doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.10.046

考虑车身侧倾的4WS汽车横向稳定性与Hopf分岔特性*

魏道高[1] 李莉莉[1] 许 可[1] 潘 宁[1] 潘之杰[2]

（1.合肥工业大学机械与汽车工程学院，合肥 230009；
2.云乐车辆技术有限公司，杭州 310000）

摘要：四轮转向汽车与传统前轮转向相比，能增加车辆高速行驶稳定性和低速转向灵敏性。车身侧倾时轮荷转移会改变轮胎侧偏特性，从而影响4WS汽车横向稳定性及分岔特性，为此研究了考虑车身与底盘的非线性耦合，建立了考虑车身侧倾时轮荷转移的3-DOF闭环系统动力学模型，先定性判定系统Hopf分岔存在性与稳定性，再运用数值方法计算系统的稳定区域与Hopf分岔特性。并与2-DOF闭环系统平面模型对比，结果表明，2种模型计算结果有明显区别。对于3-DOF系统，随着预瞄距离、前后轮转角比例系数的增大，系统稳定区域会增大；随着前后轮转角比例系数的增大，汽车侧倾角、侧倾角速度的自激振动极限环幅值呈减小的趋势。

关键词：四轮转向汽车 轮荷转移 Hopf分岔 稳定区域 极限环

中图分类号：U461.1 **文献标识码：**A **文章编号：**1000-1298(2015)10-0343-07

Lateral Stability and Hopf Bifurcation Characteristics of 4WS Vehicle Considering Body Roll

Wei Daogao[1] Li Lili[1] Xu Ke[1] Pan Ning[1] Pan Zhijie[2]

(1. *School of Mechanical and Automotive Engineering*, *Hefei University of Technology*, *Hefei* 230009, *China*
2. *Skywilling Vehicle Technology*, *Hangzhou* 310000, *China*)

Abstract: Compared with traditional front-wheel-steering system, the four-wheel-steering system can improve the auto handing stability at high speed as well as the steering response at low speed. Load transfer caused by the body roll can change the tyre cornering characteristics as well as the lateral stability and the bifurcation characteristics of the 4WS vehicles. Therefore, a closed loop system dynamic model considering load transfer was established with the nonlinear coupling relationship between the body and chassis taken into account. Firstly, the existence and stability of the Hopf bifurcation were qualitatively analyzed, then it was compared with a closed loop system dynamic model, the stable region and the characteristics of the Hopf bifurcation were calculated by numerical methods. The results showed that the difference between two dynamic models was obvious. For the 3-DOF system, with the increase of preview distance, steering ratio, road adhesion coefficient and the decrease of the height of suspension roll center, the stable region of the system tended to increase. With the increase of road adhesion coefficient and the steering ratio, the amplitude of self-excited vibration of roll angle and roll angular velocity tended to decrease.

Key words: 4WS vehicle Load transfer Hopf bifurcation Stable region Limit cycle

引言

随着公路交通的发展及汽车行驶速度的提高，汽车系统横向非线性动力学研究越来越受到重视。其中，对2WS汽车横向稳定性及分岔特性的研究较广泛而深入[1-5]。

四轮转向汽车有传统前轮转向无法比拟的优越性，它能增加车辆高速行驶稳定性和低速转向灵敏

收稿日期：2015-03-03 修回日期：2015-06-27

*国家自然科学基金资助项目(51375130)

作者简介：魏道高，副教授，主要从事汽车系统动力学研究，E-mail：weidaogao@hfut.edu.cn

性。自 20 世纪 80 年代开始至今，国内外学者一直对 4WS 车辆非线性动力学特性及其控制进行着深入的研究[6-9]。目前对 2WS 汽车横向动力学的研究较为成熟，而对 4WS 汽车横向动力学特性及其控制的研究多局限于平面模型，忽略侧倾运动与平面运动耦合影响。车身侧倾时轮荷转移，会改变轮胎侧偏特性进而影响 4WS 车辆稳定区域与分岔特性，但是考虑车身侧倾的 4WS 车辆 3-DOF 闭环系统模型文献少见报导。因此，本文考虑车身侧倾及发生侧倾时的轮荷转移构建闭环系统动力学模型，且与 2-DOF 平面模型对比计算分析人-车-路参数对稳定区域和分岔特性的影响，验证侧倾模型的计算精度高于平面模型，为 4WS 控制提供更精准模型。本文通过定性分析判定系统 Hopf 分岔的存在性和稳定性，计算横向失稳的临界车速；通过数值计算分析人-车-路参数对样车稳定区域和分岔特性的影响。

