

刚度和阻尼系数对 LQG 控制主动悬架控制的影响分析*

赵彩虹¹ 陈士安² 王骏骋²

(1. 南京航空航天大学金城学院机电工程系, 南京 211156; 2. 江苏大学汽车与交通工程学院, 镇江 212013)

摘要: 分别基于半车 4 自由度线性与非线性车辆模型, 设计了主动悬架 LQG 控制器, 并通过理论推导和数值仿真解析了刚度和阻尼系数对悬架控制的影响。线性模型理论推导表明, LQG 控制主动悬架系统的 Riccati 方程的解与刚度和阻尼系数无关, 进而得出了该主动悬架的时域响应与刚度和阻尼系数无关的结论。线性模型数值仿真表明, 由刚度和阻尼系数产生的被动力与主动控制力组成的整体控制力相互独立且不受刚度和阻尼系数的影响; 主动控制力的全局阻尼特性随着其并联阻尼的增加而明显由正特性转变为负特性。针对通用的非线性车辆模型, 通过控制系统线性化、线性化后控制系统 LQG 控制器设计及控制反线性化这 3 个环节完成非线性主动悬架的 LQG 控制设计。设计过程表明, 非线性刚度和阻尼系数的力作用在控制系统线性化和控制反线性化中被抵消, 使得悬架的整体控制力不受此两系数的影响, 说明以上线性主动悬架的研究结论也适用于具有非线性刚度和阻尼特性的主动悬架。

关键词: 汽车 主动悬架 LQG 控制 刚度 阻尼

中图分类号: U463 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)12-0301-08

Influences of Stiffness and Damping Parameters on Control of Active Suspension Based on LQG

Zhao Caihong¹ Chen Shian² Wang Juncheng²

(1. Department of Mechanical and Electrical Engineering, Nanhang Jincheng College, Nanjing 211156, China

2. School of Automotive and Traffic Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: The objective of this research was to supply theoretical bases for design and optimization of stiffness and damping parameters of active suspension system based on LQG control. Taking linear and nonlinear half car models with 4-degrees of freedom (DOF) as research examples respectively, influences of the above two parameters on active suspension system were analyzed through theoretical derivation and numerical simulation. Theoretical derivation about the linear model showed that the Riccati Equation's solution of the active suspension system based on LQG had nothing to do with stiffness and damping parameters. Result came as that the time domain response of the active suspension system had nothing to do with stiffness and damping parameters. Numerical simulation about the linear model revealed that each integral force made up with stiffness force, damping one and active control one were independent of the other and invariable when stiffness and damping parameters were changed, and the global damping characteristics of the active control obviously became negative from positive with its parallel damping parameter increasing. As for the nonlinear car model in general, three steps, including linearizing the control system, designing LQG controller for the linearized control system, and de-linearizing in control implement, were executed to achieve the LQG controller for the nonlinear active suspension system. The design process showed that the integral forces were not influenced by stiffness and damping parameters,

收稿日期: 2015-08-03 修回日期: 2015-10-08

* 国家自然科学基金资助项目(50805066, 51575239)

作者简介: 赵彩虹, 讲师, 主要从事 CAD、机电一体化和主动/半主动悬架技术研究, E-mail: 7766733@qq.com

通讯作者: 陈士安, 教授, 主要从事主动/半主动悬架技术和汽车综合环保与节能技术研究, E-mail: chenshian73@ujs.edu.cn

because their force actions were counteracted in the above linearizing and de-linearizing steps. Thus, the above results about the linear active suspension system were also true when the active suspension system was with nonlinear stiffness and damping characteristics.

Key words: Automobile Active suspension LQG control Stiffness Damping

引言

车辆悬架是车架(或车身)与车轴(或车轮)之间所有传力装置的总称。按照工作能力的不同,可分为被动悬架、主动悬架和半主动悬架。传统的被动悬架因为阻尼和刚度不可调,很难满足汽车性能的进一步改善。主动悬架是在被动悬架基础上增加了主动控制力发生器,可使车辆平顺性达到最优^[1-4]。

控制方法是主动悬架的核心技术之一,对主动悬架的工作效果有着重要影响。现有的悬架控制方法主要包括最优控制^[5-7]、模糊控制^[8]、PID控制^[9]、滑模控制^[10-11]等。模糊控制和PID控制成本较低,有一定的自适应能力,但是控制精度不够高。滑模控制是一种鲁棒性很强的控制方法,可单独或与其他控制方法组合使用,但同样不能使系统获得最优性能。线性二次型(Linear quadratic Gaussian, LQG)控制是一种常见的最优控制,它具有很强的适用性,能使主动悬架系统在名义工况下获得最优的使用性能。

就被动悬架而言,弹性元件的主要功能是隔离高频振动起缓冲作用;阻尼元件的主要功能是利用粘性阻尼来消耗车轴与车身之间的振动而起减震作用。显然刚度和阻尼系数对被动悬架的性能有着较大的影响^[12-15]。本文解析刚度和阻尼系数对LQG控制主动悬架的控制影响。

