

以基本运动链为单元的并联机构拓扑结构设计*

沈惠平 孙驰宇 朱小蓉 孟庆梅 李 菊

(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要: 研究了以基本运动链(BKC)为单元的并联机构组成原理及其拓扑结构设计方法。首先,提出基于 BKC 的并联机构组成原理表达式;其次,基于 BKC 的组成原理及其耦合度 k 的计算公式,设计给出理论上满足 $k=0\sim3$ 且基本回路 $v=1\sim5$ 的 53 种 BKC 基本类型及其解析表达式;其中,最常用的 6 种 BKC 基本类型能解析表示出 40 种 BKC 拓扑结构,而这些 BKC 拓扑结构成为常用并联机构的基本组成单元;最后,提出一种直接以 BKC 为设计单元,同时满足方位特征集(POC)设计目标的并联机构拓扑结构设计的一般性实用方法,并以实例说明。该方法无需综合支链及其在动、静平台之间的拓扑布置,仅含 3 个步骤,操作简单,具有很好的实用性;与已有的主要型综合理论方法相比,操作简单、方便,具有很好的实用性和普适性。

关键词: 并联机构 方位特征集 基本运动链 拓扑结构设计 型综合 单开链

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)12-0337-09

Topology Structure Design of Parallel Mechanisms
Based on Basic Kinematic Chains

Shen Huiping Sun Chiyu Zhu Xiaorong Meng Qingmei Li Ju

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

Abstract: The parallel mechanism composition theory and the design method for topology structure of the parallel mechanisms were studied based on the basic kinematic chain (BKC) units. Firstly, a new expression for the parallel mechanism composition theory based on BKC was proposed, which had clear physical meaning. Secondly, according to the composition theory and the formula for calculating the value of the coupling degree k , 53 kinds of BKC with coupling degree $k=0\sim3$, the basic loop $v=1\sim5$, as well as their analytical expressions were presented. It was found that there were six mostly common types of basic BKC and these basic BKC can constitute 40 kinds of BKC topology structure which are the basic unit of parallel mechanism. A concept of virtual POC set of BKC topology structure was proposed and 40 kinds of BKC topology structures were classified according to 13 kinds of virtual POC sets with the coupling degree k , which provided the composition unit, i. e., building block of a parallel mechanism, for designing the topology structure of parallel mechanisms. Finally, a general and practical method for topology structure design of parallel mechanism was presented with BKC as the composition units, and meeting the position and orientation characteristics (POC) set as the design goal. Three examples were illustrated. The method had only three steps and no need to synthesize the branch chains and their topology structures between the base and the moving platform. Compared with the existing four main methods for type synthesis, this new method has better usability and universality.

Key words: Parallel mechanism Position and orientation characteristics set Basic kinematic chain

Topology structure design Type synthesis Single-open-chain

收稿日期: 2015-04-22 修回日期: 2015-06-20

* 国家自然科学基金资助项目(51375062,51405039,51475050)

作者简介: 沈惠平,教授,博士生导师,主要从事机构学和并联机构研究,E-mail: shp65@126.com

引言

并联机构的拓扑结构设计一直是现代机构学的热点和难点之一。机构拓扑结构设计的理论基础主要包括:机构的组成原理及机构的型综合方法。

关于机构的组成原理,国内外学者先后提出了4种机构组成原理及相应的机构拓扑结构学、运动学与动力学的理论体系^[1],即德国学派在19世纪下半叶提出的基于杆、副单元的机构组成原理及其机构学理论体系;苏联学派在20世纪上半叶提出的基于Assur组单元的机构组成原理及其机构学理论体系;美国学派在20世纪下半叶提出的基于回路单元的机构组成原理及其机构学理论体系,以及中国学者在21世纪初提出的基于有序单开链单元(Single-open-chain,SOC)的机构组成原理及其机构学理论体系。前3种机构组成原理能很好地分析平面机构,但不能有效地分析空间并联机构;而基于SOC单元的机构组成原理,能同时有效地分析任意平面机构和空间并联机构的组成。

关于并联机构拓扑结构的设计方法,目前主要有4种,即基于螺旋理论的方法^[2-5]、基于位移子群的方法^[6-7]、基于线性变换与进化形态学的方法^[8-9],以及基于方位特征(Position and orientation characteristics,POC)和SOC的方法^[1,10-16],而并联机构综合的G_F方法考虑了支链中运动副排列顺序对末端工作空间大小的影响^[17]。这些理论方法都是以动平台的输出运动类型和数目为设计目标,通过设计各种支链及其在动、静平台之间的拓扑布置,来构造拓扑结构,具有较好的系统性、严密性,但比较抽象,且设计过程与步骤较复杂,特别是前三者方法需要较好的数学基础,一般工程技术人员较难理解和掌握。

文献[18]在对已有的自由度为2~6常用并联机构进行拓扑特征分析的基础上,归纳设计了40种基本运动链(Basic kinematic chain,BKC)拓扑结构,并按耦合度 k 分类;同时,提出了一种仅满足动平台输出自由度数目要求且基于BKC的并联机构型综合实用方法,其中,需要分析计算综合所得候选机型的输出方位特征,才能确定该机构可能的应用场合。显然,该方法相比于前几种型综合理论方法,综合步骤已经减少,具有一定的实用性;但由于设计实现的基本要求仅仅是动平台的自由度数目,而POC分析与计算,需要一定的专门知识,因此,其普适性和实用价值受到限制。

并联机构的基本功能是其动平台所实现的输出运动类型和数目,即方位特征集元素的类型和

数目,既包括自由度的类型(转动、移动),又包括了自由度的数目(转动和移动的数目之和)。因此,满足机构的方位特征集要求,应该是并联机构型综合方法(理论的系统方法或实用的经验方法)存在和使用的前提。而前几种型综合理论方法^[2-12,17]都是在这一前提下而建立的,因而具有较好的使用普遍性。

本文在基于POC(数学工具)和SOC(组成单元)的并联机构拓扑结构设计理论的大框架下,将基于基本运动链(BKC)的机构组成原理推广至空间并联机构,提出一种直接以BKC为设计单元且满足POC要求,而无需通过综合支链及其拓扑布置的并联机构拓扑结构设计的实用方法。

1 基于BKC的机构组成原理及其新表达式

1.1 BKC的组成及其耦合度

由文献[1,12,19]知,任一个自由度为 F 、独立回路为 v 的机构,可分解为一组有序的SOC,其数目为该机构的独立回路数 v ,分别计算各个可能构成机构所有回路的SOC的约束度 Δ ,选取约束度 Δ 最小的SOC作为SOC₁,在剩余的SOC中选取约束度 Δ 最小者作为SOC₂,其约束度为 Δ_2 ,一般地,在剩余的SOC中选取约束度 Δ 最小者作为SOC _{j} ,其约束度为 Δ_j 。

