

抑制拓扑优化中灰度单元的双重 SIMP 方法^{*}

张志飞^{1,2} 徐 伟² 徐中明^{1,2} 贺岩松^{1,2}

(1. 重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400030; 2. 重庆大学汽车工程学院, 重庆 400030)

摘要: 为了抑制连续体结构拓扑优化结果中的灰度单元, 在实体各向同性材料惩罚密度法 (Solid isotropic microstructures with penalization, SIMP) 的基础上提出一种双重 SIMP 方法。首先利用含有灵敏度过滤的 SIMP 方法对设计变量进行迭代和优化, 将优化结果作为中间变量, 然后用不含有灵敏度过滤的 SIMP 方法对中间变量进行优化迭代, 得到最终优化结果。以简支梁的结构柔顺度最小为例, 将双重 SIMP 方法用于柔性结构的优化设计中并与标准 SIMP 算法相比; 结果表明, 双重 SIMP 方法得到清晰的拓扑分布结构, 有效抑制了灰度单元, 并且双重 SIMP 方法可以得到更小的结构柔顺度, 证明了该方法的有效性; 双重 SIMP 算法的灰度单元对惩罚因子的依赖性很小, 可以选用较小的惩罚因子; 针对不同的网格划分模型, 双重 SIMP 算法得到的优化目标和灰度单元数更稳定, 体现出了很好的网格依赖性。说明该方法具有很好的适用性和稳定性。

关键词: 连续体结构 拓扑优化 灰度单元 实体各向同性材料惩罚密度法 灵敏度过滤

中图分类号: TH11 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)11-0405-06

Double-SIMP Method for Gray-scale Elements Suppression in Topology Optimization

Zhang Zhifei^{1,2} Xu Wei² Xu Zhongming^{1,2} He Yansong^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Mechanical Transmissions, Chongqing University, Chongqing 400030, China

2. School of Automotive Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: To suppress gray-scale elements in topology optimization for continuum structures, a new double-SIMP (Solid isotropic microstructures with penalization) method was presented based on standard SIMP approaches. It is found that the SIMP method without sensitivity filter could suppress gray-scale elements in the topological structures. Therefore, a two-pass method was presented. Firstly, the standard SIMP method with sensitivity filter was employed to generate intermediate design variables; secondly, the SIMP method without sensitivity filter was adopted to update the intermediate design variables again and produce the final solution. Taking simple supported beam as an example, it is successful to apply double-SIMP method in the topological design of flexible body. According to the results, gray-scale elements were suppressed successfully. What is more, the results showed that smaller structural compliance could be obtained through double-SIMP method. The mesh-dependence problem of double-SIMP method was also better. Besides, to suppress the gray-scale elements, the standard SIMP method would need to increase the penalty factor. However, the bigger the penalty factor was, the more the iterations were. The double-SIMP method didn't rely on the penalty factor. Compared with standard SIMP method, there were not extra parameters and constraints in the double-SIMP method. As a consequence, the applicability is similar between the two kinds of methods.

Key words: Continuum structure Topology optimization Gray-scale element Solid isotropic microstructures with penalization Sensitivity filter

收稿日期: 2015-03-12 修回日期: 2015-04-21

^{*} 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (CDJZR14115501)

作者简介: 张志飞, 副教授, 主要从事结构分析与结构优化、车辆系统动力学及控制研究, E-mail: z. zhang@cqu.edu.cn

引言

结构优化设计技术发展迅速,其中连续体结构的拓扑优化技术逐渐成为该领域的研究热点和难点之一。Bendsoe 等^[1]首先提出了连续体拓扑优化的概念,并且初步论述了基于均匀化理论的拓扑优化方法。目前研究较多的主要有:均匀化方法^[1]、实体各向同性材料惩罚相对密度法(Solid isotropic material with penalization, SIMP)^[2-3]、水平集方法^[4-5]、独立连续拓扑变量及映射变换方法(Independent continuous mapping, ICM)^[6-7]和拓扑描述函数(Topology description function, TDF)^[8]等。在众多的拓扑优化方法中,SIMP 方法由于收敛速度快、概念简单以及易于实现等优点而得到最广泛的应用^[9]。为了克服拓扑优化结果中普遍存在棋盘格式、网格依赖性等数值不稳定性问题^[10],基于数字图像原理的过滤法被广泛应用到拓扑优化过程中,但不管是基于灵敏度还是基于密度的过滤方法,在优化结果的实体与空洞之间都存在大量的灰色过渡区域。在某些拓扑优化问题中(例如声子晶体的优化问题),对灰色过渡区域后处理后的优化结果将完全偏离初始的拓扑优化结果^[11]。为了得到最接近最优布局的结果,Sigmund 按照重要性由高到底的顺序列出了理想解决方案应该具有的特征:①可以克服棋盘格式及网格依赖性。②可以实现优化结果的黑白分布(即抑制灰度单元)。③优化结果应具有可制造加工性(考虑包括工具尺寸、孔的最小尺寸等)。④不添加多余的约束。⑤没有过多的调节参数。⑥算法稳定且可快速收敛。⑦在不同的拓扑优化问题中具有广泛适应性。⑧简单且易于实现。⑨优化程序应具有较短的运行时间^[11]。