1 基于半车4自由度线性车辆模型的LQG控制主动悬架的数学模型

采用半车4自由度线性车辆模型,如图1所示^[16-17]。

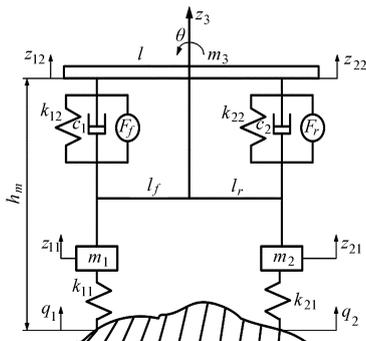


图1 半车4自由度线性车辆模型

Fig.1 Linear half car model with 4-DOF

对该车辆模型进行动力学分析有

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_{11} + k_{11}(z_{11} - q_1) + k_{12}(z_{11} - z_{12}) + \\ c_1(\dot{z}_{11} - \dot{z}_{12}) = -F_f \\ m_2 \ddot{z}_{21} + k_{21}(z_{21} - q_2) + k_{22}(z_{21} - z_{22}) + \\ c_2(\dot{z}_{21} - \dot{z}_{22}) = -F_r \\ m_3 \ddot{z}_3 - k_{12}(z_{11} - z_{12}) - c_1(\dot{z}_{11} - \dot{z}_{12}) - \\ k_{22}(z_{21} - z_{22}) - c_2(\dot{z}_{21} - \dot{z}_{22}) = F_f + F_r \\ I \ddot{\theta} + l_f k_{12}(z_{11} - z_{12}) + l_f c_1(\dot{z}_{11} - \dot{z}_{12}) - \\ l_r k_{22}(z_{21} - z_{22}) - l_r c_2(\dot{z}_{21} - \dot{z}_{22}) = l_r F_r - l_f F_f \\ z_{12} = z_3 - l_f \sin \theta \approx z_3 - l_f \theta \\ z_{22} = z_3 + l_r \sin \theta \approx z_3 + l_r \theta \end{cases} \quad (1)$$

式中 z_{12}, z_{22} ——前、后悬架与车身连接点的垂直位移, m

l_f, l_r ——车身质心至前、后车轴的距离, m

θ ——俯仰角, rad

z_3 ——车身质心的垂向位移, m

m_1, m_2, m_3 ——前、后非簧载质量与簧载质量, kg

I ——车身绕质心的俯仰转动惯量, $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

z_{11}, z_{21} ——前、后非簧载质量垂向位移, m

c_1, c_2 ——前后悬架的等效阻尼系数, $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$

$k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{22}$ ——前、后轮胎与悬架的等效刚度, N/m

F_f, F_r ——前、后悬架的主动控制力, N

q_1, q_2 ——前、后轴随时间变化的路面随机激励

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -2\pi f_0 q_1 + 2\pi n_0 w \sqrt{G_q(n_0)} v \\ \dot{q}_2 = 2 \left(\pi f_0 + \frac{v}{l} \right) q_1 - \frac{2v}{l} q_2 - 2\pi n_0 w \sqrt{G_q(n_0)} v \end{cases} \quad (2)$$

式中 v ——车速, m/s

f_0 ——下截止频率, Hz, 取 $0.011v$

n_0 ——参考空间频率, 取 0.1 m^{-1}

$G_q(n_0)$ ——路面不平度系数, m^3

w ——路面白噪声信号

选取状态向量

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T$$

$$x_1 = z_{11} - q_1 \quad x_2 = z_{21} - q_2$$

$$x_3 = z_{12} - z_{11} \quad x_4 = z_{22} - z_{21}$$

$$x_5 = \dot{z}_{11} \quad x_6 = \dot{z}_{21} \quad x_7 = \dot{z}_3 \quad x_8 = \dot{\theta}$$

系统的状态方程可表示为

$$\dot{X} = AX + BU + GW \quad (3)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ $A_1 = O$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -l_f \\ 0 & -1 & 1 & l_r \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{k_{11}}{m_1} & 0 & \frac{k_{12}}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{k_{21}}{m_2} & 0 & \frac{k_{22}}{m_2} \\ 0 & 0 & -\frac{k_{12}}{m_3} & -\frac{k_{22}}{m_3} \\ 0 & 0 & \frac{k_{12}l_f}{I} & -\frac{k_{22}l_r}{I} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{c_1}{m_1} & 0 & \frac{c_1}{m_1} & -\frac{c_1l_f}{m_1} \\ 0 & -\frac{c_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{c_2l_r}{m_2} \\ \frac{c_1}{m_3} & \frac{c_2}{m_3} & -\frac{c_2+c_2}{m_3} & \frac{c_1l_f-c_2l_r}{m_3} \\ -\frac{c_1l_f}{I} & \frac{c_2l_r}{I} & \frac{c_1l_f-c_2l_r}{I} & -\frac{c_1l_f+c_2l_r}{I} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_1} & 0 & \frac{1}{m_3} & -\frac{l_f}{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_3} & \frac{l_r}{I} \end{bmatrix}^T$$

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$U = \begin{bmatrix} F_f \\ F_r \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

式中 O 为 4×4 零矩阵。

2 主动悬架 LQG 控制器设计

悬架系统的最优控制目标是使汽车获得更好的行驶平顺性和操纵稳定性,即尽可能降低车身垂直加速度和轮胎动载荷,同时限制悬架的动挠度。为协调三者改善中的冲突,在 LQG 控制主动悬架控制器设计中一般采用二次型悬架性能指标,即

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\dot{z}_3^2 + \delta_1(z_{11} - q_1)^2 + \delta_2(z_{21} - q_2)^2 + \delta_3(z_{12} - z_{11})^2 + \delta_4(z_{22} - z_{21})^2 + \delta_\theta \dot{\theta}^2] dt \quad (4)$$