进一步,自 Δ_1 开始,对 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_j$,依次划分为若干部分,每一部分都满足 $\sum \Delta_j=0$,且是最小划分该最小划分即为一个BKC,其耦合度为

$$k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^v|\Delta_j| \tag{1}$$

而BKC耦合度 k 的最大值即为机构的耦合度。

1.2 基于BKC的机构组成原理新表达式

提出一种基于BKC的机构组成原理表达式,为

$$\text{PKM}^k[F,v]=F-J_{in}+\sum_{j=1}^vp_k\text{BKC}^k(\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_j) \tag{2}$$

式中 $F-J_{in}$ ——含 F 个驱动副
 p_k ——耦合度为 k 的BKC数目($p_k=1$,省略)
 $\text{BKC}^k(\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_j)$ ——由约束度分别为 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_j$ 的SOC₁,SOC₂, $\cdots$,SOC _{j} 组成的耦合度为 k 的BKC

其基本思想是:一个自由度为 F 、基本回路为 v 、耦合度为 k 的并联机构(Parallel kinematic mechanism,PKM) $\text{PKM}^k[F,v]$,由若干个驱动副及若干个BKC组成。

式(1)揭示了机构 3 方面的拓扑信息：①BKC 的数目和耦合度。②各个 BKC 的结构组成(单开链数目及其约束度性质)。③机构的独立回路数及其耦合度。显然,式(2)与原有的机构组成原理表达式^[1,12,19]相比,其物理意义明确,结构更加清晰,适合于任意多回路平面与空间机构。现举例说明。

1.2.1 3 自由度 Delta 并联机构

图 1a 所示机构的 3 条支链结构相同,为:HSOC $\{-R_i-\diamond(-S_{a_i},S_{b_i},S_{c_i},S_{d_i})-\},i=1,2,3$,且 $R_i\parallel(a_id_i)$ 。其中, $\diamond(-S_{a_i},S_{b_i},S_{c_i},S_{d_i})$ 装配时,应使 $S_{a_i},S_{b_i},S_{c_i},S_{d_i}$ 副的球心构成平行四边形。 R_1,R_2,R_3 共面。

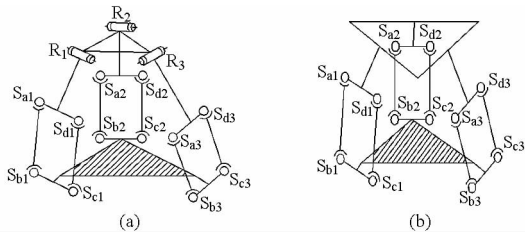


图 1 Delta 并联机构及其 BKC
Fig. 1 Delta PKM and its BKC
(a) Delta 机构 (b) 3-4S 型 BKC

(1)确定 SOC_1 及其约束度 Δ_1
因 3 条支链结构相同,可取第一单开链为
 $SOC_1\{-R_1\parallel R_{(\parallel a_1d_1)}^{(4S)}-P_{(\parallel \diamond(4S))}^{(4S)}-P_{(\perp a_1d_1)}^{(4S)}-P_{(\perp a_2d_2)}^{(4S)}-P_{(\parallel \diamond(4S))}^{(4S)}-R_{(\parallel a_2d_2)}^{(4S)}\parallel R_2-\}$
其构成回路的独立位移方程数为 $\xi_{L_1}=5$, 故
 $\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1}f_i-I_1-\xi_{L_1}=8-2-5=1$ 。
(2)确定 SOC_2 及其约束度 Δ_2
 $SOC_2\{-R_3\parallel R_{(\parallel a_3d_3)}^{(4S)}-P_{(\parallel \diamond(4S))}^{(4S)}-P_{(\perp a_3d_3)}^{(4S)}-\}$
其构成回路的独立位移方程数为 $\xi_{L_2}=4$, 故
 $\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2}f_i-I_2-\xi_{L_2}=4-1-4=-1$ 。
(3)确定机构所含的 BKC 及机构耦合度 k

$$k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^v|\Delta_j|=\frac{1}{2}(|1|+|-1|)=1$$

因此,该机构只包含一个 BKC,其结构如图 1b 所示,即该机构由 3 个驱动副和一个 3-4S 型 BKC 组成,可表示为

$$PKM^1[3,2]=3-J_{in}+1BKC^1(1,-1)$$

1.2.2 6 自由度 6-SPS 并联机构

文献[20]已对图 2a 所示的 2-2-2 型 6-SPS 机构进行了结构拓扑分析,表明:该机构由 6 个 P 副驱动副、3 个 UUS 型 BKC(图 2b)和 1 个 3-RS 型 BKC(图 2c)组成,该机构可表示为

$$PKM^1[6,5]=6-J_{in}+3BKC^0(0)+BKC^1(1,-1)$$

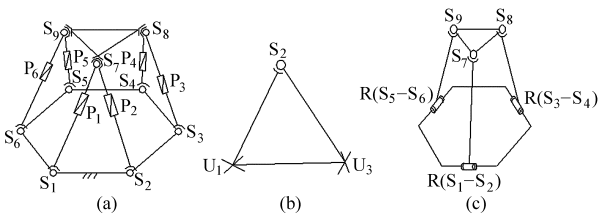


图 2 2-2-2 型 6-SPS 并联机构及其 BKC
Fig. 2 2-2-2-type 6-SPS PKM and its BKC
(a) 6-SPS 机构 (b) UUS 型 BKC (c) 3-RS 型 BKC

2 BKC 类型设计及其应用

2.1 所有可能的 BKC 基本类型及其设计

耦合度 k 相同的 BKC,所包含的独立回路数及其单开链约束度可能不同,因此,会有多种组成形式。根据耦合度 k 计算公式及其组成的单开链约束度形式,从理论上归纳设计出 $k=0\sim3$ 、基本回路数 $v=1\sim5$ 的 BKC 基本类型共 53 种,如表 1 所示。

从表 1 可以看出:

