{2}(|+1|+|-2|+|+1|)=2$$

该机构含有一个 BKC,同样,无 I - O 解耦性。

该机构的拓扑结构特性如表 4 所示。

同样,用 2 条 RSS 无约束支链,替代图 3 所示机构中的 2 条约束支链,即得到如图 4 所示的Ⅳ型 3T1R 机构[20],显然,该机构的拓扑结构特性同Ⅲ型 3T1R 机构一样,如表 4 所示。

表 4 Ⅲ型 3T1R 机构的拓扑结构特征

Tab. 4 Topological structure characteristics of type Ⅲ 3T1R mechanism

POC 集	ν	F	N_{BKC}	κ	$N_{ov.}$	I - O 解耦性	制造
$\begin{bmatrix}t^3\\r^1\end{bmatrix}$	3	4	1	2	6	无	复杂

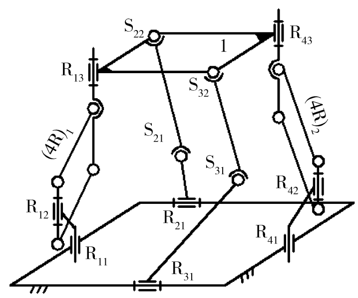

图 4 Ⅳ型 3T1R 机构

Fig. 4 Type Ⅳ 3T1R parallel mechanism

2.4 Ⅴ型、Ⅵ型 3T1R 机构

2.4.1 Ⅴ型 3T1R 机构的组成描述

Ⅴ型 3T1R 机构如图 5 所示[21],它由动平台 1、静平台 0、4 条结构相同且包含由 4 个转动副组成的平行四边形的复杂支链组成;动平台 1 上的 4 个转动副 R_{14}、R_{24}、R_{34}、R_{44} 的轴线须平行于动平台 1 平面的法线;静平台 0 上的转动副配置为 $R_{11}\perp R_{31}$、$R_{21}\perp R_{41}$。

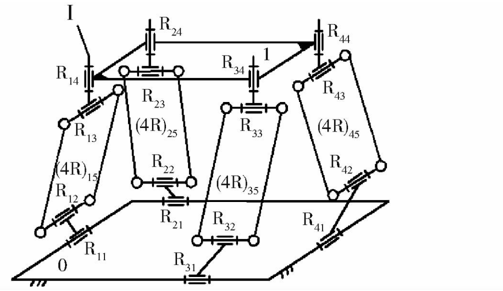

图 5 Ⅴ型 3T1R 机构

Fig. 5 Type Ⅴ 3T1R parallel mechanism

2.4.2 Ⅴ型 3T1R 机构的 DOF、$N_{ov.}$、POC 计算

(1)机构拓扑结构

4 条支链相同,为:SOC$\{-R_{i1}-R_{i2}(-\Diamond(4R)_{i5}-)\parallel R_{i3}\perp R_{i4}-\}$$(i=1,2,3,4)$。

(2)确定支链末端构件的 POC 集

$$M_{b_i}=\begin{bmatrix}t^3\\r^1(\parallel R_{i1})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^1(\perp R_{i4})\\r^1(\parallel R_{i4})\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}t^3\\r^2(\parallel\Diamond(R_{i1},R_{i4}))\end{bmatrix}\quad(i=1,2,3,4)$$

(3)确定第 1 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_1}

①由第 1、2 支链构成第 1 回路

$$\xi_{L_1}=\dim.(M_{b1}\cup M_{b2})=\dim.\left\{\begin{bmatrix}t^3\\r^2(\parallel\Diamond(R_{11},R_{14}))\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\r^2(\parallel\Diamond(R_{21},R_{24}))\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}t^3\\r^3\end{bmatrix}=6$$

②第 1、2 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{1} \xi_{L_1} = 10 - 6 = 4$$

$$M_{pa(1-2)} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{11},R_{14})) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{21},R_{24})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel\diamondsuit(R_{11},R_{14})\cap\diamondsuit(R_{21},R_{24})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

(4)确定第 2 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_2}

①由第 3 支链构成第 2 回路

$$\xi_{L_2} = \dim.(M_{pa(1-2)} \cup M_{b3}) = \dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{31},R_{34})) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{31},R_{34})) \end{bmatrix} = 5$$

②第 1、2、3 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC

$$F_{(1-3)} = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{2} \xi_{L_1} = 15 - (6+5) = 4$$

$$M_{pa(1-3)} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{31},R_{34})) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

(5)确定第 3 个回路的独立位移方程数 ξ_{L3}

由第 4 支链构成第 3 回路

$$\xi_{L_3} = \dim.(M_{pa(1-3)} \cup M_{b_4}) = \dim.\left(\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{41},R_{44})) \end{bmatrix}\right) = \dim.\left(\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{41},R_{44})) \end{bmatrix}\right) = 5$$

