

2RRUR – 2RSS 并联机构结构特性与运动学分析

朱小蓉 宋月月 孙 晨 沈惠平 杨廷力
(常州大学机械工程学院, 常州 213164)

摘要: 基于方位特征集设计理论和方法,设计了一种全由转动副组成的、动平台能实现空间三平移—转动的无过约束并联机器人机构,对其进行拓扑结构特性分析;导出了机构位置逆解方程和雅可比矩阵,通过算例和 Pro/E 的仿真结果,验证了模型的正确性;并进一步对该并联机构作业空间的几何性质、转动灵活性及奇异轨迹进行了分析。分析表明,该机构具有几何形状规则的作业空间及较好的运动灵活性,但在工作空间内具有发生位形奇异的可能,因此,在运动过程中应当避开特殊运动位置以避免奇异位形的发生。

关键词: 并联机构; 结构特性; 位置反解; 工作空间; 奇异轨迹; 转动能力

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2016)12-0408-08

Structural Characteristics and Kinematic Analysis for Novel 2RRUR – 2RSS Parallel Mechanism

Zhu Xiaorong Song Yueyue Sun Chen Shen Huiping Yang Tingli
(School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: A new non-overstrained four-DOF parallel kinematic mechanism (PKM) for realizing three-dimensional translations and rotation is presented, which is composed only with revolute joints. The topological structure characteristics, such as the POC set of moving platform, mobility and the mechanism coupling degree, are first obtained based on the design theory of position and orientation characteristic (POC) set. By means of the D – H matrix, the kinematic inverse equations of the PKM are established and Jacobian matrix, singularity are subsequently derived and analyzed. The virtual mechanism is modeled and the kinematics is simulated by using Pro/E software. By comparing the theoretical calculation analysis of examples with the results derived from simulation, the inverse positional solutions are proved to be correct. Based on the kinematic inverse equations, the 3D boundary search method is used to describe the geometrical feature and cross section of constant orientation workspace. Furthermore, the distribution of singularity position is presented and the rotational capacity among the workspace is evaluated. The results show that the workspace has regular geometrical shape and the rotational capacity is satisfactory, but the singular may appear in the workspace. Hence, it is necessary to obtain the singularity-free workspace of the PKM, which can guarantee the mechanism to avoid singularities. The study has guiding significance and reference value to the design and control of this kind of PKM.

Key words: parallel kinematic mechanism; structural characteristics; position inverse solution; workspace; singularity locus; rotational capacity

引言

在 Delta 机构基础上,通过动静平台间增加一

条 RRUR 支链或在动平台上串接一转动副,可实现空间三自由度移动和绕 z 轴线的转动,亦可称作 Schönflies 运动^[1]。1988 年,CLAVEL 将 Delta 机器

因此,该机构自由度为4,具有沿 x 、 y 、 z 3 个方向的移动和绕 z 轴线的转动。

1.3 BKC 分析及耦合度 κ 计算

(1)确定 SOC₁
可能构成第 1 单开链 SOC₁的情形有 3 种:
①SOC₁ { - R₁₁ || R₁₂ || R₁₃ ⊥ R₁₄ || R₁₅ - R₂₅ || R₂₄ ⊥ R₂₃ || R₂₂ || R₂₁ - } 约束度为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_i} f_i - I_i - \xi_{L1} = 10 - 2 - 6 = 2$$

②SOC₁ { - R₁₁ || R₁₂ || R₁₃ ⊥ R₁₄ || R₁₅ - S₃₃ - S₃₂ - R₃₁ - } 约束度为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_i} f_i - I_i - \xi_{L1} = 11 - 2 - 6 = 3$$

③SOC₁ { - R₄₁ - S₄₂ - S₄₃ - S₃₃ - S₃₂ - R₃₁ - } 约束度为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_i} f_i - I_i - \xi_{L1} = 12 - 2 - 6 = 4$$

按照机构拓扑结构分解算法,第 1 单开链应取 SOC₁ { - R₁₁ || R₁₂ || R₁₃ ⊥ R₁₄ || R₁₅ - R₂₅ || R₂₄ ⊥ R₂₃ || R₂₂ || R₂₁ - },SOC₁ 的约束度为 $\Delta_1 = 2$ 。

(2)确定 SOC₂
第 2 个单开链有 2 种取法,由于拓扑结构的对称性可取任一种。这里取第 2 个单开链为

$$\text{SOC}_2 \{ - R_{31} - S_{32} - S_{33} - \}$$

其约束度为

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_i} f_i - I_i - \xi_{L1} = 6 - 1 - 6 = -1$$

(3)确定 SOC₃
第 3 个单开链 SOC₃ 只有一种取法

$$\text{SOC}_3 \{ - R_{41} - S_{42} - S_{43} - \}$$

其约束度为

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_i} f_i - I_i - \xi_{L1} = 6 - 1 - 6 = -1$$