在不同的解决方案中,Fuchs 等^[12]在 SIMP 方法中引入了倒变量和 SRV(The sum of the reciprocal variables)约束;周向阳等^[13-14]在此基础上将 SIMP 与 SRV 方法结合,满足了 SRV 对设计变量初始值要求高的缺点,并进一步提出了 SIMP 和 SSV(The sum of squares of the variables)结合的方法;龙凯等^[15]在 SIMP 方法基础上,提出两种启发式的优化准则法;易继军等^[16]采用了体积约束限渐进的方式;李翔等^[17]引入了灰度过滤函数对设计变量直接修正。但上述方法都具有引入了多余约束的缺点。张维声^[18]、龙凯等^[19]对原有灵敏度过滤函数进行了改进,但添加了额外的调节参数。Groenwold 等^[20]提出了抑制灰度单元的启发式优化准则法,但优化迭代次数较多,参数难以确定。占金青等^[21]基于节点变量法获得了边界清晰的拓扑结构,但计算

效率较低。

本文以体积约束下柔顺度最小化的结构拓扑优化问题为例,提出一种双重 SIMP 的拓扑优化方法,在克服棋盘格式和网格依赖性的基础上抑制灰度单元的数量,得到黑白分布清晰的优化结果。

1 SIMP 建模与求解方法

1.1 密度函数插值模型

在变密度拓扑优化方法中, x_i 表示第 i 号单元的相对密度,即设计变量。当设计变量 $x_i = 0$ 时,表示该单元处无材料存在;当设计变量 $x_i = 1$ 时,表示该单元处有完整材料存在;当设计变量 $0 < x_i < 1$ 时,表示该单元处材料处于灰度。

运用变密度法进行拓扑优化需要在单元相对密度与单元刚度矩阵间建立对应的函数关系,即

$$k_i = f(x_i)k_i^0 \tag{1}$$

式中 k_i ——单元相对密度为 x_i 时对应的单元刚度矩阵

$f(x_i)$ ——人为施加的单元相对密度与单元刚度矩阵之间的函数

k_i^0 ——单元相对密度 x_i 为 1 时所对应的单元刚度矩阵

在 SIMP 方法中,取

$$f(x_i) = E_{\min} + x_i^p(E^0 - E_{\min}) \tag{2}$$

式中 $E_{\min}$ 、 E^0 ——单元相对密度为 0 和 1 处材料的弹性模量,为了求解数值稳定,

$$\text{取 } E_{\min} = \frac{E^0}{10^9}$$

p ——惩罚因子,考虑到数值计算的稳定性,通常取 2~6

1.2 经典算例的拓扑优化建模

将体积约束下结构柔顺度最小化的拓扑优化问题用数学语言描述为

$$\begin{cases} \min C = U^T K U = \sum_{i=1}^M x_i^p u_i^T k_0 u_i \\ \text{s. t. } \begin{cases} V = \sum_{i=1}^M x_i v_i^0 \leq \theta V^0 \\ 0 < x_i \leq x_i < 1 \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

式中 C ——结构柔顺度

U ——整体位移矩阵

K ——整体刚度矩阵

M ——划分单元的数量

u_i ——单元 i 的单元位移矩阵

k_0 ——单元相对密度为 1 的单元刚度矩阵

V ——优化后设计域的材料体积

v_i^0 ——单元 i 的体积

V^0 ——优化前设计域的材料体积
 θ ——约束的材料体积分数
 $\underline{x}_i$ ——单元相对密度的最小值,取 0.001 (大于零以避免出现奇异值)