- (1)基本回路数 v 增加,回路内位置变量相互依赖、关联的可能性及其方式增大,因此,耦合度 k 增大,其 BKC 的类型也聚增;如: $k=3,v=5$ 的 BKC 为最多,共有 18 种(表 1 中的 No. 36~No. 53)。
- (2)对单个 BKC 而言:① $v=1$ 的 BKC 只有 1 种,其 $k=0$,占 BKC 总数的 2%。② $v=2$ 的 BKC 只有 3 种,占 BKC 总数的 6%。③ $v=3$ 的 BKC 只有 7 种,占 BKC 总数的 13%。④ $v=4$ 的 BKC 只有 14 种,占 BKC 总数的 26%。⑤ $v=5$ 的 BKC 只有 28 种,占 BKC 总数的 53%,但实际使用的较少。
- (3)理论上 53 种 BKC 基本类型,但常用的仅为 6 种(表 1 中下划线者,以及 2.2 节),这表明还存在大量基于其他 BKC 基本类型的并联机构的拓扑结构有待提出。

2.2 常用的 BKC 拓扑结构及其应用

作者对已收集到的 30 多种常用的、自由度为 2~6 并联机构进行拓扑特征分析^[18,20],得到了 40 种常用 BKC 拓扑结构(表 3),分析它们所包含的 BKC 基本类型,仅为 53 种 BKC 基本类型中的 6 种,如表 2 所示,即表 1 中的下划线者,且表明:

- (1)每一种 BKC 基本类型,会对应数个 BKC 拓扑结构;而每一个 BKC 拓扑结构,也会对应数个实际机构,即不同的并联机构,会有相同的 BKC 拓扑结构。如表 3 中的 No. 22、No. 32、No. 38 BKC 拓扑结构,尽管它们的物理构造、虚 POC 集(其定义将在 3.1 节中介绍)不同,但其组成均可表示成如表 2 中的一个 BKC 基本类型,即 No. 5 BKC¹(1,0,-1)。

表 1 基于耦合度 k 的 BKC 基本类型及其分类

Tab.1 BKC basic types and their classification based on coupling degree k

v	k			
	0	1	2	3
1	No. 1 BKC(0)			
2		No. 2 BKC(1, -1)	No. 3 BKC(2, -2)	No. 4 BKC(3, -3)
3			No. 6 BKC(2,0, -2)	No. 9 BKC(3,0, -3),
		No. 5 BKC(1,0, -1)	No. 7 BKC(2, -1, -1)	No. 10 BKC(3, -1, -2)
			No. 8 BKC(1,1, -2)	No. 11 BKC(2,1, -3)
4			No. 13 BKC(2,0,0, -2)	
			No. 14 BKC(2,0, -1, -1)	No. 19 BKC(3,0,0, -3) No. 20 BKC(2,1,0, -3),
		No. 12 BKC(1,0,0, -1)	No. 15 BKC(2, -1,0, -1)	No. 21 BKC(1,1,1, -3) No. 22 BKC(3,0, -1, -2)
			No. 16 BKC(1,0,1, -2)	No. 23 BKC(3, -1,0, -2) No. 24 BKC(3, -1, -1, -1)
			No. 17 BKC(1,1,0, -2)	No. 25 BKC(2,1, -1, -2)
			No. 18 BKC(1,1, -1, -1)	
			No. 27 BKC(2,0,0,0, -2)	No. 36 BKC(3,0,0,0, -3) No. 37 BKC(2,1,0,0, -3)
			No. 28 BKC(2,0,0, -1, -1)	No. 38 BKC(2,0,1,0, -3) No. 39 BKC(2,0,0,1, -3)
5			No. 29 BKC(2, -1,0,0, -1)	No. 40 BKC(1,0,1,1, -3) No. 41 BKC(1,1,0,1, -3)
			No. 30 BKC(2,0, -1,0, -1)	No. 42 BKC(1,1,1,0, -3) No. 43 BKC(3,0,0, -1, -2)
		No. 26 BKC(1,0,0,0, -1)	No. 31 BKC(1,0,0,1, -2)	No. 44 BKC(3,0, -1,0, -2) No. 45 BKC(3, -1,0,0, -2)
			No. 32 BKC(1,1,0,0, -2)	No. 46 BKC(3,0, -1, -1, -1) No. 47 BKC(3, -1,0, -1, -1)
			No. 33 BKC(1,0,1,0, -2)	No. 48 BKC(3, -1, -1,0, -1) No. 49 BKC(2,0,1, -1, -2)
			No. 34 BKC(1,1,0, -1, -1)	No. 50 BKC(2,1,0, -1, -2) No. 51 BKC(2,1, -1,0, -2)
			No. 35 BKC(1,1, -1,0, -1)	No. 52 BKC(2,1, -1, -1, -1) No. 53 BKC(1,1,1, -1, -2)

表 2 常用 BKC 基本类型

Tab.2 Common BKC basic types

k	BKC 基本类型(表 1)		BKC 拓扑结构(表 3)	数目	占比/%
0	No. 1 BKC ⁰ (0)		No. 4、9、10、11、15、18、19	7	17.5
1	No. 2 BKC ¹ (1, -1)	No. 1、2、3、5、6、7、8、12、13、16、20、21、23、24、27、28、29、30、31、39	No. 22、32、38	20	57.5
	No. 5 BKC ¹ (1,0, -1)			3	
2	No. 7 BKC ² (2, -1, -1)	No. 14 BKC ² (2,0, -1, -1)	No. 14、17、25、26、33、34 No. 35	6	17.5
	No. 14 BKC ² (2,0, -1, -1)			1	
3	No. 52 BKC ³ (2,1, -1, -1, -1)		No. 36、37、40	3	7.5

(2)常用并联机构的 BKC 基本类型很少,大多数为低耦合度 $k=0$ 或 1 的 BKC,例,由表 2 可知:①构成常用并联机构的一般为 $k=0$ 的 BKC(占 17.5%)或 $k=1$ 的 BKC(占 57.5%),两者的组合占了 75%。②对于 $v=5$ 的 6 自由度并联机构,仅为一般的 6-SPS 机构,仅占 7.5%。

(3)只要 BKC 拓扑结构齐全,能综合出满足 POC 的所有并联机构,因此,设计出对应于虚 POC 集的 BKC 拓扑结构,是应用该方法进行拓扑结构设计的关键。

对 40 种常用 BKC 拓扑结构,按其虚 POC 集进行了分类,如表 3 所示,供设计时参考。

3 满足 POC 且基于 BKC 的机构拓扑结构设计

3.1 BKC 拓扑结构的虚 POC 集

并联机构的基本功能是其动平台所实现的输出

运动类型和数目,即方位特征集。

由于 BKC 拓扑结构的自由度为零,其本身实为一个桁架,因此,BKC 拓扑结构不存在 POC 集的概念。但如将一个 BKC 拓扑结构拆解为若干条支链后,其每条支链的末端构件都存在一个独立的 POC 集;依据各支链间的约束条件,对这些独立支链末端的 POC 集进行交集运算,以得到一个方位特征集,称之为该 BKC 拓扑结构的“虚 POC 集”,记作 M_{BKC} ,且用 $\{\}$ 表示。