(4)确定机构耦合度 κ
$$\kappa = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 |\Delta_j| = \frac{1}{2} (|+2| + |-1| + |-1|) = 2$$

根据文献[11]可知,耦合度 κ 表明了机构运动学、动力学以及控制问题的复杂程度, κ 值越大,机构越复杂。现 $\kappa = 2$,表明机构的运动学正解求解复杂,但可通过 2 维搜索法求解 2 维方程组获得,本文仅考虑位置逆解。

同样,根据文献[12-13]可计算机构其他拓扑结构特征,如表 1 所示。篇幅有限,不详述。

2 机构位置反解

建立如图1所示的定坐标系 $Oxyz$ 和动坐标系

表 1 其他主要拓扑结构特征
Tab.1 Other main topological structural characteristics

POC 集 M_{Pa}	$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 (\parallel R_{15}) \end{bmatrix}$
方位特征集维数 $\dim, \{M\}$	4
独立回路数 ν	3
独立位移方程数 ξ	18
过约束数	0
冗余度	0

PXYZ, O 点、 P 点分别为两正方形平台的中心点。记定平台的 4 个顶点分别为 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 ,动平台的 4 个顶点分别为 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 。 x 轴与 A_1A_2 共线并指向 A_2 , y 轴平行于 R_{21} 轴线且正方向指向 A_3 , z 轴与定平台法线重合且朝上为正方向; X 轴与 B_1B_2 共线并指向 B_2 , Y 轴与 B_3B_4 重合并指向 B_3 , Z 轴垂直于动平台平面。两 U 副交点分别记为 C_3 、 C_4 。 r 、 R 分别为动、定平台中心点至顶点的距离。

2.1 第 I、II 支链位置反解

第 I、II 支链可看作是 5 个转动副连接各杆件组成,采用 D-H 法表示各杆件之间的相对位置和姿态。对 I、II 支链,依次设杆件长度为 $l_{ij}(i=1,2; j=1,2,3,4)$ 。其中 l_{i4} 与 Z 轴夹角为 $90^\circ - \mu$ 。各转动副的转角为 $\theta_{ik}(k=1,2,3,4,5)$,其中 θ_{11} 是第 I 支链的主驱动输入角。各矩阵变换方程中的坐标系建立如图 2 所示,相应的 D-H 参数见表 2。

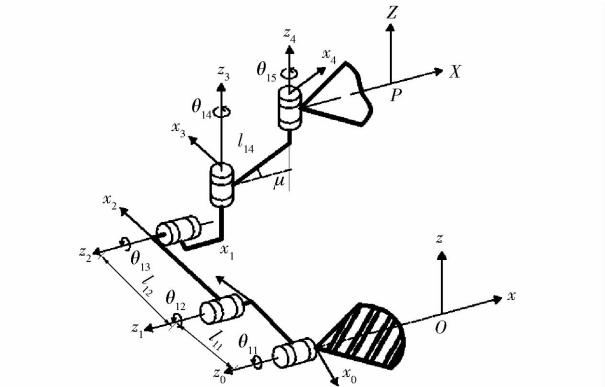


图 2 RRUR 支链的 D-H 模型
Fig.2 D-H model of RRUR chain

表 2 各连杆及关节参数
Tab.2 Parameters of connecting rods and joints

连杆 i	$\alpha_i / (^\circ)$	$a_{1,i}$	θ_{1i}	$d_{1,i}$
0-1	0	l_{11}	θ_{11}	0
1-2	0	l_{12}	θ_{12}	0
2-3	-90	0	θ_{13}	0
3-4	0	$l_{14} \cos \mu$	θ_{14}	$l_{14} \sin \mu$
4-5	0	r	θ_{15}	0

连杆矩阵的变换通式为^[14]

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c\theta_{ji} & -s\theta_{ji}c\alpha_{ji} & s\theta_{ji}s\alpha_{ji} & a_{ji}c\theta_{ji} \\ s\theta_{ji} & c\theta_{ji}c\alpha_{ji} & -c\theta_{ji}s\alpha_{ji} & a_{ji}s\theta_{ji} \\ 0 & s\alpha_{ji} & c\theta_{ji} & d_{ji} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, c 表示 $\cos$; s 表示 $\sin$; $i=1,2$; $j=1,2,3,4$ 。

将表 2 所列参数代入式(1), 得到各连杆坐标系变换矩阵 1_2T 、 2_3T 、 3_4T 、 4_5T (略), 再由图 2 列出 0_1T 、 ${}^5_P T$ 变换矩阵为