式中 T ——车辆运行的总时间, s

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_\theta$ —— \dot{z}_3^2 的加权系数默认为 1 时, $(z_{11} - q_1)^2, (z_{21} - q_2)^2, (z_{12} - z_{11})^2, (z_{22} - z_{21})^2, \dot{\theta}^2$ 的加权系数

加权系数对悬架性能有很大影响,它的选择决定了设计者对悬架性能的倾向。根据文献[5]提供的方法,通过综合考虑各评价指标的主观加权比例系数与同尺度量化比例系数,确定 LQG 控制中与平顺性各评价指标相关的最终加权系数。

整理式(4)成标准形式

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (X^T QX + U^T RU + 2X^T NU) dt \quad (5)$$

其中 $Q = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad Q_7 \quad Q_8]$

$$Q_1 = [\delta_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$Q_2 = [0 \quad \delta_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_3 + \frac{k_{12}^2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{12}^2 l_f^2}{I^2} \\ \frac{k_{12} k_{22}}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{12} k_{22} l_f l_r}{I^2} \\ -\frac{k_{12} c_1}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{12} c_1 l_f^2}{I^2} \\ -\frac{k_{12} c_2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{12} c_2 l_f l_r}{I^2} \\ \frac{k_{12}(c_1 + c_2)}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{12} l_f (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ -\frac{k_{12}(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{12} l_f (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_{12} k_{22}}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{12} k_{22} l_f l_r}{I^2} \\ \delta_4 + \frac{k_{22}^2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{22}^2 l_r^2}{I^2} \\ -\frac{k_{22} c_1}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{22} c_1 l_f l_r}{I^2} \\ -\frac{k_{22} c_2}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{22} c_2 l_r^2}{I^2} \\ \frac{k_{22}(c_1 + c_2)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{22} l_r (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ -\frac{k_{22}(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{22} l_r (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_{12}c_1}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{12}c_1 l_f^2}{I^2} \\ -\frac{k_{22}c_1}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{22}c_1 l_f l_r}{I^2} \\ \frac{c_1^2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta c_1^2 l_f^2}{I^2} \\ \frac{c_1 c_2}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta c_1 c_2 l_f l_r}{I^2} \\ -\frac{c_1(c_1 + c_2)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta c_1 l_f (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ \frac{c_1(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta c_1 l_f (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_{12}(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{12} l_f (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \\ -\frac{k_{22}(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{22} l_r (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \\ \frac{c_1(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta c_1 l_f (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \\ \frac{c_2(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta c_2 l_r (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \\ -\frac{(c_1 + c_2)(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta (c_1 l_f - c_2 l_r)(c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \\ \frac{(c_1 l_f - c_2 l_r)^2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)^2}{I^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2]$$

$$\mathbf{Q}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_{12}c_2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{12}c_2 l_f l_r}{I^2} \\ -\frac{k_{22}c_2}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{22}c_2 l_r^2}{I^2} \\ \frac{c_1 c_2}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta c_1 c_2 l_f l_r}{I^2} \\ \frac{c_2^2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta c_2^2 l_r^2}{I^2} \\ -\frac{c_2(c_1 + c_2)}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta c_2 l_r (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ \frac{c_2(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta c_2 l_r (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_{12}}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{12} l_f^2}{I^2} \\ -\frac{k_{22}}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{22} l_f l_r}{I^2} \\ \frac{c_1}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta c_1 l_f^2}{I^2} \\ \frac{c_2}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta c_2 l_f l_r}{I^2} \\ -\frac{c_1 + c_2}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta l_f (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ \frac{c_1 l_f - c_2 l_r}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta l_f (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_{12}(c_1 + c_2)}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{12} l_f (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ \frac{k_{22}(c_1 + c_2)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{22} l_r (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ -\frac{c_1(c_1 + c_2)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta c_1 l_f (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ -\frac{c_2(c_1 + c_2)}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta c_2 l_r (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ \frac{(c_1 + c_2)^2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta (c_1 l_f - c_2 l_r)^2}{I^2} \\ -\frac{(c_1 + c_2)(c_1 l_f - c_2 l_r)}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta (c_1 l_f - c_2 l_r)(c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_{12}}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta k_{12} l_f l_r}{I^2} \\ -\frac{k_{22}}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta k_{22} l_r^2}{I^2} \\ \frac{c_1}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta c_1 l_f l_r}{I^2} \\ \frac{c_2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta c_2 l_r^2}{I^2} \\ -\frac{c_1 + c_2}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta l_r (c_1 l_f - c_2 l_r)}{I^2} \\ \frac{c_1 l_f - c_2 l_r}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta l_r (c_1 l_f^2 + c_2 l_r^2)}{I^2} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta l_f^2}{I^2} & \frac{1}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta l_f l_r}{I^2} \\ \frac{1}{m_3^2} - \frac{\delta_\theta l_f l_r}{I^2} & \frac{1}{m_3^2} + \frac{\delta_\theta l_r^2}{I^2} \end{bmatrix}$$

根据 LQG 控制理论, 控制向量满足

$$U = -KX \tag{6}$$

其中 $K = R^{-1}(SB + N)^T$ (7)