(6)确定机构自由度 F

$$F_{(1-4)} = \sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{3} \xi_{L_1} = 20 - (6+5+5) = 4$$

(7)确定机构的过约束数 $N_{ov.}$

$$N_{ov.} = 6\nu - \xi = 6\nu + F - \sum_{i=1}^{m} f_i = 18 + 4 - 20 = 2$$

(8)确定动平台 POC 集

$$M_{pa(1-4)} = M_{pa(1-3)} \cap M_{b4} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel\diamondsuit(R_{41},R_{44})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{bmatrix}$$

因此，取静平台 0 上的 4 个转动副 R_{11}、R_{21}、R_{41}、R_{31}为驱动副时，该机构作三平移一转动运动。

2.4.3　V 型 3T1R 机构的 κ 计算、I－O 解耦性分析

(1)确定 loop_1及其约束度 Δ_1

$$\text{loop}_1\{-R_{11}\parallel R_{12}(-P^{(4R)})\parallel\overbrace{R_{13}\perp R_{14}}-R_{21}\parallel R_{22}(-P^{(4R)})\parallel\overbrace{R_{23}\perp R_{24}}-\}$$

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L_1} = 10 - 2 - 6 = 2$$

(2)确定 loop_2及其约束度 Δ_2

$$\text{loop}_2\{-R_{31}\parallel R_{32}(-P^{(4R)})\parallel\overbrace{R_{33}\perp R_{34}}-\}$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L_2} = 5 - 1 - 5 = -1$$

(3)确定 loop_3及其约束度 Δ_3

$$\text{loop}_3\{-R_{41}\parallel R_{42}(-P^{(4R)})\parallel\overbrace{R_{43}\perp R_{44}}-\}$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L_3} = 5 - 1 - 5 = -1$$

(4)确定机构 BKC 及其耦合度 κ

$$\kappa = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}|\Delta_j| = \frac{1}{2}|2 + |-1| + |-1|| = 2$$

因该机构只包含一个 BKC，也无 I－O 解耦性。该机构的拓扑结构特性如表 5 所示。

表 5　V 型 3T1R 机构的拓扑结构特性

Tab.5　Topological structure characteristics of type V 3T1R mechanism

POC 集	ν	F	N_{BKC}	κ	$N_{ov.}$	I－O 解耦性	制造
$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \end{bmatrix}$	3	4	1	2	2	无	复杂

需要说明的 3 种情况是：

(1)同样，用 2 条 RSS 无约束支链，替代图 5 所示机构中的 2 条约束支链，即得到如图 6 所示的Ⅵ－1 型 3T1R 机构[21]，显然，该机构具有与 V 型 3T1R 机构一样的拓扑结构特性，如表 5 所示。

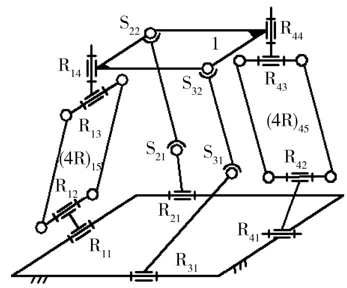

图 6　Ⅵ－1 型 3T1R 机构

Fig.6　Type Ⅵ－1 3T1R parallel mechanism

(2)将图 5 所示机构中的平行四边形复杂支链短边上的转动副，例：支链 I 上的转动副 R_{13}及其两端的转动副，等效为 2 个球副，如图 7 中的 S_a、S_b，即成为图 7 所示的Ⅵ－2 型 3T1R 机构[22]，显然，它们

具有与 V 型 3T1R 机构相同的 DOF、POC、κ、$N_{ov.}$ 及 I－O解耦性。

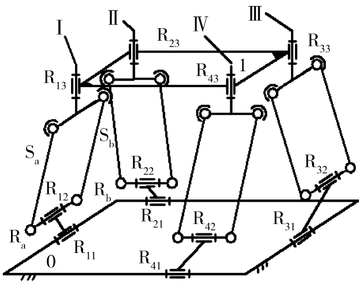

图 7 Ⅵ－2 型 3T1R 机构

Fig. 7 Type Ⅵ－2 3T1R parallel mechanism

(3)将图 7 所示机构中的 2 条垂直配置的复杂支链，例：Ⅱ、Ⅲ支链，用 R－S－S 无约束支链代替（例，图 8 中的 $R_{21}-S_{22}-S_{23}$，$R_{41}-S_{42}-S_{43}$），即成为图 8 所示的Ⅵ－3 型 3R1T 机构[23]，同样，其 DOF、POC、$N_{ov.}$、κ、BKC、I－O 解耦性，与图 5～7 所示机构相同，其计算从略。