优化迭代终止判据由设计变量相对变化率决定,数学表达式为

$$\max(|(x_i^{k+1} - x_i^k)/x_i^{k+1}|) \leq \varepsilon \tag{4}$$

式中 k ——迭代次数

ε ——收敛率,取 0.05

1.3 灵敏度计算

结构柔度相对单元密度的灵敏度计算公式为

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} \tag{5}$$

由于相对密度 x_i 仅与单元 i 有关,因此式(5)可以写为

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -\mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial x_i} \mathbf{u}_i \tag{6}$$

由上面建立的材料模型得

$$\frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \mathbf{k}_i^0 = p x_i^{p-1} \mathbf{k}_i^0 \tag{7}$$

将式(7)代入式(5)得到

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i^0 \mathbf{u}_i \tag{8}$$

体积对单元相对密度的导数为

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial (x_i v_i^0)}{\partial x_i} = v_i^0 \tag{9}$$

1.4 变量更新准则

考虑到实际结构中设计变量往往在 1 000 个以上,故利用优化准则算法(OC 算法)推导设计变量的更新公式,求解拓扑优化数学模型^[22]。

最终得到的设计变量的更新准则为

$$B = \frac{p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i^0 \mathbf{u}_i}{\lambda v_i^0} \tag{10}$$
$$x_i^{new} = \begin{cases} \max(\underline{x}_i, x_i - m) & (x_i B^\alpha \leq \max(\underline{x}_i, x_i - m)) \\ x_i B^\alpha & (\max(\underline{x}_i, x_i - m) < x_i B^\alpha \leq \min(1, x_i + m)) \\ \min(1, x_i + m) & (\min(1, x_i + m) \leq x_i B^\alpha) \end{cases} \tag{11}$$

式中 B ——中间变量
 λ ——拉格朗日乘子,通过对分法确定
 m ——设计变量移动极限,取 0.2
 α ——阻尼系数,取 0.5

2 双重 SIMP 方法

Sigmund 提出以过滤半径范围内单元灵敏度的加权平均值代替原来的灵敏度^[11]。灵敏度过滤公

式为

$$\alpha_e = \frac{1}{N} \sum_i^N H_i x_i \alpha_i \tag{12}$$

其中

$$H_i = r_{mn} - r(e, i) \tag{13}$$

式中 α_e ——中心单元 e 过滤后的灵敏度

α_i ——距离中心单元过滤半径范围内的所有单元 i 过滤前的灵敏度

x_e, x_i ——单元 e, i 的相对密度

N ——距离中心单元不超过 r_{mn} 范围内的所有单元总数

r_{mn} ——过滤半径

$r(e, i)$ ——单元 e, i 中心间的距离

Sigmund 提出的标准 SIMP 算法采用了灵敏度过滤方法,可以克服拓扑优化结果中的棋盘格式和网格依赖性。但标准 SIMP 算法中的灵敏度过滤却是边界扩散(即灰度单元较多)的主要原因。多次实验发现,SIMP 优化算法本身具有抑制灰度单元的作用,这是往往被人们忽略的。

因此,利用 SIMP 算法本身抑制灰度单元的作用和灵敏过滤方法对棋盘格式和网格依赖性的提升,本文提出了一种新的双重 SIMP 优化方法,双重 SIMP 算法流程图如图 1 所示,其基本策略是:利用加入灵敏度过滤的 SIMP 方法(即标准 SIMP 方法)对式(3)所示模型的初始设计变量 x_0 进行变量更新和优化迭代,将优化结果作为中间变量 x^* ;用 x^* 初始化设计变量,其他参数不变,然后用不含有灵敏度过滤的 SIMP 方法,再次对式(3)所示的模型进行新