J 可以取到最小值。

矩阵 S 是 Ricatti 方程的解, Ricatti 方程形式如下

$$(SA)^T + SA - (SB + N)R^{-1}(SB + N)^T + Q = 0 \tag{8}$$

3 刚度和阻尼系数对 LQG 控制主动悬架的时域响应的影响

定理 1: LQG 控制主动悬架的时域响应不随悬架刚度和阻尼系数的变化而改变。

证明: 令所有刚度和阻尼系数均为 0, 有

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ A_{03} & A_{04} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} Q_{01} & Q_{02} \\ Q_{03} & Q_{04} \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中

$$A_{01} = A_{04} = O$$

$$Q_{02} = Q_{03} = Q_{04} = O$$

$$A_{02} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & l_f \\ 0 & -1 & 1 & l_r \end{bmatrix}$$

$$A_{03} = \begin{bmatrix} -\frac{k_{11}}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_{21}}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{01} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{bmatrix}$$

式中 O 为 4×4 零矩阵。

经过计算得知 A 、 A_0 、 Q 和 Q_0 满足

$$A = A_0 + BR^{-1}N^T \tag{11}$$

$$Q = Q_0 + NR^{-1}N^T \tag{12}$$

将式(11)、(12)代入式(8), 得

$$[S(A_0 + BR^{-1}N^T)]^T + S(A_0 + BR^{-1}N^T) - (SB + N)R^{-1}(SB + N)^T + Q_0 + NR^{-1}N^T = 0$$

简化可得

$$(SA_0)^T + SA_0 - (SB)R^{-1}(SB)^T + Q_0 = 0 \tag{13}$$

将式(6)、(11)代入式(3), 得到

$$\dot{X} = (A_0 + BR^{-1}N^T)X +$$

$$B(-R^{-1}(SB + N)^T)X + GW$$

简化可得

$$\dot{X} = (A_0 - BR^{-1}B^T S^T)X + GW \tag{14}$$

因为式(13)中 A_0 、 Q_0 、 B 、 R 都不涉及 k_{12} 、 k_{22} 、 c_1 和 c_2 , 所以 Ricatti 方程的解 S 与 k_{12} 、 k_{22} 、 c_1 和 c_2 无关。由式(13)、(14)可得 LQG 控制主动悬架的时域响应不随悬架刚度和阻尼系数的变化而变化。

故定理 1 成立。由定理 1 可知: 当悬架刚度和阻尼系数发生变化时, 根据此变化系数设计的主动悬架 LQG 控制器可以使此状态下的悬架性能达到最优, 且不受具体悬架刚度和阻尼系数的影响, 而具有一致性。

4 LQG 控制主动悬架的数值仿真

由式(6)、(7)可知: 刚度和阻尼系数的变化会影响 LQG 控制主动悬架的主动控制力。而主动控制力的全局阻尼特性会影响主动力发生器的制造成本。选用主动控制力在时域内的平均功率表征其负全局阻尼特性, 正平均功率越大表示主动控制力对悬架做正功越多, 其负全局阻尼特性越明显, 反之则反。一般来说负全局阻尼特性越明显, 则要求向悬架供能越多, 则主动力发生器制造成本与使用成本越高。

因此有必要研究悬架刚度和阻尼系数对 LQG 控制主动悬架的包括刚度元件和阻尼元件提供的被动力与主动控制力在内的整体控制力及主动控制力的影响。

由于直接写出式(13)中 S 的解析式非常困难, 本文利用数值仿真进行研究, 仿真所需相关系数见表 1, 仿真时间 t 为 10 s。

表 1 悬架参数

Tab. 1 Suspension parameters

参数	数值	参数	数值
m_1/kg	40	l_f/m	1.3
m_2/kg	45	l_r/m	1.5
m_3/kg	690	$I/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	1 222
$k_{11}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	200 000	δ_1	2 822.3
$k_{12}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	17 000	δ_2	2 822.3
$k_{21}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	200 000	δ_3	348.7
$k_{22}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	22 000	δ_4	410.9
$c_1/(\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	1 000	δ_θ	0.616 5
$c_2/(\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	1 100	$v/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	20
$G_z(n_0)/\text{m}^3$	2.56×10^{-4}		

图2、图3和图4分别是名义工况下LQG控制主动悬架和被动悬架的 $Jt-t$ 、 a_3-t 以及 $\ddot{\theta}-t$ 对比曲线。其中为了更加清晰地展现 $\ddot{\theta}-t$ 的对比特性,图4中选取了0~2s内 $\ddot{\theta}-t$ 的局部曲线。

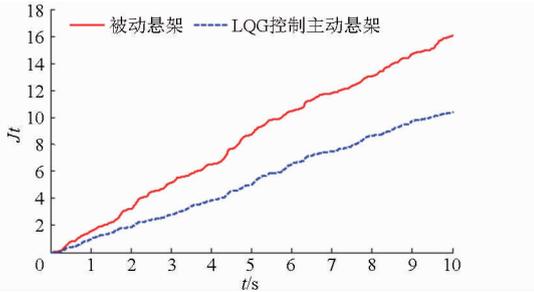


图2 二次型性能指标与时间乘积随时间的变化曲线

Fig. 2 $Jt-t$ curves

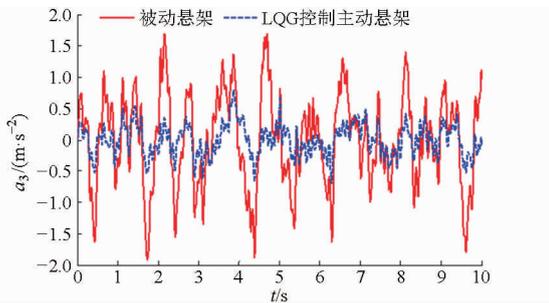


图3 车身加速度随时间的变化曲线

Fig. 3 a_3-t curves

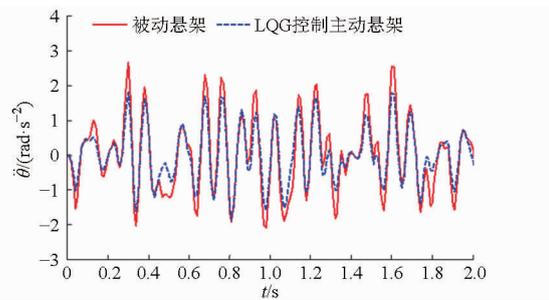


图4 车身俯仰角加速度随时间的变化曲线(局部)