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -R \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_P T = \begin{bmatrix} c_{i5} & -c_{i5} & 0 & rc_{i5} \\ s_{i5} & c_{i5} & 0 & rs_{i5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 I 支链在机构中构成封闭回路, 其矩阵方程为

$${}^0_P T = {}^0_1 T \times {}^1_2 T \times {}^2_3 T \times {}^3_4 T \times {}^4_5 T \times {}^5_P T =$$

$$\begin{bmatrix} -s_{4+5} & -c_{4+5} & 0 & L_1 \\ -c_{1+2+3}c_{4+5} & c_{1+2+3}s_{4+5} & -s_{1+2+3} & L_2 \\ s_{1+2+3}c_{4+5} & -s_{1+2+3}s_{4+5} & -c_{1+2+3} & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中

$$L_1 = -rs_{4+5} - l_{14}s_4\cos\mu - R$$

$$L_2 = -c_{1+2+3}rc_{4+5} - c_{1+2+3}l_{14}c_4\cos\mu -$$

$$l_{14}s_{1+2+3}\sin\mu - l_{12}c_{1+2} - l_{11}c_1$$

$$L_3 = s_{1+2+3}rc_{4+5} + s_{1+2+3}l_{14}c_4\cos\mu - l_{14}c_{1+2+3}\sin\mu +$$

$$l_{12}s_{1+2} + l_{11}s_1$$

$$s_{1+2} = \sin(\theta_{11} + \theta_{12})$$

$$c_{1+2} = \cos(\theta_{11} + \theta_{12})$$

$$s_{4+5} = \sin(\theta_{14} + \theta_{15})$$

$$c_{4+5} = \cos(\theta_{14} + \theta_{15})$$

$$c_{1+2+3} = \cos(\theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{13})$$

$$s_{1+2+3} = \sin(\theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{13})$$

动平台 $PXYZ$ 和定平台 $Oxyz$ 转换矩阵为

$${}^0_P T = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & X_p \\ s\alpha & c\alpha & 0 & Y_p \\ 0 & 0 & 1 & Z_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

将式(2)和式(3)对应项相等并化简, 得到支链 I 的运动学方程

$$(rs\alpha + A_1 - Y_p)^2 + (Z_p - l_{14}\sin\mu)^2 + l_{11}^2 - l_{12}^2 -$$

$$2l_{11}(rs\alpha + A_1 - Y_p)c_1 - 2l_{11}(Z_p - l_{14}\sin\mu)s_1 = 0 \quad (4)$$

同理, 可得支链 II 的运动学方程为

$$(X_p + rc\alpha - A_2 - R)^2 + l_{21}^2 -$$

$$l_{22}^2 - 2l_{21}(Z_p - l_{24}\sin\mu)s_2 + (Z_p - l_{24}\sin\mu)^2 -$$

$$2l_{21}(X_p + rc\alpha - A_2 - R)c_2 = 0 \quad (5)$$

则第 I、II 支链反解为

$$\theta_{i1} = \arcsin \frac{2T_i}{1 + T_i^2} \quad (i=1,2) \quad (6)$$

其中

$$T_i = \frac{-H_i \pm \sqrt{H_i^2 - 4G_iI_i}}{2G_i} \quad (i=1,2)$$

$$G_1 = (rs\alpha + A_1 - Y_p + l_{11})^2 + (Z_p - l_{14}\sin\mu)^2 - l_{12}^2$$

$$H_1 = -4l_{11}(Z_p - l_{14}\sin\mu)$$

$$I_1 = (rs\alpha + A_1 - Y_p - l_{11})^2 + (Z_p - l_{24}\sin\mu)^2 - l_{12}^2$$

$$G_2 = (X_p + rc\alpha - A_2 - R + l_{21})^2 + (Z_p - l_{24}\sin\mu)^2 - l_{22}^2$$

$$H_2 = -4l_{21}(Z_p - l_{24}\sin\mu)$$

$$I_2 = (X_p + rc\alpha - A_2 - R - l_{21})^2 + (Z_p - l_{24}\sin\mu)^2 - l_{22}^2$$

$$A_1 = \pm \sqrt{l_{14}^2\cos^2\mu - (rc\alpha - R - X_p)^2}$$

$$A_2 = \pm \sqrt{l_{24}^2\cos^2\mu - (Y_p + rs\alpha)^2}$$

2.2 第 III、IV 支链位置反解

设支链 III 中连杆 l_{31} 与定平台上平面的夹角为 θ_{31} , 支链 IV 中连杆 l_{41} 与定平台上平面的夹角为 θ_{41} , 则根据矢量关系有

$$\overrightarrow{OB_3} = {}^P_0R(\alpha)\overrightarrow{PB_3} + \overrightarrow{OP} =$$

$$\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -rs\alpha + X_p \\ rc\alpha + Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3C_3} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} + a_{31} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\pi - \theta_{31}) \\ \sin(\pi - \theta_{31}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R - a_{31}c_{31} \\ a_{31}s_{31} \end{bmatrix} \quad (8)$$