当在 BKC 拓扑结构的支链上逐个添加驱动副之后,零自由度的 BKC 便转变为可运动的并联机构,该并联机构的 POC 集元素,记作 M_{pa} ,且用 $[\]$ 表示,它比 BKC 拓扑结构的虚 POC 集的元素多了一个元素,即 $M_{\text{pa}} \supseteq M_{\text{BKC}}$;即拟综合机构的方位特征集

为 $\begin{bmatrix} t^x \\ r^y \end{bmatrix}$,则其包含的 BKC 拓扑结构所可能具有的虚

表 3 基于虚 POC 集的 BKC 拓扑结构分类

Tab.3 Classification of BKC topological structures based on virtual POC set

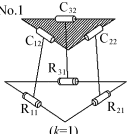
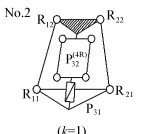
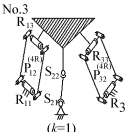
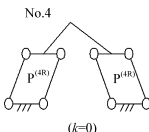
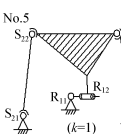
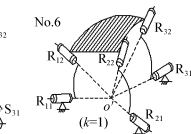
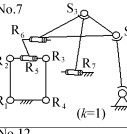
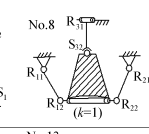
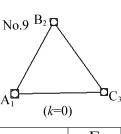
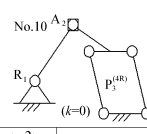
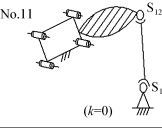
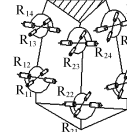
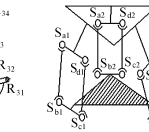
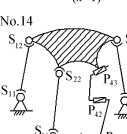
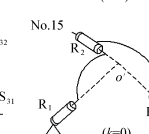
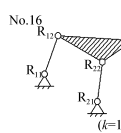
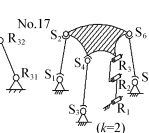
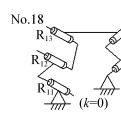
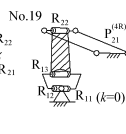
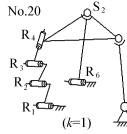
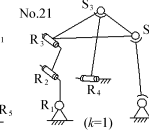
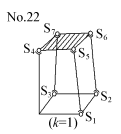
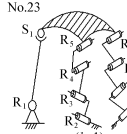
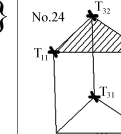
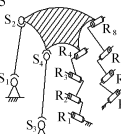
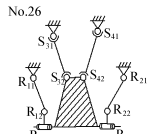
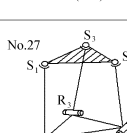
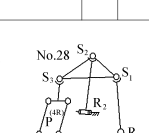
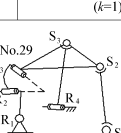
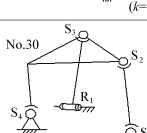
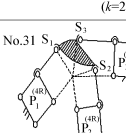
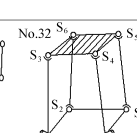
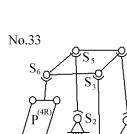
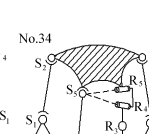
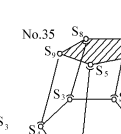
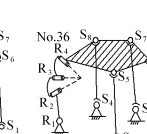
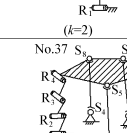
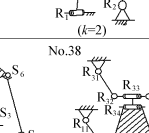
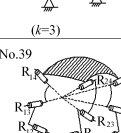
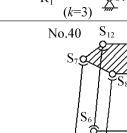
虚POC 的维数						
2	A	$\begin{Bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{Bmatrix}$	No.1  (k=1) No.2  (k=1) No.3  (k=1) No.4  (k=0)	B	$\begin{Bmatrix} t^0 \\ r^2 \end{Bmatrix}$	No.5  (k=1) No.6  (k=1)
	C	$\begin{Bmatrix} t^1 \\ r^1 \end{Bmatrix}$	No.7  (k=1) No.8  (k=1) No.9  (k=0) No.10  (k=0) No.11  (k=0)			
3	D	$\begin{Bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{Bmatrix}$	No.12  (k=1) No.13  (k=1) No.14  (k=2) No.15  (k=0)	E	$\begin{Bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{Bmatrix}$	No.16  (k=1) No.17  (k=2) No.18  (k=0) No.19  (k=0)
	F	$\begin{Bmatrix} t^1 \\ r^2 \end{Bmatrix}$	No.20  (k=1) No.21  (k=1)	G	$\begin{Bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{Bmatrix}$	No.22  (k=1)
4	H	$\begin{Bmatrix} t^3 \\ r^1 \end{Bmatrix}$	No.23  (k=1)	I	$\begin{Bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{Bmatrix}$	No.24  (k=1) No.25  (k=2) No.26  (k=2)
	J	$\begin{Bmatrix} t^1 \\ r^3 \end{Bmatrix}$	No.27  (k=1) No.28  (k=1) No.29  (k=1) No.30  (k=1) No.31  (k=1) No.32  (k=1) No.33  (k=2) No.34  (k=2) No.35  (k=2) No.36  (k=3)			
5	K	$\begin{Bmatrix} t^3 \\ r^2 \end{Bmatrix}$	No.37  (k=3) No.38  (k=1)	L	$\begin{Bmatrix} t^2 \\ r^3 \end{Bmatrix}$	No.39  (k=1)
6	M	$\begin{Bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{Bmatrix}$	No.40  (k=3)			

表 4 用于 BKC 的虚 POC 集转变为机构的 POC 集的驱动副添加原则

Tab.4 Principle for adding input joints to translate virtual POC of a BKC into real POC of PKM

BKC 的虚 POC	添加的驱动副	驱动副轴线的布置原则		机构的 POC
原则 A_1	$\begin{Bmatrix} t^x \\ r^y \end{Bmatrix}$	R	与 BKC 支链中的一转动副轴线平行,且其伴随移动没有为动平台增加新移动元素。	$\begin{Bmatrix} t^x \\ r^y \end{Bmatrix}$
		P	与 BKC 支链中的一移动元素平行。	
原则 A_2	$\begin{Bmatrix} t^{x-1} \\ r^y \end{Bmatrix}$	R	与 BKC 支链中的一转动副轴线平行,且其伴随移动为动平台增加一个新的移动元素。	
		P	与 BKC 支链中的所有移动副轴线方向都不平行。	
原则 A_3	$\begin{Bmatrix} t^x \\ r^{y-1} \end{Bmatrix}$	R	与 BKC 支链中的所有转动副轴线方向都不平行,且其伴随移动并未为动平台增加新移动元素。	
		P	与 BKC 支链中的一移动副轴线平行。	