Fig. 4 $\ddot{\theta}-t$ curves (partial enlargement)

由图2可得LQG控制主动悬架的二次型性能指标随时间变化幅度明显小于被动悬架,且主动悬架的 J 较被动悬架下降了35.4%;图3、4表明与被动悬架相比,名义工况下LQG控制主动悬架的车身加速度和俯仰角加速度都有明显的减小,说明LQG控制主动悬架的综合性能明显优于传统的被动悬架。

为更好地揭示悬架刚度和阻尼系数对LQG控制主动悬架的主动控制力与包括刚度元件和阻尼元件提供的被动力与主动控制力在内的整体控制力的影响,选取4种不同的参数状态来进行对比研究,参数状态1: k_{12} 、 c_1 、 $0.5k_{22}$ 和 $1.5c_2$;参数状态2: k_{12} 、 c_1 、 $1.5k_{22}$ 和 $0.5c_2$;参数状态3: $0.5k_{12}$ 、

$1.5c_1$ 、 k_{22} 和 c_2 ;参数状态4: $1.5k_{12}$ 、 $0.5c_1$ 、 k_{22} 和 c_2 ,如图5~8所示。

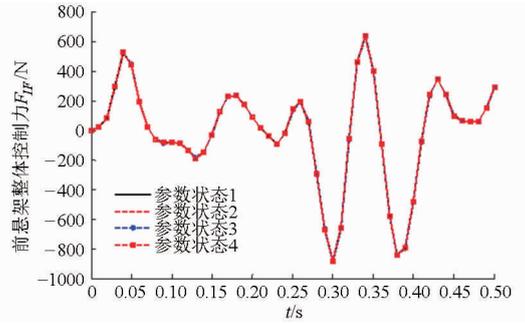


图5 不同参数状态下前悬架整体控制力曲线(局部)

Fig. 5 $F_{IF}-t$ curves (partial enlargement)

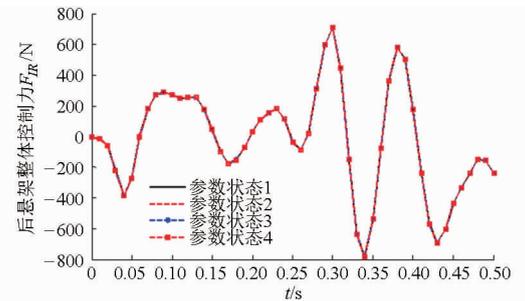


图6 不同参数状态下后悬架整体控制力曲线(局部)

Fig. 6 $F_{IR}-t$ curves (partial enlargement)

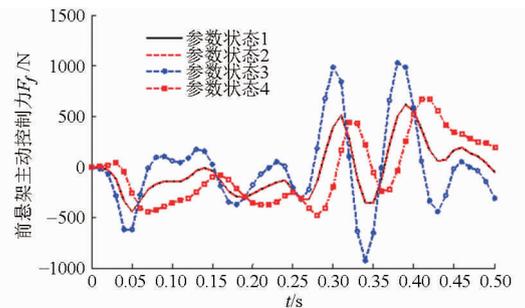


图7 不同参数状态下前悬架主动控制力曲线(局部)

Fig. 7 F_f-t curves (partial enlargement)

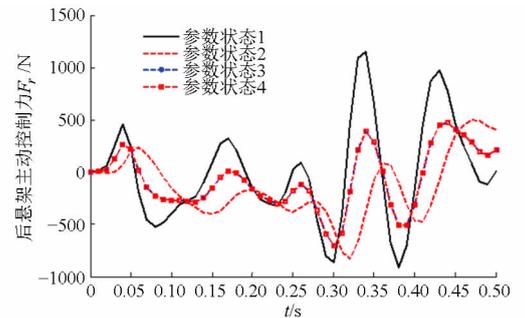


图8 不同参数状态下后悬架主动控制力曲线(局部)

Fig. 8 F_r-t curves (partial enlargement)

从图5和图6中可以看出:在不同参数状态下,前后悬架的整体控制力相互独立且不受刚度和阻尼系数的影响。与第3节的研究结果相同。

图7中参数状态1和2的 F_f-t 曲线重合,说明后悬架的刚度和阻尼系数不影响前悬架主动控制

力。图 8 中参数状态 3 和 4 的 $F_r - t$ 曲线重合, 说明前悬架的刚度和阻尼系数同样不影响后悬架主动控制力。图 7 中参数状态 3 和 4 的 $F_f - t$ 曲线不重合以及图 8 中参数状态 1 和 2 的 $F_r - t$ 曲线不重合, 说明前悬架的主动控制力随着前悬架刚度和阻尼系数的变化而发生相应的变化, 反之在后悬架上同样成立。说明 LQG 控制主动悬架的主动控制力受其并联刚度和阻尼系数的影响, 且前、后悬架的主动控制力相互独立。