由固定杆长可得

$$l_{32}^2 = (X_p - s\alpha r)^2 + (c\alpha r + Y_p - R + l_{31}c_{31})^2 +$$

$$(Z_p - l_{31}s_{31})^2 \quad (9)$$

同理

$$l_{42}^2 = (X_p + rs\alpha)^2 + (Y_p - c\alpha + R - l_{41}c_{31})^2 +$$

$$(Z_p - l_{41}s_{31})^2 \quad (10)$$

求得反解

$$\theta_{i1} = \arcsin \frac{2T_i}{1 + T_i^2} \quad (i=3,4) \quad (11)$$

其中

$$T_i = \frac{-H_i \pm \sqrt{H_i^2 - 4G_iI_i}}{2G_i} \quad (i=3,4)$$

$$G_3 = (Y_p + rc\alpha - R - l_{31})^2 + (X_p - rs\alpha)^2 + Z_p^2 - l_{32}^2$$

$$H_3 = -4Z_p l_{31}$$

$$I_3 = (Y_p + rc\alpha - R + l_{31})^2 + (X_p - rs\alpha)^2 + Z_p^2 - l_{32}^2$$

$$G_4 = (Y_p - rc\alpha + R + l_{41})^2 + (X_p + rs\alpha)^2 + Z_p^2 - l_{42}^2$$

$$H_4 = -4Z_P l_{41}$$
$$I_4 = (Y_P - rc\alpha + R - l_{41})^2 + (X_P + rs\alpha)^2 + Z_P^2 - l_{42}^2$$

2.3 位置反解数值验算

为验证上述位置反解正确性,在 Pro/E 软件上建立三维模型并进行运动学仿真。给定机构尺寸参数如下: $l_{11} = l_{21} = l_{12} = l_{22} = 50\text{ mm}$, $l_{13} = l_{23} = 0\text{ mm}$, $l_{14} = l_{24} = 40\text{ mm}$, $l_{31} = l_{41} = l_{32} = l_{42} = 70\text{ mm}$, $r = 20\text{ mm}$, $R = 30\text{ mm}$, $\mu = 60^\circ$ 。仿真模型如图 3 所示。为建模方便,伺服电动机未画,其运动趋势与主驱动转动副一致。

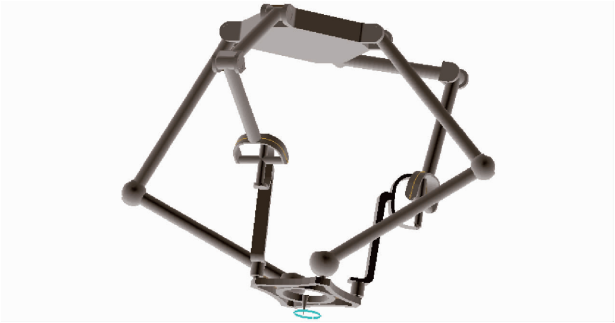


图3 机构模型及运动仿真结果
Fig.3 Model and trajectory simulation of PKM

建立动平台参考点的运动轨迹方程

$$\begin{cases} X_P = -5 + 5\cos(\omega t) \\ Y_P = -5 + 5\sin(\omega t) \\ Z_P = 90 \\ \alpha = 0^\circ \end{cases} \quad (12)$$

代入式(6)和式(11)进行求解,得到 4 条支链的转动副主驱动变化曲线(图 4),将其导入 Pro/E 模块进行仿真。系统仿真过程中不考虑转动副之间的摩擦,在动平台中心虚拟一个操作头,运行 10 s、300 步对样机进行仿真。

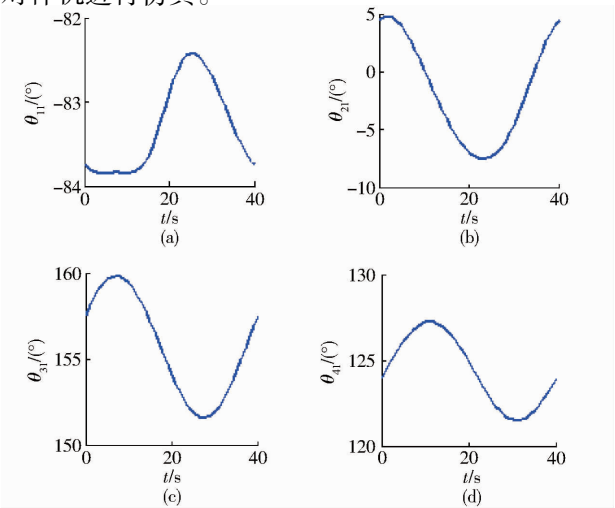


图4 4条支链输入转角变化曲线
Fig.4 Changing curves of input driving parameters for four chains