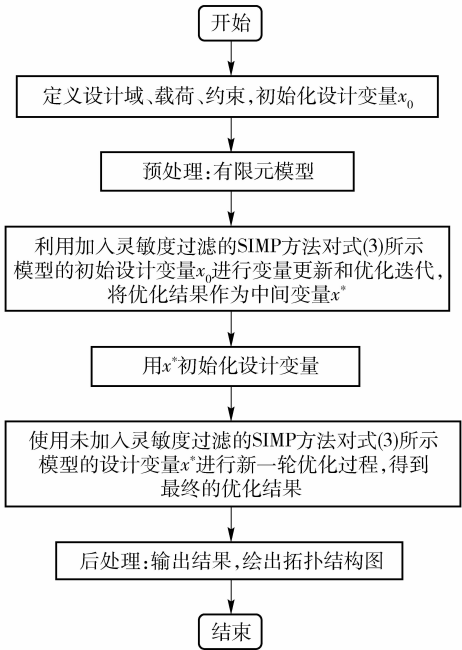


图 1 双重 SIMP 方法流程图

Fig. 1 Flow chart of double-SIMP method

一轮的优化迭代过程,并得到最终的优化结果。

双重 SIMP 优化方法既利用了灵敏度过滤方法对棋盘格式和网格依赖性的抑制,又抑制了由此带来的灰度单元。与其它方法相比,这种方法简单有效,并且由于与标准 SIMP 方法相比没有加入额外的参数或者约束,其适用性与标准 SIMP 方法相当。

3 二维拓扑优化数值算例

3.1 简支梁拓扑优化算例

以经典拓扑优化算例来检验本文方法的可行性和有效性,算例在 Matlab 14a 环境中编程实现,采用平面四节点单元离散结构,不失一般性,算例忽略结构尺寸和材料的单位,弹性模量取 1,泊松比取 0.3,在不加说明的情况下,单元边长取 1,惩罚因子取 3,过滤半径取 2。

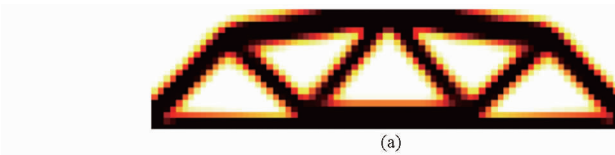


图 2 所示是一根简支梁的经典示例。一端为固定铰支座,另一端为可以横向滚动的铰支座。在梁的上端缘中部施加一大小为 1 的载荷。以结构柔顺度最小为优化目标,设计区域被划分为 80×20 个单元,设计的体积比为 50%。分别采用 Sigmund 提出的标准 SIMP 方法和本文提出的双重 SIMP 方法,最终拓扑结构对比如图 3 所示(颜色的深浅表示单元相对密度的大小,密度越大,颜色越深),拓扑优化结果如表 1 所示。

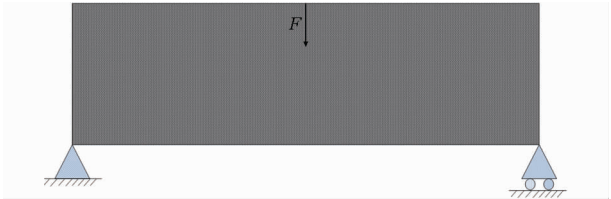


图 2 简支梁模型
Fig.2 Design domain of simply supported beam

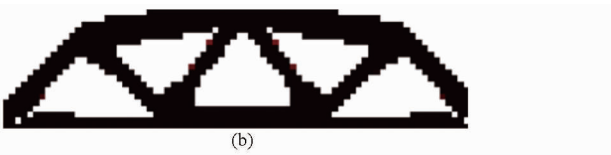


图 3 拓扑结构对比结果
Fig.3 Contrast of topological structures
(a) 标准 SIMP 方法 (b) 双重 SIMP 方法

表 1 基于不同方法的拓扑结果对比
Tab.1 Contrast of topological results obtained by different methods

方法	迭代 步数	最优结构	灰度单元
		柔顺度	($0.001 < x_i < 1$) 百分比/%
标准 SIMP	82	42.37	45.25
双重 SIMP	98	37.69	0.50

从图 3 和表 1 看出,两种方法最终的拓扑结构相似,但是使用双重 SIMP 方法可以有效抑制灰度单元的数量,使拓扑边界更加清晰,并且在不过多增加迭代步数的情况下可以使结构柔顺度更小。

3.2 双重 SIMP 优化结果与网格划分的关系

为了验证双重 SIMP 方法对网格是否依赖,将图 2 定义的设计域分别划分为 96×24 、 120×30 、 144×36 、 160×40 个单元,得到的拓扑结构如图 4 所示,拓扑优化结果如表 2 所示。