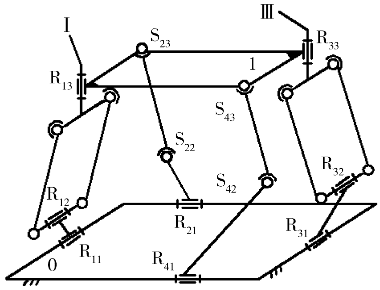

图 8 Ⅵ－3 型 3T1R 机构

Fig. 8 Type Ⅵ－3 3T1R parallel mechanism

2.5 Ⅶ型 3T1R 机构

2.5.1 Ⅶ型 3T1R 机构的组成描述

Ⅶ型 3T1R 机构如图 9 所示[24]，它由动平台 1、静平台 0、2 条 RSS 型无约束支链，以及 2 条包含由 4 个球副组成的平行四边形的复杂支链组成；装配时，为使 4 个球副 S 的球心构成平行四边形，必须在平行四边形中配置一杆带两转动副（R_a、R_b）的结构（其长度等于其一边长度即可）；动平台 1 上的转动 R_{12}、R_{22}的轴线须平行于动平台 1 平面的法线；静平台 0 上的转动副 $R_{11}\perp R_{21}$，但 R_{31}、R_{41}可任意布置。

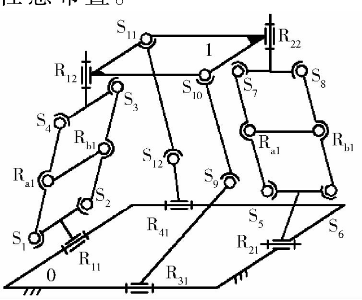

图 9 Ⅶ 型 3T1R 机构

Fig. 9 Type Ⅶ 3T1R parallel mechanism

2.5.2 Ⅶ型 3T1R 机构的 DOF、$N_{ov.}$、POC 计算

(1)机构的拓扑结构

2 条复杂支链为 $HSOC_1\{-R_{11}\parallel\diamond(-S_1,S_2,S_3,S_4)-R_{12}\}$、$HSOC_2\{-R_{21}\parallel\diamond(-S_5,S_6,S_7,S_8)-R_{22}\}$；其余 2 条为无约束支链 $SOC\{-R_{31}-S_9-S_{10}-\}$、$SOC\{-R_{41}-S_{12}-S_{11}-\}$。

(2)确定支链末端构件的 POC 集、$HSOC_1$、$HSOC_2$ 末端构件的 POC 集为

$$M_{b1}=\begin{bmatrix}t^1(\perp R_{12})\\ r^1(\parallel R_{12})\end{bmatrix}\cup$$

$$\begin{bmatrix}t^1(\parallel\diamond(-S_1,S_2,S_3,S_4))\cup t^1(\perp(-S_1,S_4))\\ r^1(\parallel -S_1,S_4)\end{bmatrix}\cup$$

$$\begin{bmatrix}t^1(\perp R_{11})\\ r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{12})\cup r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}$$

同理 $$M_{b2}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{22})\cup r^1(\parallel R_{21})\end{bmatrix}$$

2 条无约束支链末端构件的 POC 集为

$$M_{b3}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^1(\perp R_{31})\\ r^1(\parallel R_{31})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}$$

同理 $$M_{b4}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}$$

(3)确定第 1 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_1}

①由第 1、2 支链构成第 1 回路

$$\xi_{L_1}=\dim.(M_{b1}\cup M_{b2})=$$

$$\dim.\left(\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{12})\cup r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}\cup\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{22})\cup r^1(\parallel R_{21})\end{bmatrix}\right)=\dim.\left(\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}\right)=6$$

②第 1、2 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC 为

$$F=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{1}\xi_{L_j}=10-6=4$$

$$M_{pa(1-2)}=M_{b_1}\cap M_{b_2}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{12})\cup r^1(\parallel R_{11})\end{bmatrix}\cap$$

$$\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{22})\cup r^1(\parallel R_{21})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{12})\end{bmatrix}$$

(4)确定第 2 个回路的独立位移方程数 ξ_{L_2}

①由第 3 支链构成第 2 回路

$$\xi_{L_2}=\dim.(M_{pa(1-2)}\cup M_{b3})=$$

$$\dim.\left(\begin{bmatrix}t^3\\ r^1(\parallel R_{12})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}\right)=\dim\left(\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}\right)=6$$