图 3 中动平台末端的圆弧轨迹是并联机构的运动轨迹仿真结果。可以看出,操作头的运动轨迹与期望得到的轨迹完全吻合,说明按照预期的轨迹规划,利用运动学位置反解方程所得到的机构主驱动的运动规律是正确的,按此数学模型来控制驱动物理样机的原动件是可靠的。

3 奇异性分析

3.1 雅可比矩阵

将式(4)、式(5)、式(9)和式(10)对时间求导,整理得

$$\frac{D_1}{A_1}(B_1 + l_{11}c_1)\dot{X}_P + (l_{11}c_1 - B_1)\dot{Y}_P - l_{11}s_1\dot{Z}_P +$$
$$r\left[(B_1 - l_{11}c_1)c\alpha + \frac{D_1}{A_1}(B_1 - l_{11}c_1)s\alpha\right]\dot{\alpha} =$$
$$[(Z_P - l_{14}\sin\mu)c_1 - B_1s_1]l_{11}\dot{\theta}_1 \quad (13)$$

$$(B_2 - l_{21}c_2)\dot{X}_P + \frac{D_2}{A}(B_2 - l_{21}c_2)\dot{Y}_P +$$
$$(Z_P - l_{24}\sin\mu - l_{21}s_2)\dot{Z}_P +$$
$$\left[(l_{21}c_2 - B_2)rs\alpha + \frac{D_2rc\alpha}{A_2}(B_2 - l_{21}c_2)\right]\dot{\alpha} =$$
$$- [l_{21}s_2B_2 - l_{21}c_2(Z_P - l_{24}\sin\mu)]\dot{\theta}_2 \quad (14)$$
$$(X_P - rs\alpha)\dot{X}_P + (B_3 + l_{31}c_3)\dot{Y}_P + (Z_P - l_{31}s_3)\dot{Z}_P -$$
$$[rs\alpha(B_3 + l_{31}c_3) + rc\alpha(X_P - rs\alpha)]\dot{\alpha} =$$

$$l_{31}(s_3B_3 + Z_Pc_3)\dot{\theta}_3 \quad (15)$$
$$(X_P + rs\alpha)\dot{X}_P + (B_4 - l_{41}c_4)\dot{Y}_P + (Z_P - l_{41}s_4)\dot{Z}_P +$$
$$[rc\alpha(X_P + rs\alpha) + rs\alpha(B_4 - l_{41}c_4)]\dot{\alpha} =$$
$$l_{41}(Z_Pc_4 - s_4B_4)\dot{\theta}_4 \quad (16)$$

其中 $A_1 = \sqrt{l_{14}^2\cos^2\mu - (rc\alpha - R - X_P)^2}$
 $B_1 = rs\alpha + A_1 - Y_P$
 $D_1 = rc\alpha - R - X_P$ $A_2 = \sqrt{l_{24}^2\cos^2\mu - (Y_P + rs\alpha)^2}$
 $B_2 = X_P + rc\alpha - A_2 - R$
 $D_2 = Y_P + rs\alpha$
 $B_3 = Y_P + rc\alpha - R$ $B_4 = Y_P - rc\alpha + R$

式(13)~(16)用矩阵表示为

$$A[\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\theta}_4]^T = B[\dot{X}_P \quad \dot{Y}_P \quad \dot{Z}_P \quad \dot{\alpha}]^T \quad (17)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \det \mathbf{A} \neq 0 \\ \det \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$e_1 = [(Z_p - l_{14} \sin \mu) c_1 - B_1 s_1] l_{11}$$

$$e_2 = l_{21} B_2 s_2 - l_{21} (Z_p - l_{24} \sin \mu) c_2$$

$$e_3 = l_{31} (B_3 s_3 + Z_p c_3)$$

$$e_4 = l_{41} (Z_p c_4 - B_4 s_4)$$

$$f_{11} = \frac{D_1}{A_1} (B_1 + l_{11} c_1)$$

$$f_{12} = l_{11} c_1 - B_1 \quad f_{13} = -l_{11} s_1$$

$$f_{14} = r (B_1 - l_{11} c_1) \left(c\alpha + \frac{D_1}{A_1} s\alpha \right)$$

$$f_{21} = B_2 - l_{21} c_2 \quad f_{22} = \frac{D_2}{A_2} (B_2 - l_{21} c_2)$$

$$f_{23} = Z_p - l_{24} \sin \mu - l_{21} s_2$$

$$f_{24} = (l_{21} c_2 - B_2) \left(r s\alpha - \frac{D_2 r c\alpha}{A_2} \right)$$

$$f_{31} = X_p - r s\alpha \quad f_{32} = B_3 + l_{31} c_3$$

$$f_{33} = Z_p - l_{31} s_3$$

$$f_{34} = r s\alpha (B_3 + l_{31} c_3) + r c\alpha (X_p - r s\alpha)$$

$$f_{41} = X_p + r s\alpha \quad f_{42} = B_4 - l_{41} c_4$$

$$f_{43} = Z_p - l_{41} s_4$$

$$f_{44} = r c\alpha (X_p + r s\alpha) + r s\alpha (B_4 - l_{41} c_4)$$

机构的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad (18)$$

3.2 奇异性分析

在并联机构中,当矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之一或者同时奇异时,就出现并联机构的奇异位形。以并联机构的正反雅克比矩阵为基础,可以把奇异分为 3 类^[15]:

(1)第 1 类奇异:矩阵 $\mathbf{A}$ 奇异而矩阵 $\mathbf{B}$ 非奇异,即

$$\begin{cases} \det \mathbf{A} = 0 \\ \det \mathbf{B} \neq 0 \end{cases} \quad (19)$$

这类奇异称为正奇异或位形奇异,一般是指机构处于工作空间边界或者位置反解数目发生变化时的位形。

根据式(17)有, $|\mathbf{A}| = 0$ 即 $e_1 e_2 e_3 e_4 = 0$ 。

$e_1 = 0$, 即 $\tan_1 = (Z_p - l_{14} \sin \mu) / (r s\alpha + A_1 - Y_p)$, 同理, e_2, e_3, e_4 为零的条件分别是

$$\tan_2 = (Z_p - l_{24} \sin \mu) / B_2 \quad \tan_3 = -Z_p / B_3$$

$$\tan_4 = -Z_p / B_4$$

满足以上任一条件,机构均会发生正奇异。

(2)第 2 类奇异:矩阵 $\mathbf{B}$ 奇异而矩阵 $\mathbf{A}$ 非奇异,即

又称为逆奇异或边界奇异。

$|\mathbf{B}| = 0$ 即满足第 I 支链中 $c_1 = 0, B_1 = 0$;

第 II 支链中 $l_{21} c_2 - B_2 = 0$;

第 III 支链中 $c_3 = 0$ 且 $X_p - r s\alpha = 0$;

第 IV 支链中 $c_4 = 0, B_4 = 0$

(3)第 3 类奇异: $\mathbf{A}、\mathbf{B}$ 均奇异,称为混合奇异,

即

$$\begin{cases} \det \mathbf{A} = 0 \\ \det \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

4 工作空间分析

4.1 定姿态工作空间

定姿态工作空间是机构动平台姿态保持一定时,动平台参考点所能到达的区域。本文采用三维空间搜索法进行定姿态工作空间的求解。当给定动平台姿态后,利用机构运动学方程式(6)和式(11)求解出各主动、被动关节转角以及机构上可能发生干涉的特征点的位置。然后将这些计算结果与相应的允许值作比较,若其中任一值超出允许值,此时末端基点位姿则不可能实现,即参考点在工作空间之外;若其中任一个值都在允许范围内,此时参考点位于工作空间内。

4.2 定姿态工作空间实例

对 2.3 节中的虚拟样机进行分析讨论,机构工作空间的规划搜索范围为: $-60 \text{ mm} \leq X_p \leq 20 \text{ mm}$, $-40 \text{ mm} \leq Y_p \leq 40 \text{ mm}$, $0 \leq Z_p \leq 140 \text{ mm}$ 。

图 5 是 $\alpha = 0^\circ$ 的定姿态可达工作空间, xoy 平面的截面形状为矩形,且大小近乎一致,整个工作空间沿 xoz 面对称。可达工作空间范围为: $-20 \text{ mm} \leq X_p \leq 20 \text{ mm}$, $-30 \text{ mm} \leq Y_p \leq 10 \text{ mm}$, $0 \leq Z_p \leq 120 \text{ mm}$ 。

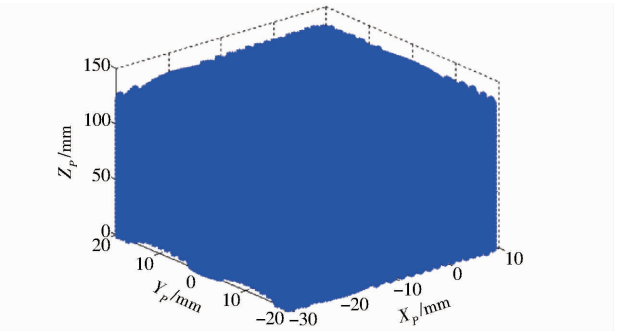


图 5 $\alpha = 0^\circ$ 定姿态工作空间

Fig. 5 Workspace on 0°

4.3 定姿态工作空间内奇异轨迹分析

对给定机构在定姿态条件下的奇异性进行分析并给出奇异轨迹。由于边界奇异^[16]可以通过实际

控制手段避开,因此本文仅讨论内部奇异^[17-20],即第2类奇异。给定姿态角 $\alpha=0^\circ$,根据式(6)、(11)以及第2类奇异表达式(20)可求得内部奇异轨迹。图6是截面高度 Z_p 分别为70、80、90、100 mm的内部奇异情况,其中蓝色为奇异工作空间,黄色为无奇异工作空间。由图可知,机构工作空间内部存在较大无奇异区域。