综合图 3 和图 4 可以看出,相比标准 SIMP 方法,双重 SIMP 方法在拓扑结构对网格的依赖性方面是相似的。将不同网格划分情况下的灰度单元比例和结构柔顺度结果进行对比。可以看出,当划分的网格数量从 80×20 到 160×40 之间变化时,使用标准 SIMP 方法,结构柔顺度的最大变化量为 1.59,灰度单元百分比的最大变化量为 15.31%;而采用

双重 SIMP 方法,结构柔顺度的最大变化量为 0.37,灰度单元百分比的最大变化量为 0.97%。可见双重 SIMP 方法在最优结构柔顺度和灰度单元所占比例对网格的依赖性方面都具有优势。

3.3 双重 SIMP 优化结果与惩罚因子的关系

SIMP 算法中惩罚因子的取值受到算法稳定性的限制不能取得过大,通常取 2~6。为了验证双重 SIMP 方法对惩罚因子是否依赖,将图 2 定义的区域划分为 80×20 个网格,同时惩罚因子分别取 3.5、4.0、4.5、5.0、5.5、6.0、6.5,观察得到的拓扑结果如表 3 所示。

从表 3 看出,标准 SIMP 方法优化结果中灰度单元所占百分比随惩罚因子增加而明显减小,但惩罚因子增大将显著增加迭代步数;而双重 SIMP 方法优化结果中灰度单元所占百分比则保持相对稳定,基本不受惩罚因子影响。因此,双重 SIMP 方法可以选用较小的惩罚因子,在不过多增加迭代步数和保证算法稳定的基础上得到更为清晰的拓扑结构。

4 结论

(1) 针对连续体结构拓扑优化中的灰度单元过多这一问题,在标准 SIMP 方法的基础上提出一种双重 SIMP 方法,充分利用 SIMP 方法本身来抑制灰

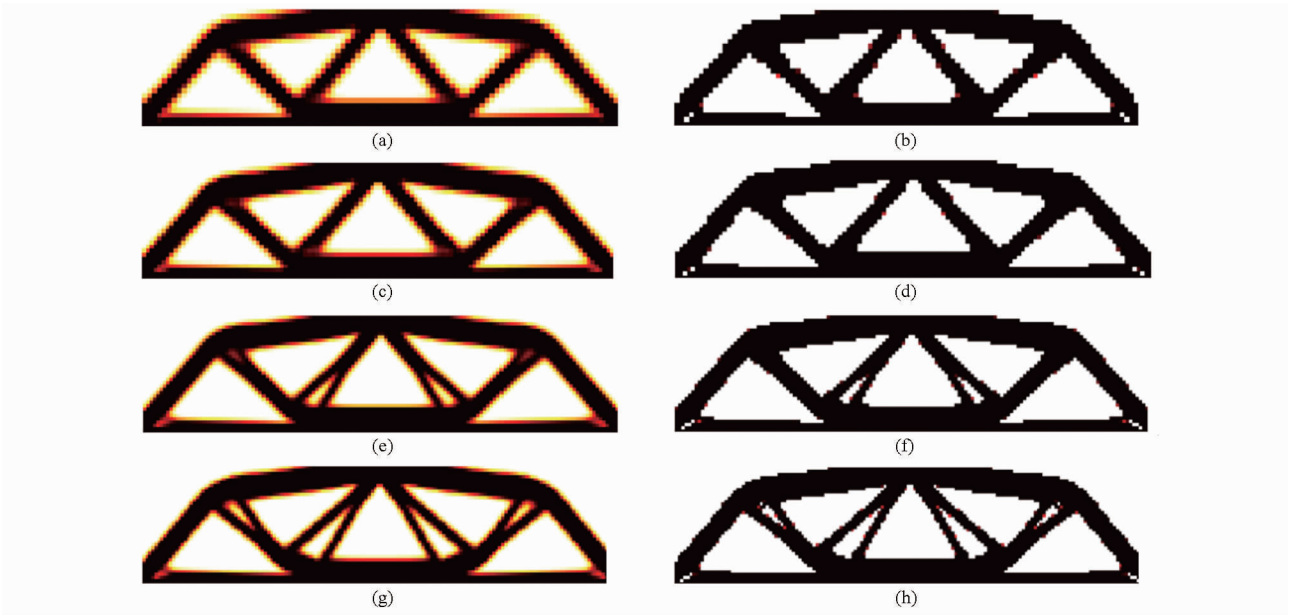


图 4 网格细化后得到的拓扑结构对比结果

Fig. 4 Contrast of topological structures with grids of different amounts

(a) 标准 SIMP 方法,96 × 24 (b) 双重 SIMP 方法,96 × 24 (c) 标准 SIMP 方法,120 × 30 (d) 双重 SIMP 方法,120 × 30
(e) 标准 SIMP 方法,144 × 36 (f) 双重 SIMP 方法,144 × 36 (g) 标准 SIMP 方法,160 × 40 (h) 双重 SIMP 方法,160 × 40