②第 1、2、3 支链构成的子 PKM 的 DOF 和 POC

$$F=\sum_{i=1}^{m} f_{\mathrm{i}}-\sum_{j=1}^{2} \xi_{L_j}=16-12=4$$

$$M_{pa(1-3)}=M_{pa(1-2)} \cap M_{b_3}=$$

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{12}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{12}) \end{bmatrix}$$

(5)确定第 3 个独立回路的独立位移方程数 ξ_{L_3}

由第 4 支链构成第 3 回路

$$\xi_{L_3}=\dim.(M_{pa(1-3)} \cup M_{b4})=$$

$$\dim.\left(\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{12}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right)=\dim.\left(\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}\right)=6$$

(6)确定机构自由度 F

$$F=\sum_{i=1}^{m} f_i-\sum_{j=1}^{3} \xi_{L_j}=22-18=4$$

(7) 确定机构的过约束数 $N_{\mathrm{ov.}}$

$$N_{\mathrm{ov.}}=6\nu-\xi=6\nu+F-\sum_{i=1}^{m} f_i=18+4-20=2$$

(8)确定动平台 POC 集

$$M_{pa}=M_{pa(1-3)} \cap M_{b4}=$$

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{12}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{12}) \end{bmatrix}$$

因此，当取 R_{11}、R_{21}、R_{31}、R_{41} 为驱动副时，该机构作三平移一转动的运动。

2.5.3　Ⅶ型 3T1R 机构 κ 计算、I－O 解耦性分析

(1)确定第 1 回路及其约束度 Δ_1

$$\text{loop}_1\{-\mathrm{R}_{11} \parallel \mathrm{P}^{(4s-2r)}-\mathrm{P}^{(4s-2r)}-\mathrm{P}^{(4s-2r)}-\mathrm{R}^{(4s-2r)}-\mathrm{R}_{12}-\mathrm{R}_{21} \parallel \mathrm{P}^{(4s-2r)}-\mathrm{P}^{(4s-2r)}-\mathrm{P}^{(4s-2r)}-\mathrm{R}^{(4s-2r)}-\mathrm{R}_{22}\}$$

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1} f_i-I_1-\xi_{L_1}=8-2-6=0$$

(2)确定第 2 回路及其约束度 Δ_2

$$\text{loop}_2\{-\mathrm{R}_{31}-\mathrm{S}_9-\mathrm{S}_{10}-\}$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2} f_i-I_2-\xi_{L_2}=6-1-6=-1$$

(3)确定第 3 回路及其约束度 Δ_3

$$\text{loop}_3\{-\mathrm{R}_{41}-\mathrm{S}_{12}-\mathrm{S}_{11}-\}$$

$$\Delta_3=\sum_{i=1}^{m_3} f_i-I_3-\xi_{L_3}=6-1-6=-1$$

(4)确定所含基本运动链(BKC)及耦合度 κ

$$\kappa=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}|\Delta_j|=\frac{1}{2}(|+1|+|-2|+|+1|)=2$$

该机构仅含有一个 BKC，也无 I－O 解耦性。该机构的拓扑结构特性如表 6 所示。

实现 SCARA 运动的 X_4 机构[17]，具有 4 条完全相同的上述复杂支链；而该机构仅具有 2 条复杂支链，因此，该机构可看作是 X_4 并联机构的改进与优化，其构造简单，制造维修更为容易。

表 6　Ⅶ型 3T1R 并联机构的拓扑结构特性

Tab. 6　Topological structure characteristics of type Ⅶ 3T1R mechanism

POC 集	ν	F	N_{BKC}	κ	$N_{\mathrm{ov.}}$	I－O 解耦性	制造
$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \end{bmatrix}$	3	4	1	2	2	无	复杂

至此，已完成 7 个(Ⅰ～Ⅶ)具有较好实用价值的 4－DOF 三平移一转动并联机构的拓扑结构特性分析，为寻求其低耦合度的新机型设计与优化奠定了基础。

3　基于结构降耦的拓扑优化

由第 2 小节分析可知，这 7 个单动平台的 3T1R 机构，其耦合度均较高，为 $\kappa=2$，这意味着这些机构运动学正解或动力学正、逆解，其代数求解困难，数值求解也需要用二维搜索法才能求解，计算过程不易收敛并占时较多[2, 26]。

为此，本文运用结构降耦方法之一——机构运动副复合法[27－28, 30]，对这 7 种 3T1R 机构进行拓扑结构降耦，得到了 14 个结构更简单、耦合度低($\kappa=1$)、运动学或动力学求解不复杂、但 DOF 和 POC 均不变的新机构。限于篇幅，现仅举以下 2 例说明。