POC 有 $\begin{Bmatrix} t^x \\ r^y \end{Bmatrix}$ 、 $\begin{Bmatrix} t^{x-1} \\ r^y \end{Bmatrix}$ 或 $\begin{Bmatrix} t^x \\ r^{y-1} \end{Bmatrix}$ 3 种形式。

3.2 基于虚 POC 集的 BKC 拓扑结构分类

将 2.2 节所述的 40 种 BKC 拓扑结构,按 A、B、C、…、M 等 13 类虚 POC 集进行分类,如表 3 所示。每一种虚 POC 集对应一个或数个实际的 BKC 拓扑结构,这为基于 BKC 的并联机构拓扑结构设计奠定了基础,能综合出 2~6 自由度的 13 类并联机构。

3.3 满足 POC 且基于 BKC 的机构拓扑设计

本文提出的满足 POC 且基于 BKC 的机构拓扑结构设计方法,仅包括 3 个主要步骤:

(1)根据给定的 POC 集,得到相应的若干个虚 POC 集。

(2)对给定的每一个虚 POC 集,在表 3 中找到相应的 BKC 拓扑结构。

(3)按以下给出的驱动副轴线方位及其数目添加原则,在每个 BKC 拓扑结构的支链(包括添加的 BKC 的支链)上添加驱动副,最终得到不同的并联机构,但它们的动平台一定满足期望的 POC 集。

3.3.1 驱动副轴线方向的配置原则

设要综合的目标机构的方位特征集为 $\begin{Bmatrix} t^x \\ r^y \end{Bmatrix}$,则应选取虚 POC 集为 $\begin{Bmatrix} t^x \\ r^y \end{Bmatrix}$ 、 $\begin{Bmatrix} t^{x-1} \\ r^y \end{Bmatrix}$ 或 $\begin{Bmatrix} t^x \\ r^{y-1} \end{Bmatrix}$ 的 3 种 BKC 拓扑结构,且分别按表 4 所述的驱动副轴线添加原则,就能得到满足方位特征集为 $\begin{Bmatrix} t^x \\ r^y \end{Bmatrix}$ 的并联机构。

3.3.2 驱动副数目的添加原则

选定 BKC 拓扑结构后,根据其支路数 n_b 与 DOF 的关系,驱动副的添加方式有 3 种:

(1)原则 $B_1:n_b = \text{DOF}$ 时,直接在 BKC 拓扑结构的每条支路上添加驱动副。

(2)原则 $B_2:n_b < \text{DOF}$ 时,需要在该 BKC 拓扑

结构上叠加一个 $k=0$ 的 BKC,才能使 $n_b = \text{DOF}$,然后,再在它们的每条支路上添加驱动副。

表 3 中, $k=0$ 的 BKC 拓扑结构共有 11 种,即 No. 4、No. 9、No. 10、No. 11、No. 15、No. 18、No. 19。其中, No. 9 BKC 拓扑结构的 3 个节点 A_1 、 B_2 、 C_3 处的运动副,可分别为转动副 R、虎可副 U、球副 S,因此,其 BKC 拓扑结构的组合形式可有:RRR、RSU、USU、RRS);而 No. 10 BKC 的节点 A_2 处的运动副可为 S、R。

而添加 $k=0$ 的 BKC 的方式一般有 2 种:①在 RS 型支路上,叠加 UUS 型 No. 9 BKC 拓扑结构。②在 RS 型支路上,叠加 RRR 型 No. 9 BKC、PP 型 No. 4 BKC、5R 型 No. 18 BKC 拓扑结构。

(3)原则 $B_3:n_b > \text{DOF}$:需设置数目为 $(n_b - \text{DOF})$ 条支链为约束支链,并在其他每条支链上添加驱动副。

3.4 实例

3.4.1 2 平移 1 转动并联机构的综合

第 1 步,为综合 POC 集为 $\begin{Bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{Bmatrix}$ 的并联机构,从

表 3 中可选取的虚 POC 集分别为 $\begin{Bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{Bmatrix}$ 、 $\begin{Bmatrix} t^1 \\ r^1 \end{Bmatrix}$ 、 $\begin{Bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{Bmatrix}$ 。

第 2 步,对每一个虚 POC 集找到相应的 BKC 拓扑结构,即上述 3 个虚 POC 集对应的是表 3 中 E、C 或 A 行所在的 BKC 拓扑结构。

第 3 步,在每个 BKC 拓扑结构的支链上添加驱动副,最终得到所要机构。现分别阐述如下:

(1)用具有虚 POC 集为 $\begin{Bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{Bmatrix}$ 的 BKC 进行综合

①在表 3 的 E 行中,任选 No. 16 BKC,如图 3a 所示。②因所综合机构的 POC 集与所选 BKC 的虚 POC 集相同,且机构自由度与 BKC 的支链数同为 3。因此,按照驱动副添加原则 A_1 及原则 B_1 所述方法,在 BKC 的每条支路上各添加一个与已有转动副

轴线（图 3a 中 R_{12} 方向）相平行的 R 副，如 R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} ，并作为 3 个驱动副，即得图 3b 所示的 3 自由度 3-RRR 并联机构（下划线为驱动副，下同）。

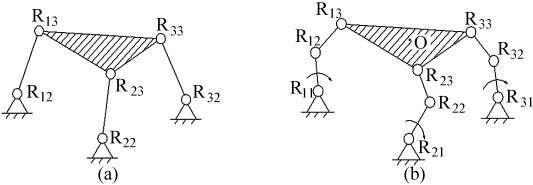


图 3 3-RRR 并联机构的综合

Fig. 3 Synthesis for 3-RRR PKM

(a) No. 16 BKC (b) 目标机构

在图 3b 所示机构的动平台上，取任一点 O 为基点（没有特别说明，暗指动平台上任一点，下同），则得到并联机构的 POC 集为

$$M_{Pa} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{12}) \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{22}) \\ r^1(\parallel R_{22}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{32}) \\ r^1(\parallel R_{32}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{bmatrix}$$

因此，该机构为 2 平移 1 转动输出。

同样，还可以 No. 17、No. 18、No. 19 BKC 拓扑结构为组成单元，同样综合出其他 2 平移 1 转动输出的并联机构。（下同，仅给出对应 POC 集一个 BKC 拓扑结构的并联机构设计过程。）