将 LQG 控制悬架的前、后主动控制力的实时功率 P_1 和 P_2 分别表示成

$$P_1 = F_f(\dot{z}_{12} - \dot{z}_{11}) \quad (15)$$

$$P_2 = F_r(\dot{z}_{22} - \dot{z}_{21}) \quad (16)$$

采用主动控制力在时域内的平均功率表征其全局阻尼特性, \bar{P}_1 和 \bar{P}_2 分别表示 LQG 控制悬架的前后主动控制力在时域内的平均功率。

图 9 和图 10 分别表示在前、后悬架刚度和阻尼系数的变化下对应悬架的主动控制力在 $t = 10$ s 内的平均功率。

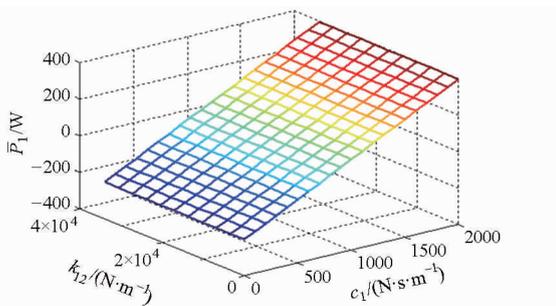


图 9 k_{12} 和 c_1 变化下的 \bar{P}_1 曲线

Fig. 9 Influences of k_{12} and c_1 on \bar{P}_1

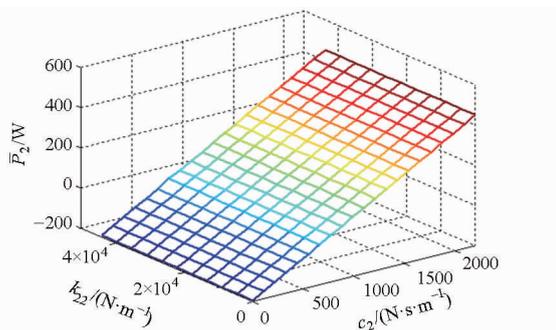


图 10 k_{22} 和 c_2 变化下的 \bar{P}_2 曲线

Fig. 10 Influences of k_{22} and c_2 on \bar{P}_2

图 9 和图 10 显示: 刚度基本上不影响 LQG 控制主动悬架主动控制力的平均功率即全局阻尼特性; 但前、后主动控制力的平均功率随着各自并联阻尼的增加而由负变正, 各自全局阻尼特性由正特性转变成负特性。说明了随着并联阻尼的增加, 主动控制力向悬架供能越多, 相应的主动力发生器制造成本和使用成本也越高。

5 非线性刚度和阻尼特性对 LQG 控制主动悬架的控制影响

工程实际中空气悬架和普通减震器一般都具有非线性特性^[18-19], 如果考虑上述非线性刚度和阻尼特性, 令 f_{k1} 、 f_{c1} 、 f_{k2} 和 f_{c2} 分别表示前悬架刚度、前悬架阻尼、后悬架刚度和后悬架阻尼产生的具有非线性特性的被动力。

图 11 为具有非线性特性的主动悬架设计 LQG 主动控制器, 具体流程如下。

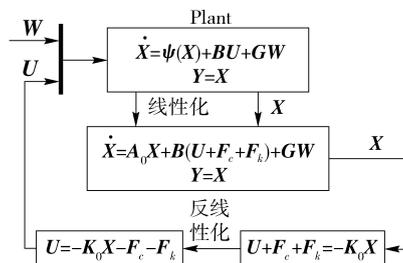


图 11 具有非线性特性的主动悬架的 LQG 控制原理

Fig. 11 Work principle of LQG control for active suspension with nonlinear characteristics

将主动悬架系统的状态方程(3)改写成

$$\dot{X} = \psi(X) + BU + GW \quad (17)$$

其中

$$\psi(X) = \begin{bmatrix} \dot{z}_{11} \\ \dot{z}_{21} \\ \dot{z}_{12} - \dot{z}_{11} \\ \dot{z}_{22} - \dot{z}_{21} \\ -\frac{k_{11}}{m_1}z_{11} - \frac{f_{k1} + f_{c1}}{m_1} \\ -\frac{k_{21}}{m_2}z_{21} - \frac{f_{k2} + f_{c2}}{m_2} \\ \frac{f_{k1} + f_{c1} + f_{k2} + f_{c2}}{m_3} \\ \frac{-l_f(f_{k1} + f_{c1}) + l_r(f_{k2} + f_{c2})}{I} \end{bmatrix}$$

将式(17)按照前馈/反馈线性化方法^[20]进行线性化有

$$\dot{X} = A_0X + B(U + F_c + F_k) + GW \quad (18)$$

其中 $F_k = \begin{bmatrix} f_{k1} \\ f_{k2} \end{bmatrix}$ $F_c = \begin{bmatrix} f_{c1} \\ f_{c2} \end{bmatrix}$

式中 F_k ——前后主动悬架刚度产生的被动力矩阵

F_c ——前后主动悬架阻尼产生的被动力矩阵

如图 11 所示, 对式(18)直接求取整体控制力向量为

$$U + F_k + F_c = U_0 = -R_0^{-1}(SB + N_0)^T X \quad (19)$$

R_0 、 N_0 和 U_0 为所有刚度和阻尼系数均为0时 R 、 N 和 U 的对应向量矩阵。

显然无论 F_k 和 F_c 是否具有非线性特性,非线性刚度和阻尼系数产生的被动力在控制系统线性化和控制反线性化中被抵消,且满足式(19)中整体控制力向量为 U_0 。