3.1　I 型 3T1R 并联机构的降耦设计

将图 1 所示的 I 型 3T1R 并联机构中，垂直配置的 2 条支链在动平台 1 上的转动副 R_{15} 和 R_{25} 重合(称为：一次降耦)，形成一条含空间回路的复杂支链，得到的机构如图 10 所示[31]，显然，机构的 DOF、POC、$N_{\mathrm{ov.}}$ 等均不变，但耦合度发生了变化，现计算如下：

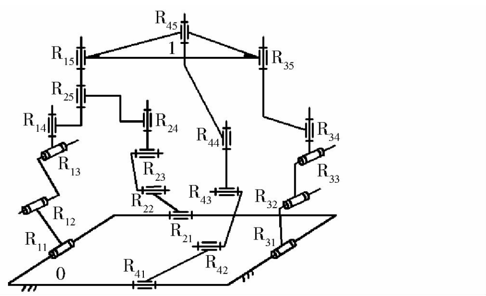

图 10　一次降耦后的 I 型 3T1R 机构

Fig. 10　Once decoupled type Ⅰ 3T1R parallel mechanism

(1)确定第 1 回路及其约束度 Δ_1

$$\text{loop}_1\{-\mathrm{R}_{11} \parallel \mathrm{R}_{12} \parallel \mathrm{R}_{13} \perp \mathrm{R}_{14} \parallel \mathrm{R}_{25} \parallel \mathrm{R}_{24} \perp \mathrm{R}_{23} \parallel \mathrm{R}_{22} \parallel \mathrm{R}_{21}-\}$$

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1} f_i-I_1-\xi_{L_1}=9-2-6=1$$

(2)确定第2回路及其约束度 Δ_2

$$\text{loop}_2\{-R_{15}\parallel R_{35}\parallel R_{34}\perp R_{33}\parallel R_{32}\parallel R_{31}\}$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2}f_{\mathrm{i}}-I_2-\xi_{L_2}=6-1-5=0$$

(3)确定第3回路及其约束度 Δ_3

$$\text{loop}_3\{-R_{41}\parallel R_{42}\parallel R_{43}\perp R_{44}\parallel R_{45}-\}$$

$$\Delta_3=\sum_{i=1}^{m_3}f_i-I_3-\xi_{L_3}=5-1-5=-1$$

(4)机构的耦合度 κ

$$\kappa=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}|\Delta_j|=\frac{1}{2}(1+|-1|)=1$$

因此,降耦后的机构仍由一个 BKC 组成,但其耦合度已降为 $\kappa=1$。

进一步,对图10所示机构中另2条垂直配置的支链在动平台1上的转动副 R_{35} 和 R_{45} 重合(称为:二次降耦),则形成第2条含空间回路的复杂支链,得到如图11所示的机构[32],其耦合度计算为:

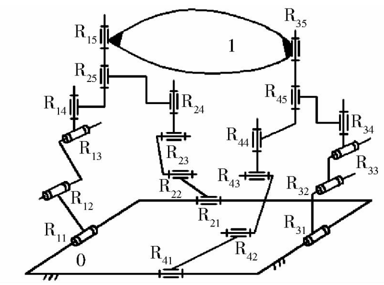

图11 二次降耦后的Ⅰ型3T1R机构

Fig. 11 Twice decoupled type Ⅰ 3T1R parallel mechanism

(1)确定第1回路及其约束度 Δ_1

$$\text{loop}_1\{-R_{11}\parallel R_{12}\parallel R_{13}\perp R_{14}\parallel R_{25}\parallel R_{24}\perp R_{23}\parallel R_{22}\parallel R_{21}-\}$$

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1}f_i-I_1-\xi_{L_1}=9-2-6=1$$

(2)确定第2回路及其约束度 Δ_2

根据基于约束度 Δ 最小的回路选择原则[2],第2回路不应选复杂支链2构成的回路(其约束度为1),而应为

$$\text{loop}_2\{-R_{15}\parallel R_{35}\parallel R_{44}\perp R_{43}\parallel R_{42}\parallel R_{41}-\}$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2}f_i-I_2-\xi_{L_2}=6-1-5=0$$

(3)确定第3回路及其约束度 Δ_3

$$\text{loop}_3\{-R_{45}\parallel R_{34}\perp R_{33}\parallel R_{32}\parallel R_{31}-\}$$

$$\Delta_3=\sum_{i=1}^{m_3}f_i-I_3-\xi_{L_3}=5-1-5=-1$$

(4)机构的耦合度 κ

$$\kappa=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}|\Delta_j|=\frac{1}{2}(1+|-1|)=1$$