(2) 用具有虚 POC 集为 $\begin{Bmatrix} t^1 \\ r^1 \end{Bmatrix}$ 的 BKC 进行综合

① 在表 3 的 C 行中，任选 No. 7 BKC，如图 4a 所示。② 因所综合机构的 POC 集比所选 BKC 的虚 POC 集多一个移动元素，且机构自由度与 BKC 的支链数同为 3。按照驱动副添加原则 A_2 及原则 B_1 所述方法，在如图 4a 所示的 BKC 的每条支链上各添加一个与转动元素方向相平行的 R 副，例 R_8 、 R_9 、 R_{10} ，且作为 3 个驱动副，则得到如图 4b 所示的 3 自由度并联机构。

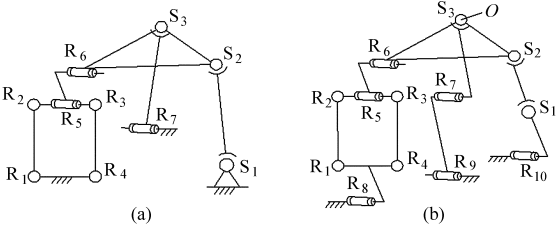


图 4 $\underline{R//P(4R)} - \underline{R//R} + \underline{R//R} - \underline{S} + \underline{RSS}$ 机构的综合

Fig. 4 Synthesis for $\underline{R//P(4R)} - \underline{R//R} +$

$\underline{R//R} - \underline{S} + \underline{RSS}$ PKM

(a) No. 16 BKC (3-RR) (b) 目标机构

取机构动平台上的 S_3 球心 O 为基点，则得并联机构的 POC 集为

$$M_{Pa} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_6) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\perp R_7) \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{bmatrix}$$

可知，该机构也为 2 平移 1 转动输出。

(3) 用具有虚 POC 集为 $\begin{Bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{Bmatrix}$ 的 BKC 进行综合

① 在表 3 的 A 行中，任选取 No. 2 BKC，如图 5a 所示。② 因所综合的机构 POC 集比所选 BKC 的 POC 集多一个转动元素，且机构自由度与 BKC 的支链数同为 3。按照驱动副添加原则 A_3 及原则 B_1 所述方法，在图 5a 所示的 BKC 3 条支链上各添加一个与虚 POC 集的转动元素轴线方向平行的 R 副，例： R_{11} 、 R_{21} 、 R_{31} ，且作为 3 个驱动副，则得如图 5b 所示的目标并联机构。

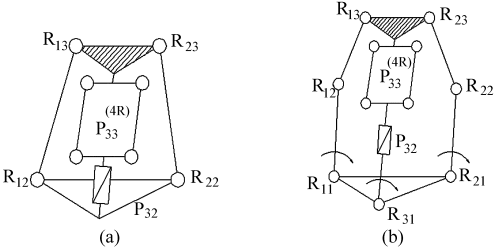


图 5 $2 - \underline{R//R//R} + \underline{R} - \underline{P} - \underline{P(4R)}$ 并联机构的综合

Fig. 5 Synthesis for $2 - \underline{R//R//R} + \underline{R} - \underline{P} - \underline{P(4R)}$ PKM

(a) No. 2 BKC (2RR + P - P(4R)) (b) 目标机构

其 POC 集为

$$M_{Pa} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{21}) \\ r^1(\parallel R_{21}) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\parallel (\diamond(P_{32}, P_{33}))) \\ r^1(\parallel R_{31}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{bmatrix}$$

可知，该机构输出仍为 2 平移 1 转动输出。

3.4.2 3 转动并联机构的综合

第 1 步，为综合 POC 集为 $\begin{Bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{Bmatrix}$ 的并联机构，从

表 3 中选取虚 POC 集为 $\begin{Bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{Bmatrix}$ 、 $\begin{Bmatrix} t^0 \\ r^2 \end{Bmatrix}$ 。

第 2 步，对每一个虚 POC 集找到相应的 BKC 拓扑结构，即上述 2 个虚 POC 集对应的是表 3 中 G 或 B 行所在的 BKC 拓扑结构。

第 3 步，在每个 BKC 拓扑结构的支链上添加驱动副，最终得到所要机构。现分别阐述如下：

(1) 用具有虚 POC 集 $\begin{Bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{Bmatrix}$ 的 BKC 进行综合

① 在表 3 的 G 行中，取 No. 22 BKC 拓扑结构，如图 6a 所示。② 由于所要综合机构的 POC 集与所选 BKC 的虚 POC 元素相同，但 BKC 的支路数为 4，大于所综合机构自由度 3。按照驱动副添加原则 A_1

及原则 B₃所述方法,将{-S-}支路作为约束支路,其余3条SS支链路上各添加一个P副(P₁、P₂、P₃),作为3个驱动副,得到如图6b所示的3自由度并联机构。

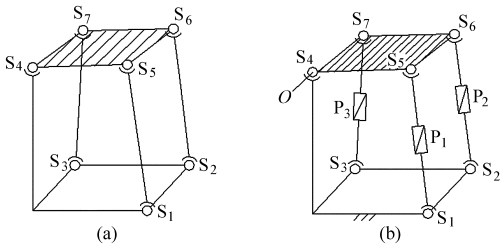


图 6 S + 3 - SPS 并联机构综合

Fig. 6 Synthesis for S + 3 - SPS PKM

(a) No. 22 BKC (S + 3SS) (b) 目标机构

取动平台上 S₄为基点,得该机构的 POC 集为

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

可知,该机构为0平移3转动输出。

(2)用具有虚 POC 集为 $\begin{bmatrix} t^0 \\ r^2 \end{bmatrix}$ 的 BKC 进行综合

①在表3的B行中,任选No.5BKC,如图7a所示。②因所要综合机构POC集比所选BKC的虚POC集多一个转动元素,且机构自由度与BKC的支路数同为3。按照驱动副添加原则A₃及原则B₁所述方法,在图7a所示的BKC的每条支路上各添加一个R副,例R₁₁、R₂₁、R₃₁,中间支链上所添加的R副与原支路上两R副(R₃₂、R₃₃)方向不同且相交于一点,所添加的3个R副作为驱动副,得到如图7b所示的3自由度并联机构。

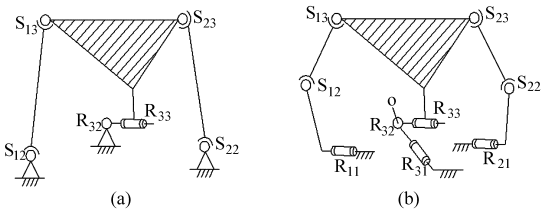


图 7 2 - RSS + RRR 并联机构综合

Fig. 7 Synthesis for 2 - RSS + RRR PKM

(a) No. 5 BKC (2 - SS + RR) (b) 目标机构

取中间支路两个R副轴线交点为基点,得到该并联机构的POC集为

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

可知,该机构的输出类型为0平移3转动。

3.4.3 3 平移 1 转动并联机构的综合

第1步,为综合POC集为 $\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \end{bmatrix}$ 的并联机构,从