表 2 不同网格下的拓扑结果对比

Tab. 2 Contrast of topological results with grids of different amounts

网格数量	标准 SIMP	双重 SIMP	标准 SIMP	双重 SIMP
	最优结构	最优结构	灰度单元	灰度单元
	柔顺度	柔顺度	百分比/%	百分比/%
80 × 20	42. 37	37. 69	45. 25	0. 50
96 × 24	41. 81	37. 91	39. 06	0. 87
120 × 30	41. 13	37. 96	33. 56	0. 44
144 × 36	40. 85	38. 06	29. 94	1. 08
160 × 40	40. 78	37. 99	31. 03	1. 41
最大变化量	1. 59	0. 37	15. 31	0. 97

度单元,在柔性结构的连续体拓扑优化设计中大大抑制了灰度单元的数量,得到了清晰的拓扑分布结构。

(2) 比较了标准 SIMP 方法和双重 SIMP 方法优化结果与网格划分、惩罚因子取值的关系。结果表明,双重 SIMP 方法在最小柔顺度和灰度单元所占百分比对网格的依赖性方面更有优势,并且可以

表 3 不同惩罚因子下的拓扑结果对比

Tab. 3 Contrast of topological results with different penalty factors

惩罚因子	标准 SIMP	双重 SIMP	标准 SIMP	双重 SIMP
	灰度单元	灰度单元	迭代步数	迭代步数
	百分比/%	百分比/%		
3. 5	44. 13	0. 13	54	68
4. 0	41. 00	0. 63	86	97
4. 5	37. 75	0. 75	84	93
5. 0	37. 00	0. 50	94	104
5. 5	37. 13	0. 25	196	204
6. 0	35. 13	0. 13	100	112
6. 5	34. 38	0. 13	329	342

通过选用较小的惩罚因子,在不过多增加迭代步数和保证算法稳定的基础上得到更为清晰的拓扑结构。

(3) 在适用性方面,由于双重 SIMP 方法与标准 SIMP 方法相比没有添加额外的参数或约束,因此其适用性与标准 SIMP 方法相当。

参 考 文 献

1 Bendsoe M P, Kikuchi Noboru. Generating optimal topologies in structrural desig using a homogenization method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988,71(2): 197 – 224.

2 Belblidia F, Rechak S. Topology optimization of plate structure using a single or three layered artificial material mode[J]. Advances in Engineering Software,2001, 32(2): 159 – 168.

3 Giuseppe C A. Hierarchical solution of large-scaled three-dimensional topology optimization problem[C]//The 1996 ASME Design Engineering Technical and Computer in Engineering Conference Michigan, Mechigan State University, 1996.

4 Wang X, Wang M Y, Guo D. Structural shape and topology optimization in a level-set-based framework of region representation [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, 27(1 – 2): 1 – 19.