因此,该机构仍含1个 BKC,其耦合度也已降为 $\kappa=1$;但机构的自由度为 $F=4$,过约束数 $N_{\text{ov.}}=2$,POC 集为三平移一转动,仍没有改变。

需要说明的是:图1所示Ⅰ型3T1R机构的动平台1和支链有4个转动副连接,而图10、11所示机构的动平台1和支链连接的转动副,分别减少为3、2个,也许会增大动平台的工作灵活性和工作空间,这有待详细分析。

3.2 Ⅱ型3T1R并联机构的降耦设计

将图2所示Ⅱ型3T1R并联机构中,垂直配置的2条支链在动平台1上的转动副 R_{15} 和 R_{35} 重合(一次降耦),则得到如图12所示的降耦机构[31],其耦合度计算如下:

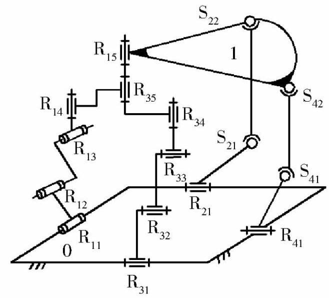

图12 一次降耦后的Ⅱ型3T1R机构

Fig. 12 Once decoupled type Ⅱ 3T1R parallel mechanism

(1)确定第1回路及其约束度 Δ_1,同图10所示机构,为

$$\text{loop}_1\{-R_{11}\parallel R_{12}\parallel R_{13}\perp R_{14}\parallel R_{35}\parallel R_{34}\perp R_{33}\parallel R_{32}\parallel R_{31}-\}$$

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1}f_i-I_1-\xi_{L_1}=9-2-6=1$$

(2)确定第2回路及其约束度 Δ_2

$$\text{loop}_2\{R_{15}-S_{22}-S_{21}-R_{21}-\}$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2}f_i-I_2-\xi_{L_2}=7-1-6=0$$

(3)确定第3回路及其约束度 Δ_3

$$\text{loop}_3\{-S_{42}-S_{41}-R_{41}-\}$$

$$\Delta_3=\sum_{i=1}^{m_3}f_i-I_3-\xi_{L_3}=6-1-6=-1$$

(4)机构耦合度 κ

$$\kappa=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}|\Delta_j|=\frac{1}{2}(1+0+|-1|)=1$$

因此,该机构仅含1个 BKC,其耦合度已降为1。进一步,将图12所示机构的其它2条 S-S-R 无约束支链在动平台1上的球副 S_{22} 和 S_{42} 重合(二次降耦),形成第2条含空间回路的复杂支链,得到图13所示的机构[31],同样有:

(1)确定第1回路及其约束度 Δ_1,同上,为

$$\text{loop}_1\{-R_{11}\parallel R_{12}\parallel R_{13}\perp R_{14}\parallel R_{35}\parallel R_{34}\perp R_{33}\parallel R_{32}\parallel R_{31}-\}$$

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1}f_i-I_1-\xi_{L_1}=9-2-6=1$$

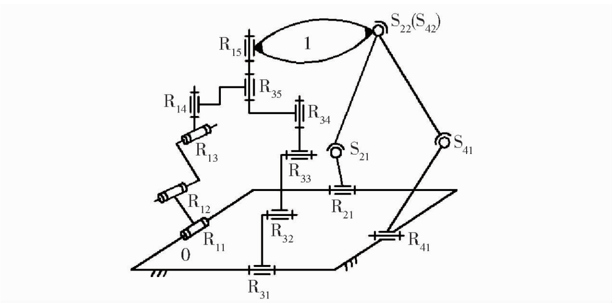

图 13　二次降耦后的Ⅱ型 3T1R 机构
Fig. 13　Twice decoupled type Ⅱ 3T1R parallel mechanism

(2) 确定第 2 回路及其约束度 Δ_2，同上，为

$$\mathrm{loop}_2\{R_{15}-S_{22}-S_{21}-R_{21}-\}$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2} f_i-I_2-\xi_{L_2}=7-1-6=0$$

(3) 确定第 3 回路及其约束度 Δ_3

$$\mathrm{loop}_3\{-S_{42}-S_{41}-R_{41}-\}$$

$$\Delta_3=\sum_{i=1}^{m_3} f_i-I_3-\xi_{L_3}=6-1-6=-1$$

(4) 机构耦合度 κ

$$\kappa=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}|\Delta_j|=\frac{1}{2}(1+0+|-1|)=1$$

即该机构耦合度已降为 $\kappa=1$，显然，机构的位置正解以及动力学分析较为容易，但机构的 POC 和自由度($F=4$)都没变，但简化了机构的结构。其复合的球副可采用文献[33]提出的“易制造结构”来设计与制造，如图 14 所示。