综上所述:具有非线性刚度和阻尼特性的LQG控制主动悬架,非线性刚度和阻尼产生的被动力与LQG控制主动控制力之和同样不受刚度和阻尼系数影响,性能也不受上述2系数的影响。

根据式(19)可知,按照本节提供的方法,在根据其他控制方法设计及优化控制器求取整体控制力向量 U_0 的过程中,无论是非线性还是线性,也会存在刚度和阻尼系数产生的被动力在控制系统线性化和控制反线性化中被抵消现象。因此,本文关于

LQG控制主动悬架的相关研究结果也适用于使用其他控制的主动悬架。

6 结论

(1)分别针对半车4自由度线性与非线性车辆模型,设计了主动悬架LQG控制器,并通过理论推导和数值仿真研究了刚度和阻尼系数对LQG主动悬架的控制响应的影响。

(2)无论刚度和阻尼系数是否具有非线性特性及如何变化,均不影响LQG控制主动悬架的时域响应和控制效果;LQG控制前后悬架的整体控制力相互独立且不受这两类参数的特性及变化的影响;并联刚度的改变基本上不影响LQG控制主动悬架主动控制力的全局阻尼特性;而随着其并联阻尼的增加,主动控制力的全局阻尼特性明显由正特性转变为负特性。

参 考 文 献

- 1 Aldair A A, Wang W J. A neurofuzzy controller for full vehicle active suspension systems [J]. Journal of Vibration and Control, 2011, 18(12): 1837 - 1854.
- 2 Simone F, Alireza K. A data-driven approach to mixed-sensitivity control with application to an active suspension system [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2013, 9(4): 2293 - 2300.
- 3 杨柳青, 陈无畏, 张荣芸, 等. 基于控制律重组的汽车半主动悬架容错控制与试验[J]. 农业机械学报, 2013, 44(10): 1 - 9.
Yang Liuqing, Chen Wuwei, Zhang Rongyun, et al. Fault-tolerant control and experiment on vehicle semi-active suspension system based on control law reconfiguration [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(10): 1 - 9. (in Chinese)
- 4 孔英秀, 赵丁选, 杨彬, 等. 具有时滞的主动悬架非脆弱 $H_\infty/L_2 - L_\infty$ 静态输出反馈控制[J]. 农业机械学报, 2014, 45(8): 1 - 7.
Kong Yingxiu, Zhao Dingxuan, Yang Bin, et al. Non-fragile $H_\infty/L_2 - L_\infty$ static output feedback control of active suspension with actuator input delay [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(8): 1 - 7. (in Chinese)
- 5 陈士安, 邱峰, 何仁, 等. 一种确定车辆悬架LQG控制加权系数的方法[J]. 振动与冲击, 2008, 27(2): 65 - 68.
Chen Shian, Qiu Feng, He Ren. A method for choosing weights in a suspension LQG controller [J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(2): 65 - 68. (in Chinese)
- 6 Chen Shian, He Ren, Liu Hongguang, et al. An optimal design for suspension based on LQG control [C] // International Conference on Electric Information and Control Engineering Proceedings, 2011: 1987 - 1992.
- 7 柴陵江, 孙涛, 冯金芝, 等. 基于层次分析法的主动悬架LQG控制器设计[J]. 汽车工程, 2010, 32(8): 712 - 718.
Chai Lingjiang, Sun Tao, Feng Jinzhi, et al. Design of the LQG controller for active suspension system based on analytic hierarchy process [J]. Automotive Engineering, 2010, 32(8): 712 - 718. (in Chinese)
- 8 陈杰平, 冯武堂, 郭万山, 等. 整车磁流变减振器半主动悬架变论域模糊控制策略[J]. 农业机械学报, 2011, 42(5): 8 - 13.
Chen Jieping, Feng Wutang, Guo Wanshan, et al. Whole vehicle magnetorheological fluid damper semi-active suspension variable universe fuzzy control simulation and test [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(5): 8 - 13. (in Chinese)
- 9 郭全民, 雷蓓蓓. 半主动悬架PID控制的研究和优化[J]. 国外电子测量技术, 2015, 34(4): 60 - 65.
Guo Quanming, Lei Beibei. Research and optimization for semi-active suspension PID control [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2015, 34(4): 60 - 65. (in Chinese)
- 10 Michael B, Pablo R R. Sliding mode controller design for linear systems with unmeasured states [J]. Journal of the Franklin Institute, 2012, 349(4): 1337 - 1349.
- 11 Fernando C, Leonid F. Analysis design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(5): 853 - 862.
- 12 张学萍. 前悬架钢板弹簧动力学建模及刚度优化[J]. 山东交通学院学报, 2014, 12(4): 24 - 27.
Zhang Xueping. Dynamics modeling and stiffness optimization of front suspension leaf spring [J]. Journal of Shandong Jiaotong University, 2014, 12(4): 24 - 27. (in Chinese)