- 5 欧阳高飞,张宪民. 结构拓扑优化中水平集方法的快速初始化研究[J]. 应用基础与工程科学学报, 2008, 16(1):136 – 143.
Ouyang Gaofei, Zhang Xianmin. Research on fast initialization for the level set method in structural topology optimization [J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2008, 16(1): 136 – 143. (in Chinese)
- 6 Sui Y K, Yang D Q. A new method for structural topological optimization based on the concept of independent continuous variables and smooth model[J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 18(2): 179 – 185.
- 7 隋允康,叶红玲,刘健信,等. 追究根基的结构拓扑优化方法[J]. 工程力学, 2008, 25(增刊2):7 – 19.
Sui Yunkang, Ye Hongling, Liu Jianxin, et al. A structural topological optimization method based on exploring conceptual root [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(Supp.2): 7 – 19. (in Chinese)
- 8 郭旭,赵康. 基于拓扑描述函数的连续体结构拓扑优化方法[J]. 力学学报, 2004,36(5): 522 – 526.
Guo Xu, Zhao Kang. A new topology description function based approach for structural topology optimization[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(5): 522 – 526. (in Chinese)
- 9 郭中泽,张卫红,陈裕泽. 结构拓扑优化设计综述[J]. 机械设计, 2007, 24(8):1 – 6.
Guo Zhongze, Zhang Weihong, Chen Yuze. An overview on the topological optimization design of structures [J]. Journal of Machine Design, 2007, 24(8): 1 – 6. (in Chinese)
- 10 开依沙尔·热合曼,买买提明·艾尼. 基于骨骼重建机理的连续体结构仿生拓扑优化方法[J]. 农业机械学报, 2014, 45(5):340 – 346.
Kaysar·Rahman, Mamtimin·Geni. Bionic topology optimization method for continuum structures based on bone remodeling mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014,45(5):340 – 346. (in Chinese)
- 11 Sigmund Ole. Morphology-based black and white filters for topology optimization [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2007, 33(4): 401 – 424.
- 12 Fuchs M B, Jiny S, Peleg N. The SRV constraint for 0/1 topological design[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005, 30(4): 320 – 326.
- 13 周向阳,陈立平,黄正东. 用 SIMP-SRV 方法进行柔性机构拓扑优化设计[J]. 中国机械工程, 2008, 19(6):631 – 635.
Zhou Xiangyang, Chen Liping, Huang Zhengdong. Topology optimization design of compliant mechanism with the SIMP-SRV method[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 19(6): 631 – 635. (in Chinese)
- 14 周向阳,陈立平,黄正东. 基于 SIMP 和 SSV 的结构与支撑拓扑优化设计[J]. 农业机械学报, 2008, 39(6):137 – 141.
Zhou Xiangyang, Chen Liping, Huang Zhengdong. Simultaneous topology optimization of structure and supports based on SIMP and SSV[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(6): 137 – 141. (in Chinese)
- 15 龙凯,赵红伟. 抑制灰度单元的改进优化准则法[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2010, 22(12):2197 – 2201.
Long Kai, Zhao Hongwei. A modified optimality criterion method for gray elements suppression[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2010, 22(12): 2197 – 2201. (in Chinese)
- 16 易继军,荣见华,曾韬. 一种新的考虑柔顺度要求的结构拓扑优化方法[J]. 中南大学学报:自然科学版, 2011, 42(7): 1953 – 1959.
Yi Jijun, Rong Jianhua, Zeng Tao. A new structural topology optimization method subject to compliance[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2011, 42(7): 1953 – 1959. (in Chinese)
- 17 李翔,王皓. 连续体结构拓扑优化的过滤变密度法[J]. 复旦学报:自然科学版, 2012, 51(4):400 – 405.
Li Xiang, Wang Hao. A new variable density method with gray-scale filter function for topology optimization of continuum structures[J]. Journal of Fudan University: Natural Science, 2012, 51(4): 400 – 405. (in Chinese)
- 18 张维声. 基于水平集方法的应力相关拓扑优化问题研究[D]. 大连:大连理工大学, 2013.
Zhang Weisheng. Studies on stress-related topology optimization problem via level set approach[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2013. (in Chinese)
- 19 龙凯,傅晓锦. 考虑密度梯度的敏度过滤方法[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2014,26(4):669 – 674.
Long Kai, Fu Xiaojin. Sensitivity filtering method considering density gradient [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2014, 26(4): 669 – 674. (in Chinese)
- 20 Albert A Groenwold, Etman L F P. A simple heuristic for gray-scale suppression in optimality criterion-based topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009, 39(2): 217 – 225.
- 21 占金青,杨康,黄志超. 基于节点变量法的连续体结构拓扑优化设计[J]. 农业机械学报, 2014,45(9):329 – 332.
Zhan Jinqing, Yang Kang, Huang Zhichao. Topology optimization of continuum structures using node variable method [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014,45(9):329 – 332. (in Chinese)
- 22 张志飞,倪新帅,徐中明,等. 基于优化准则法的自由阻尼材料拓扑优化[J]. 振动与冲击, 2013, 32(14):98 – 102.
Zhang Zhifei, Ni Xinshuai, Xu Zhongming, et al. Topologic optimization of a free damping material based on optimal criteria method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(14): 98 – 102. (in Chinese)