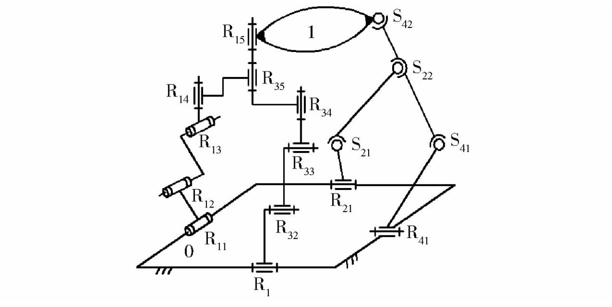

图 14　二次降耦后的Ⅱ型 3T1R 机构易制造结构
Fig. 14　Twice decoupled type Ⅱ 3T1R parallel mechanism (easy fabrication structure)

其他 5 种 3T1R 机构的降耦设计，可同样处理，限于篇幅，从略。

这样，共得到 14 个低耦合度($\kappa=1$)机型，其中，动平台具有 3 个运动副的有 7 个，另 7 个为动平台具有 2 个运动副。这样，7 个耦合度较大的($\kappa=2$)以及 14 个低耦合度($\kappa=1$)的 4-DOF 3T1R 原创性新机构，构成了可实现 SCARA 运动的机构库，为其进一步研究、优选、设计与应用奠定了良好的理论基础。

4　结论

(1) 根据基于方位特征(POC)和序单开链(SOC)的并联机构拓扑结构设计理论与方法，对提出的一类 7 个具有较好实用价值的 SCARA 并联机构，进行了拓扑结构分析，揭示了其 POC 集、自由度(含驱动副选取)、$N_{\mathrm{ov.}}$、耦合度、I－O 解耦性等 5 个最主要的拓扑特征，发现其耦合度均较大为 $\kappa=2$，表明其运动学位置正解和动力学求解十分复杂。

(2) 基于结构降耦原理，继而又对上述 $\kappa=2$ 的这 7 个机构，通过动平台上转动副或球副的复合，进行了拓扑结构降耦优化，又得到了 14 个结构更简单、耦合度更低($\kappa=1$)而 POC、DOF 等保持不变的 3T1R 原创性机构，一方面，它们的运动学正解及动力学正反解的代数求解难度大大降低，其数值解可用一维搜索法方便求得；另一方面，大大丰富了 SCARA 并联机构库，为 SCARA 并联机构类型优选、运动学与动力学综合和分析，以及设计和应用提供了基础。

(3) 分析并揭示并联机构的方位特征集(POC 集)及其维数、独立回路数 v、独立位移方程数 ξ_{L_i}、过约束数 $N_{\mathrm{ov.}}$、自由度(DOF)类型和数目 F、基本运动链(BKC)类型及其数目、BKC 耦合度 κ、I－O 解耦性、消极运动副、驱动副选择、冗余度等 12 个指标，它能为并联机构类型优选及其性能评价提供重要依据，为机构的优选、运动学与动力学的求解提供明确的方向，可在机构选型阶段就能大致了解机构的一些运动学和动力学性能，大大减少机构创新设计阶段反复、冗长的运动学和动力学综合、分析复杂性及其计算时间，因此，机构的拓扑结构特征分析，应为并联机构研究与开发应用中的一个重要环节。

参　考　文　献

1　杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京：机械工业出版社，2004.
2　杨廷力，刘安心，罗玉峰，等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京：科学出版社，2012.
3　HUANG Z, LI Q C. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method [J]. The International Journal of Robotics Research, 2003, 22(1): 59－79.
4　高峰，杨加伦，葛巧德. 并联机器人型综合的 GF 集理论[M]. 北京：科学出版社，2011.
5　KONG X, GOSSELIN C M. Type synthesis of parallel mechanisms[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2007: 45－53.
6　HERVE J M. Analyse structurelle des mecanismes par groupe de deplacements [J]. Mechanism and Machine Theory, 1978, 13(4):