- Mechanical Engineering, 2008, 19(6): 721 - 724. (in Chinese)
- 13 Thomas M, Tesar D. Dynamic modeling of serial manipulator arms[J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1982, 104(3): 218 - 228.
- 14 黄真. 平行支路机械手动力模型(一)系数矩阵[J]. 东北重型机械学院学报, 1985(4): 36 - 44.
- 15 Zhao Tieshi, Geng Mingchao, Chen Yuhang, et al. Kinematics and dynamics hessian matrices of manipulators based on screw theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(2): 226 - 235.
- 16 耿明超, 赵铁石, 杨建涛, 等. 平面弹性欠驱动并联机构刚度特性分析[J]. 农业机械学报, 2015, 46(5): 365 - 371.
Geng Mingchao, Zhao Tieshi, Yang Jiantao, et al. Stiffness characteristics of planar elastic underactuated parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(5): 365 - 371. (in Chinese)
- 17 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 4-UPS/UPR 并联机构动力学分析[J]. 农业机械学报, 2014, 45(8): 299 - 306.
Geng Mingchao, Zhao Tieshi, Wang Chang, et al. 4-UPS/UPR parallel mechanism dynamic analysis [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(8): 299 - 306. (in Chinese)
- 18 张忠海, 李端玲. 空间并联机构运动学分析的共形几何代数方法[J]. 农业机械学报, 2015, 46(4): 325 - 330.
Zhang Zhonghai, Li Duanling. Conformal geometric algebra method for kinematics analysis of spatial parallel mechanisms [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(4): 325 - 330. (in Chinese)
- 19 陈修龙, 孙先洋, 邓昱. 4-UPS-RPS 空间 5 自由度并联机构运动学分析[J]. 农业机械学报, 2013, 44(8): 257 - 261, 267.
Chen Xiulong, Sun Xianyang, Deng Yu. Kinematics analysis of 4-UPS-RPS spatial 5-DOF parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(8): 257 - 261, 267. (in Chinese)
- 20 Asgari M, Ardestani M. Dynamics and control of a novel 3-DOF spatial parallel robot[C] // 2013 First RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2013: 183 - 188.
- 21 李雪鹏. 两种含平面分支六自由度并联机构理论研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2014.
Li Xuepeng. Theoretical study of two six-DOF parallel manipulators with planar limbs[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2014. (in Chinese)
- 22 张付祥, 付宜利, 王树国. 闭链级联式机器人基于旋量理论的运动学分析方法[J]. 机械工程学报, 2006, 42(4): 112 - 117.
Zhang Fuxiang, Fu Yili, Wang Shuguo. Screw theory based method of kinematic analysis on tandem robots of closed chains. [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(4): 112 - 117. (in Chinese)
- 23 Rico J M, Gallardo J, Duffy J. Screw theory and higher order kinematic analysis of open serial and closed chains[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(4): 559 - 586.
- 24 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

~~~~~

(上接第 308 页)

- 13 干年妃, 程超, 游雄杰, 等. 基于扭杆安装方式的悬架刚度计算及特性分析[J]. 机械设计及制造, 2015(1): 74 - 78.  
Gan Nianfei, Cheng Chao, You Xiongjie, et al. Stiffness calculation and performance analysis of suspension based on the installation of torsion bar spring [J]. Machinery Design & Manufacture, 2015(1): 74 - 78. (in Chinese)
- 14 董小冈, 余淼, 廖昌荣, 等. 冲击载荷下磁流变变刚度变阻尼缓冲系统减振控制[J]. 农业机械学报, 2010, 41(3): 20 - 24.  
Dong Xiaomin, Yu Miao, Liao Changrong, et al. Absorbing control of magneto-rheological variable stiffness and damping system under impact load [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(3): 20 - 24. (in Chinese)
- 15 汪若尘, 江浩斌, 张效良, 等. 阻尼非线性半主动悬架的建模与控制[J]. 农业机械学报, 2008, 39(12): 14 - 17.  
Wang Ruochen, Jiang Haobin, Zhang Xiaoliang, et al. Modeling and control of semi-active suspension with nonlinear damping [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(12): 14 - 17. (in Chinese)
- 16 Crolla D, 喻凡. 车辆动力学及其控制[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003.
- 17 吴光强, 黄焕军, 叶光湖. 基于分数阶微积分的汽车空气悬架半主动控制[J]. 农业机械学报, 2014, 45(7): 19 - 25.  
Wu Guangqiang, Huang Huanjun, Ye Guanghu. Semi-active control of automotive air suspension based on fractional calculus [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(7): 19 - 25. (in Chinese)
- 18 陈燎, 周孔亢, 李仲兴. 空气弹簧动态特性拟合及空气悬架变刚度计算分析[J]. 机械工程学报, 2010, 46(4): 93 - 98.  
Chen Liao, Zhou Kongkang, Li Zhongxing. Dynamic characteristics fitting of air springs and numerical analysis of air suspensions with variant stiffness [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(4): 93 - 98. (in Chinese)
- 19 叶光湖, 吴光强. 汽车磁流变减振器半主动空气悬架仿真研究[J]. 汽车工程, 2015, 37(5): 560 - 565.  
Ye Guanghu, Wu Guangqiang. A study on the simulation of semi-active air suspension with magneto-rheological damper [J]. Automotive Engineering, 2015, 37(5): 560 - 565. (in Chinese)
- 20 胡明华. 具有多输入和扰动作用的非线性系统的前馈/反馈线性化[J]. 航空学报, 1991, 12(4): 140 - 147.  
Hu Minghua. Feedforward and feedback linearization of non-linear system with multi-input and disturbances [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1991, 12(4): 140 - 147. (in Chinese)