表3中选取虚POC集分别为 $\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{bmatrix}$ 。

第2步,对每一个虚POC集找到相应的BKC拓扑结构,即上述3个虚POC集对应的是表3中H、E或D行所在的BKC拓扑结构。

第3步,在每个BKC拓扑结构的支链上添加驱动副,最终得到所要机构。现分别阐述如下:

(1)用具有虚POC集为 $\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \end{bmatrix}$ 的BKC进行综合

①从表3的H行中,任选No.23BKC,如图8a所示。②因所要综合机构POC集与所选BKC的虚POC集相同,且所综合的机构自由度为4,大于BKC的支路数3。因此,按照驱动副添加原则A₁及原则B₃所述方法,在图8a所示的RS支链上,叠加UUS型No.9BKC,这样,在4条支链添各加一个P副作为4个驱动副(P₁₂、P₁₄、P₃₁、P₄₁),方向任意,得到图8b所示的4自由度机构。

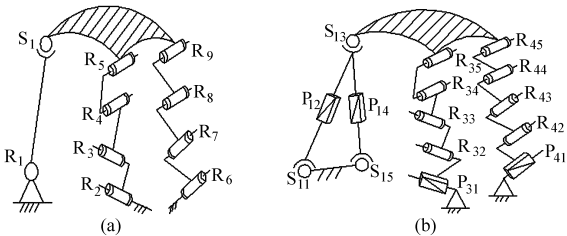


图 8 2 - SPS + 2 - P - R // R - R // R 机构综合

Fig. 8 Synthesis for 2 - SPS + 2 - P - R // R - R // R PKM

(a) No. 23 BKC (RS + 2 - R // R - R // R) (b) 目标机构

易知,该并联机构的POC集为

$$M_{Pa} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 (\parallel \diamond (R_{35}, R_{33})) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 (\parallel \diamond (R_{45}, R_{43})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \end{bmatrix}$$

可知,该机构的输出类型为3平移1转动。本例为2个BKC叠加以综合新机构的实例。

(2)用具有虚POC集为 $\begin{bmatrix} t^2 \\ r^1 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{bmatrix}$ 的BKC进行综合

综合

分别从表3的E行中任选No.17BKC(图9a)、D行中任选No.14BKC(图10a),分别得到图9b、图10b所示的并联机构,它们的输出类型均为3平移1转动。其综合过程,与上文类似,略去。

4 结论

(1)提出了一种物理结构更清晰的基于BKC的并联机构组成原理新表达式,它包含了机构3方面的拓扑信息:①BKC的数目和耦合度。②各个BKC

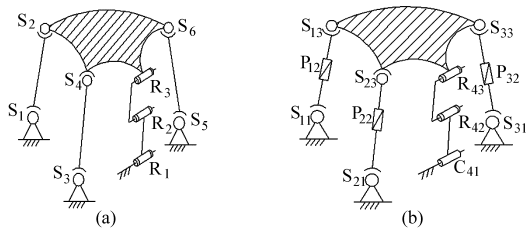


图 9 3-SPS + P//R//R//R 机构的综合

Fig. 9 Synthesis for 3-SPS + P//R//R//R PKM

(a) No. 17 BKC (3-S-S+R//R//R) (b) 目标机构

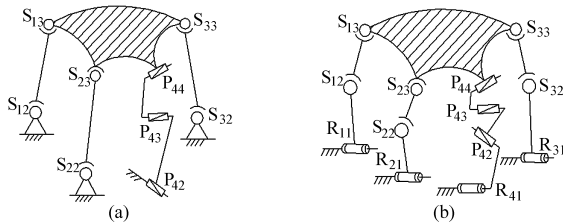


图 10 3-RSS + RPPP 机构的综合

Fig. 10 Synthesis for 3-RSS + RPPP PKM

(a) No. 14 BKC (3-SS+PPP) (b) 目标机构

的结构组成(单开链数目及其约束度性质)。③机构的独立回路数及其耦合度。

(2)基于 BKC 的组成原理及其耦合度 k 的计算公式,设计提出了满足 $k=0 \sim 3$ 且基本回路 $v=1 \sim 5$ 的 53 种 BKC 基本类型;其中,最常用的 6 种 BKC 基本类型,它们能表示 40 种 BKC 拓扑结构的解析组成,而这些 BKC 拓扑结构是常用并联机构的基本组成单元。

(3)提出了 BKC 拓扑结构虚 POC 集的概念,并对 40 种 BKC 拓扑结构按 13 种虚 POC 集进行了分类,为满足方位特征集且基于 BKC 的并联机构拓扑结构设计提供了组成单元。

(4)提出了一种直接以 BKC 拓扑结构为设计单元,以满足方位特征集为设计目标,而无需通过综合支链及其拓扑布置的并联机构拓扑结构设计的一般性实用方法,并给予例子详细说明。该方法只有 3 个步骤,操作简单、实用,具有很好的普遍性。