437 – 450.
7 GOUGU G. Structural synthesis of parallel robots. Part 1: Methodology[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
8 ABB. IRB 360 Flexpicker[EB/OL]. [2015 – 05 – 06] http://www.new.abb.com/products/robotics/industrials-robots/irb-360.
9 CLAVEL R. Device for the movement and positioning of an element in space: US,4976582[P]. 1990 – 12 – 11.
10 PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4 – DOF parallel robots[C] // Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 1999: 508 – 513.
11 KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4: a new parallel mechanism for SCARA motions[C] // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2003: 1875 – 1880.
12 NABAT V, COMPANY O, KRUT S, et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place[C] // Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005: 1202 – 1207.
13 赵铁石,黄真. 欠秩空间并联机器人输入选取的理论和应用[J]. 机械工程学报,2000,36(10):81 – 85.
ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. Theory and application of selecting actuating components of spatial parallel mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(10): 81 – 85. (in Chinese)
14 金琼,杨廷力,刘安心,等. 基于单开链单元的三平移一转动并联机器人机构型综合及机构分类[J]. 中国机械工程,2001,12(9):1038 – 1043.
JIN Qiong, YANG Tingli, LIU Anxin, et al. Structural synthesis and classification of the 3-DOF translational parallel robot mechanism based on the units of single-opened-chain[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 12(9): 1038 – 1043. (in Chinese)
15 杨廷力,金琼,罗玉峰,等. 用于虚轴机床与机器人等的一类(三平移一转动)并联机构:CN,1528568[P]. 2004 – 09 – 15.
16 黄田,刘海涛,李曚. 五自由度机器人:CN,1709657 [P]. 2005 – 08 – 21.
17 刘辛军,谢福贵,王立平,等. 一种可实现 SCARA 运动的四自由度单动平台并联机构:CN,201210435375.1[P]. 2012 – 11 – 02.
18 XIE F G, LIU X J. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform [J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2015, 7(4): 041015.
19 沈惠平,杨廷力,孟庆梅,等. 一种三平移一转动并联机器人操作手:CN,201510564195.7 [P]. 2015 – 09 – 08.
20 沈惠平,杨廷力,李菊,等. 一种三平移一转动并联机器人装置:CN,201510567133.1 [P]. 2015 – 09 – 08.
21 沈惠平,杨廷力,邓嘉鸣,等. 一种三平移一转动并联机器人机构:CN,201510566039.4 [P]. 2015 – 09 – 08.
22 沈惠平,杨廷力,邵国伟,等. 一种三平移一转动并联机构机械手:CN,201510640394.X [P]. 2015 – 10 – 09.
23 沈惠平,杨廷力,李云峰,等. 一种三平移一转动并联机器人抓放器:CN,201510648948.2 [P]. 2015 – 10 – 09.
24 沈惠平,杨廷力,朱伟,等. 一种三平移一转动并联机器人平台:CN,201510566840.9 [P]. 2015 – 09 – 08.
25 沈惠平,杨廷力,朱小蓉,等. 一种三平移一转动并联机器人:CN,201510564382.5 [P]. 2015 – 09 – 08.
26 沈惠平,尹洪波,李菊,等. 基于方位特征方法的范例并联机构的拓扑特征分析及其启示与应用[J]. 机械工程学报,2015,51(13):101 – 115.
SHEN Huiping, YIN Hongbo, LI Ju, et al. Position and orientation characteristic based method and enlightenment for topology characteristic analysis of typical parallel mechanisms and its application[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 101 – 115. (in Chinese)
27 SHEN Huiping, YANG Liangjie, MENG Qingmei, et al. Topological structure coupling-reducing of parallel mechanisms[C] // 2015 Iftomm World Congress, 2015.
28 沈惠平,朱小蓉,尹洪波,等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法研究[J]. 机械工程学报,2016,52(23):102 – 113.
SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Study on the principle and design method for structure coupling-reducing of parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23): 102 – 113. (in Chinese)
29 沈惠平,熊坤,孟庆梅,等. 并联机构运动解耦设计方法与应用研究[J/OL]. 农业机械学报,2016,47(6):348 – 356. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20160646&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2016.06.046.
SHEN Huiping, XIONG Kun, MENG Qingmei, et al. Principle, design method and novel configurations for decoupled parallel mechanisms[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 348 – 356. (in Chinese)
30 尹洪波,沈惠平,邓嘉鸣,等. 球面并联机构的结构降耦及其位置正解求解[J]. 机械科学与技术,2015,34(1):51 – 55.
YIN Hongbo, SHEN Huiping, DENG Jiaming, et al. The reducing in structure coupling and forward position analysis for the spherical parallel mechanism[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2015, 34(1): 51 – 55. (in Chinese)
31 沈惠平,朱伟,曾氢菲,等. 一种低耦合度三运动副动平台的三平移一转动并联机器人操作手:CN,201610141778.3[P]. 2016 – 03 – 15.
32 沈惠平,孙驰宇,杨廷力,等. 一种低耦合度两运动副动平台的三平移一转动并联机器人操作手:CN,201610140160.5[P]. 2016 – 03 – 15.
33 YU Tongzhu, SHEN Huiping. An easily manufactured structure and its analytic solutions for forward and inverse position of 1 – 2 – 3 – SPS type 6-DOF basic parallel mechanism[C] // Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, 2012: 1194 – 1199.