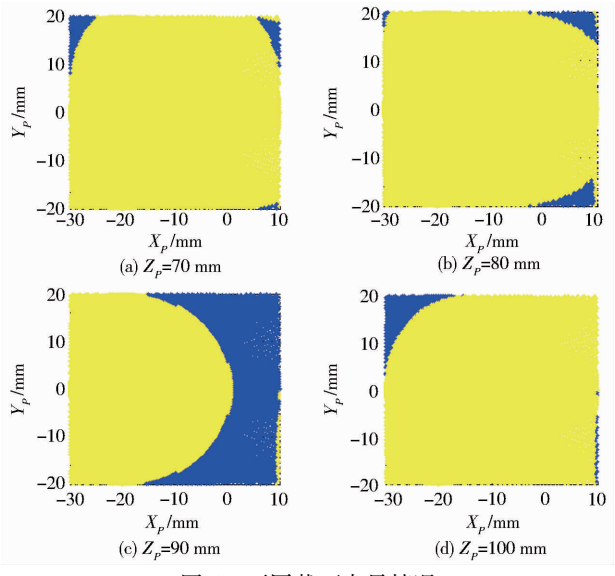


图6 不同截面奇异情况
Fig.6 Singularity situations of different sections

4.4 转动能力分析

转动能力分析是评估并联机构转动角度能够达到的范围大小。考察机构在可达工作空间范围内的转动能力在工业应用中非常重要。限制各转动关节转动范围

$$\begin{aligned} -60^\circ \leq \theta_{11} \leq 240^\circ & \quad -60^\circ \leq \theta_{12} \leq 240^\circ \\ -60^\circ \leq \theta_{13} \leq 240^\circ & \quad -90^\circ \leq \theta_{14} \leq 90^\circ \\ -180^\circ \leq \theta_{15} \leq 180^\circ & \quad 30^\circ \leq \theta_{21} \leq 150^\circ \\ -60^\circ \leq \theta_{22} \leq 160^\circ & \quad -60^\circ \leq \theta_{23} \leq 240^\circ \\ -90^\circ \leq \theta_{24} \leq 90^\circ & \quad -180^\circ \leq \theta_{25} \leq 180^\circ \\ 30^\circ \leq \theta_{31} \leq 150^\circ & \quad 30^\circ \leq \theta_{41} \leq 150^\circ \end{aligned}$$

基于位置反解方程式(6)和式(11),采用搜索法确定机构可达工作区域及每点转动能力。

图7是截面高度 Z_p 分别为70、80、90、100 mm的工作空间截面形状及各点转动能力。由图可知:①机构可达工作空间截面明显比定姿态工作空间大。②可达工作空间中心区域的转动能力较强,以中心点向外发散转动能力逐渐减弱,在对称中心处转动能力超过 90° 。③机构工作空间内的转动能力较强。如 $Z_p=70$ mm高度,转动能力达 90° 的工作空间接近30%。

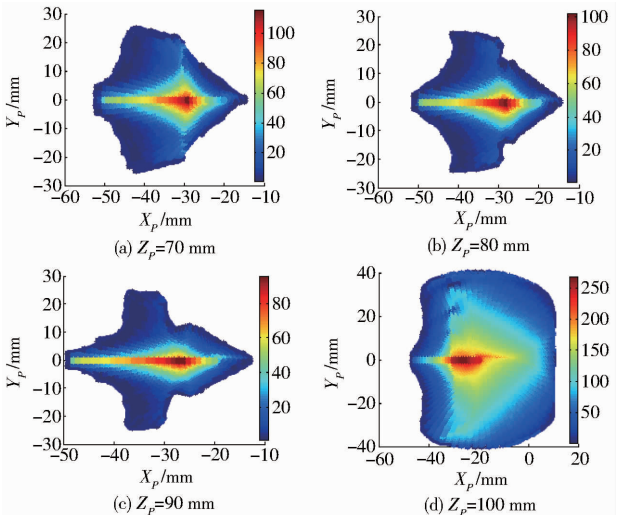


图7 不同截面的工作空间及各点转动能力
Fig.7 Workspace and rotational capacity of different sections

5 结论

(1)该机构构型简单,具有单一动平台且无复杂闭链,所有运动副多为转动副,可实现机构末端构件较大范围的转动。

(2)机构位置正解求解难度较大,不易直接求解;位置反解可通过各支链相应的杆长方程求解相应的主驱动输入角度,求得反解有64组解。

(3)工作空间形状规则;可达工作空间的边界区域存在奇异,实际应用时应予以避免;机构在工作空间内的转动能力较强,尤其靠近工作空间中心区域时的转动能力大于 90° 。

参 考 文 献

1 LEE Chungching, HERVEL J M. Generators of the product of two Schönflies motion groups [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2010, 29(1):97-108.