参 考 文 献

- 1 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012.
- 2 Hunt K H. Kinematic geometry of mechanisms[M]. Oxford: Clarendon Press, 1978.
- 3 Frisoli A, Checcacci F, Gosselin C M. Synthesis by screw algebra of translating in-parallel actuated mechanisms[J]. Advance in Robot Kinematics, 2000,27:433-440.
- 4 Huang Z, Li Q C. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method[J]. International Journal of Robotics Research,2003,22(1):55-79.
- 5 Kong X, Gosselin C M. Type synthesis of parallel mechanisms[J]. Springer Tracts in Advanced Robotics, 2007,33:66-70.
- 6 Herve J M. Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements[J]. Mechanism and Machine Theory, 1978,13:437-450.
- 7 Li Q C, Huang Z, Herve J M. Type synthesis of 3R2T 5-DOF parallel mechanisms using the lie group of displacements[J]. IEEE Transaction on Robotics and Automation, 2004,20(2):173-180.
- 8 Gogu G. Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations[J]. European Journal of Mechanics Solids, 2004,23(6):1021-1039.
- 9 Gogu G. Structural synthesis of fully-isotropic parallel robots with Schonflies motions via theory of linear transformations and evolutionary morphology[J]. European Journal of Mechanics, 2007,26(2):242-269.
- 10 杨廷力,金琼,沈惠平,等. 基于单开链单元的三平移并联机器人机构型综合及其分类[J]. 机械工程学报, 2002,38(8):31-36.
Yang Tingli, Jin Qiong, Shen Huiping, et al. Structural synthesis and classification of the 3DOF translational parallel robot mechanisms based on the units of single-opened-chain[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002,38(8):31-36. (in Chinese)
- 11 Jin Q, Yang T L, Liu A X, et al. Theory for topology synthesis of parallel manipulators and its application to three-dimension-translation parallel manipulators[J]. ASME J. Mech. Des., 2004,126:625-639.
- 12 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京:机械工业出版社,2004
- 13 Yang Tingli. Kinematic structural analysis and synthesis of over-constrained spatial single loop chains[C]// Proceedings of the 19th Biennial Mechanisms Conference,1986,86-DET-189.
- 14 杨廷力,金琼,刘安心,等. 基于单开链单元的欠秩并联机器人机构型综合的一般方法[J]. 机械科学与技术,2001,20(3):321-325.
Yang Tingli, Jin Qiong, Liu Anxin, et al. A general method for structural synthesis of the degenerate-rank parallel robot mechanisms based on the units of single-opened-chain[J]. Mechanical Science and Technology, 2001, 20(3):321-325. (in Chinese)
- 15 余同柱,沈惠平,邓嘉鸣,等. 方位特征集法在三平移并联机构型综合中的应用[J]. 机械设计,2012,29(8):48-54.
Yu Tongzhu, Shen Huiping, Deng Jiaming, et al. Application of POC set method in structural synthesis of 3-translational parallel manipulator[J]. Journal of Machine Design, 2012,29(8):48-54. (in Chinese)

- wide-speed-range performance[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2013, 28(1):95 – 105.
- 8 Mohammadi S, Vaea-Zadeh S. Nonlinear modeling of eddy-current coupler[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2014, 29(1):224 – 231.
- 9 Smith A C, El-Wakell A S, Wallace A. Formal design optimization of PM drive couplings[C]//IEEE Conference of the Industry Applications, 37th IAS Annual Meeting, 2002:205 – 211.
- 10 石松宁, 王立志, 时统宇. 永磁驱动器偏心磁极的优化设计[J]. 东北大学学报:自然科学版, 2014, 35(8):1078 – 1082.
Shi Songning, Wang Dazhi, Shi Tongyu. Optimal design of eccentric magnetic pole for permanent magnet drive[J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2014, 35(8):1078 – 1082. (in Chinese)
- 11 Ei-Wakeel A S. Design optimization of PM couplings using hybrid particle swarm optimization-simplex method (PSO – SM) algorithm[J]. Electric Power Systems Research, 2014, 116:29 – 35.
- 12 Wallace A, Van JouaMe A, Ramme A. A permanent-magnet coupling with rapid disconnect capability[J]. International Conference on Power Electronics, Machines and Drives, 2002:286 – 291.
- 13 王旭. 永磁调速器磁路设计与建模分析技术的研究[D]. 沈阳:东北大学, 2012.
- 14 Yang Xinshe, Deb S. Cuckoo search via Lévy flights[C]//IEEE World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing, 2009:210 – 214.
- 15 Ganomt A, Yang X, Alavi A. Cuckoo search algorithm: a meta-heuristic approach to solve structural optimization problems[J]. Engineering with Computer, 2013, 45(12):1562 – 1574.
- 16 Yang Xinshe, Suash Deb. Multiobjective cuckoo search for design optimization[J]. Computer & Operation Research, 2013, 40(6):1616 – 1624.
- 17 李俐, 王荻, 王鹏新, 等. 基于色彩运算和混沌粒子群滤波的土壤粗糙度测算[J]. 农业机械学报, 2015, 46(3):158 – 165.
Li Li, Wang Di, Wang Pengxin, et al. Soil surface roughness measurement based on color operation and chaotic particle swarm filtering[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(3):158 – 165. (in Chinese)
- 18 龙文, 梁昔明, 徐松金, 等. 聚类佳点集交叉的约束优化混合进化算法[J]. 计算机研究与发展, 2012, 49(8):1753 – 1761.
Long Wen, Liang Ximing, Xu Songjin, et al. A hybrid evolutionary algorithm based on clustering good-point set crossover for constrained optimization[J]. The Chinese Journal of Computer Research and Development, 2012, 49(8):1753 – 1761. (in Chinese)
- 19 刘文颖, 文晶, 谢昶, 等. 基于源荷互动的含风电场电力系统多目标模糊优化调度方法[J]. 电力自动化设备, 2014, 34(10):56 – 68.
Liu Wenying, Wen Jing, Xie Chang, et al. Multi-objective fuzzy optimal dispatch based on source-load interaction for power system with wind farm[J]. Electric Power Automation Equipment, 2014, 34(10):56 – 68. (in Chinese)
- 20 刘静, 张小栓, 肖新清, 等. 基于多目标决策模糊物元法的冷藏车传感器布点优化[J]. 农业机械学报, 2014, 45(10):214 – 219.
Liu Jing, Zhang Xiaoshuan, Xiao Xinqing, et al. Optimal sensor layout in refrigerator car based on multi-objective fuzzy matter element method[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(10):214 – 219. (in Chinese)

(上接第 345 页)

- 16 邓嘉鸣, 余同柱, 沈惠平, 等. 基于方位特征的六自由度并联机构型综合[J]. 中国机械工程, 2012, 23(21):2525 – 2640.
Deng Jiaming, Yu Tongzhu, Shen Huiping, et al. Type synthesis for 6-DOF novel parallel mechanisms based on POC set method [J]. China Mechanical Engineering, 2012, 23(21):2525 – 2640. (in Chinese)
- 17 高峰, 杨加伦, 葛巧德. 并联机器人型综合的 G_F 集理论[M]. 北京:科学出版社, 2011.
- 18 尹洪波, 沈惠平, 马小蒙, 等. 基于 BKC 的并联机构拓扑结构分析及其型综合方法[J]. 机械设计, 2015, 32(6):11 – 17.
Yin Hongbo, Shen Huiping, Ma Xiaomeng, et al. Topological structure analysis and type synthesis method of parallel mechanisms based on BKC[J]. Journal of Machine Design, 2015, 32(6):11 – 17. (in Chinese)
- 19 杨廷力. 机械系统基本理论—结构学、运动学、动力学[M]. 北京:机械工业出版社, 1996.
- 20 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6 – SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21):70 – 80.
Shen Huiping, Ying Hongbo, Wang Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6 – SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21):70 – 80. (in Chinese)