2 CLAVEL R. Device for the movement and positioning of an element in space; US, 4976582[P]. 1989-01-01.

3 ANGELES J, MOROZOV A, NAVARRO O. A novel manipulator architecture for the production of scara motions [C] // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2000: 2370-2375.

4 ANGELES J. The degree of freedom of parallel robots: a group-theoretic approach [C] // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2005:1005-1012.

5 ROLLAND L H. The manta and the kanuk: novel 4-dof parallel mechanisms for industrial handling [C] //1999 International Mechanical Engineering Congress and Exposition Proceedings of IMECE'99, 1999:831-844.

6 THURNEYSEN M, CLAVEL R, BOURI M, et al. Hita-STT, a new parallel five-axis machine tool[J]. Parallel Kinematic

- Machines in Research and Practice, 2004,24:529-544.
- 7 PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4-dof parallel robots[C] //IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 1999: 508-513.
 - 8 KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4: a new parallel mechanism for scara motions [C] // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2003,2: 1875-1880.
 - 9 NABAT V, COMPANY O, KRUT M, et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place[C] //Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems,2005:553-558.
 - 10 XIE Fugui, LIU Xinjun. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform [J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2015,7(4):041015-1-12.
 - 11 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
 - 12 沈惠平, 熊坤, 孟庆梅, 等. 并联机构运动解耦设计方法与应用研究[J]. 农业机械学报, 2016,47(6):348-356.
SHEN Huiping, XIONG Kun, MENG Qingmei, et al. Design methods for kinematics decoupled parallel mechanisms and its applications[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016,47(6):348-356. (in Chinese)
 - 13 沈惠平, 尹洪波, 李菊, 等. 基于方位特征方法的范例并联机构的拓扑特征分析及其启示与应用[J]. 机械工程学报, 2015,51(13):101-115.
SHEN Huiping, YIN Hongbo, LI Ju, et al. Position and orientation characteristic based method and enlightenment for topology characteristic analysis of typical parallel mechanisms and its application[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015,51(13): 101-115. (in Chinese)
 - 14 SAEED B Niku. 机器人学导论——分析、控制及应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2013.
 - 15 GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematics chains [J]. IEEE Transactions of Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281-290.
 - 16 陈庆诚, 朱世强, RAJAT Mittal, 等. 基于 POE 的动力学建模与快速非奇异终端滑模控制[J]. 农业机械学报, 2015, 46(6):310-318.
CHEN Qingcheng, ZHU Shiqiang, RAJAT Mittal, et al. Dynamic modeling based on POE and non-singular terminal sliding mode control[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015,46(6):310-318. (in Chinese)
 - 17 李雨桐. 并联机构运动奇异性及其动态稳定性研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2010.
LI Yutong. Singularity and its dynamic stability for parallel manipulators [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2010. (in Chinese)
 - 18 王建亮. 新型三自由度可控机构创新设计[D]. 南宁: 广西大学, 2014.
WANG Jianliang. The innovative design of the new three degrees of freedom controllable mechanism [D]. Nanning: Guangxi University, 2014. (in Chinese)
 - 19 李坤. 新型四自由度并联机构设计与运动学分析[D]. 西安: 西安理工大学, 2014
LI Kun. The design and kinematic analysis of 4-DOF parallel mechanism [D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2014. (in Chinese)
 - 20 周结华, 彭侠夫. 三自由度冗余驱动并联机构的奇异性和工作空间分析[J]. 中国机械工程, 2014,25(6):751-756.
ZHOU Jiehua, PENG Xiafu. Singularity and workspace analysis of a 3-DOF parallel manipulator with redundant actuation [J]. Chinese Mechanical Engineering, 2014,25(6):751-756. (in Chinese)

(上接第 407 页)

- 14 GOSSELIN C, ANFELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematics chains [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990,6(3):281-290.
- 15 LIU Xinjun, KIM J, OH K. Singularity analysis of the HALF parallel manipulator with revolute actuators[C] //IEEE Interational Conference on Robotics and Automation, 2003:767-772.
- 16 BONEV A, ZLATANOV D, GOSSELIN C. Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2003,125(3):573-581.
- 17 WOLF A, OTTAVIANO E, SHOHAM M, et al. Application of line geometry and linear complex approximation to singularity analysis of the 3-DOF CaPaMan parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2004,39(1):75-95.
- 18 TSAI L, JOSHI S. Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2):254-258.
- 19 戴建生. 旋量代数与李群、李代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- 20 YANG Guilin, CHEN Ming, WEI Lin, et al. Singularity analysis of three-legged parallel robots based on passive-joint velocities [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2001,17(4):413-422.