1 力学与数学模型

1.1 车辆动力学模型

以某型四轮转向汽车作为样车，将其简化为三自由度力学模型，如图 1 所示。图中 O_1 为质心，O_2 为侧倾中心。建模时作如下假设：①后轮转向始终与前轮转向呈正比关系 $\delta_r = k_p\delta_f$。②忽略悬架与转向系统结构特点影响。③纵向速度为常量。④忽略车辆纵向动力学的影响。

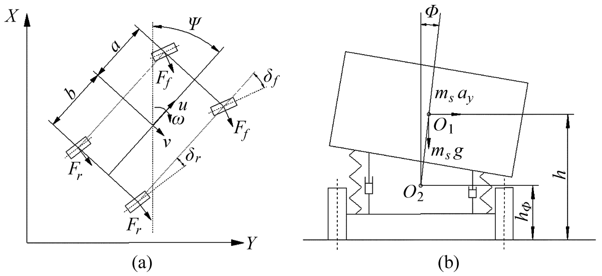

图 1 汽车三自由度转向行驶模型

Fig. 1 3-DOF vehicle steering model

基于以上力学模型及其假设，建立该车辆 3 自由度车辆动力学方程

$$mu(\dot{\beta}+\omega)+m_sh_s\ddot{\phi}=(F_{fl}+F_{fr})\cos\delta_f+(F_{rl}+F_{rr})\cos\delta_r \tag{1}$$

$$I_z\dot{\omega}=a(F_{fl}+F_{fr})\cos\delta_f-b(F_{rl}+F_{rr})\cos\delta_r \tag{2}$$

$$I_x\ddot{\phi}+C_\phi\dot{\phi}+K_\phi\phi=-m_sh_su(\dot{\beta}+\omega)+m_sgh_s\phi \tag{3}$$

其中 $$\delta_r=k_p\delta_f \tag{4}$$

式中 β——质心侧偏角 u——汽车行驶速度

ω——横摆角速度 ϕ——质心侧倾角

m、m_s——整车质量和悬挂质量

a、b——质心到前、后轴距离

F_{fl}、F_{fr}——汽车左前轮、右前轮侧向力

F_{rl}、F_{rr}——汽车左后轮、右后轮侧向力

δ_f、δ_r——汽车前、后轮转角

k_p——前后轮转角比例系数

I_z——整车绕横摆轴（Z）的转动惯量

I_x——整车绕侧倾轴（X）的转动惯量

h_s——悬挂质量质心到侧倾轴线的距离

C_ϕ——侧倾角阻尼系数

K_ϕ——侧倾角刚度

1.2 轮胎模型

为了便于非线性动力学分析，采用二次多项式平方轮胎模型，该模型考虑了汽车发生侧倾时左、右轮胎的轮荷转移，常用于汽车侧倾和横摆动力学的研究中，其数学表达式[10-12]为

$$\begin{cases}F_i=\mu C_i\alpha_j\\ C_i=C_{j1}F_{zi}+C_{j2}F_{zi}^2\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}\alpha_f=\arctan\left(\beta+\dfrac{a\omega}{\mu}\right)-\delta_f\\ \alpha_r=\arctan\left(\beta-\dfrac{b\omega}{\mu}\right)-\delta_r\end{cases} \tag{6}$$

其中 $i=fl$、fr、rl、rr $j=f$、r

式中 F_i——第 i 轮胎的转向力

F_{zi}——第 i 轮胎的正压力

C_i——第 i 轮胎的侧偏刚度

C_{j1}、C_{j2}——计算前后轮胎转向力的经验常数

α_j——第 j 轮胎的侧偏角

μ——路面附着系数

侧倾力矩在前、后轴上的分配系数 ε_f、ε_r 可以表示为

$$\begin{cases}\varepsilon_f=\dfrac{K_{\phi f}}{K_{\phi f}+K_{\phi r}}\\ \varepsilon_r=\dfrac{K_{\phi r}}{K_{\phi f}+K_{\phi r}}\end{cases} \tag{7}$$

式中 $K_{\phi f}$、$K_{\phi r}$——前、后轴侧倾角刚度

考虑侧向载荷转移的轮胎垂直载荷变化可表示为

$$\begin{cases}F_{zfl}=F_{zf0}+\Delta F_{zf}\\ F_{zfr}=F_{zf0}-\Delta F_{zf}\\ F_{zrl}=F_{zr0}+\Delta F_{zr}\\ F_{zrr}=F_{zr0}-\Delta F_{zr}\end{cases} \tag{8}$$

其中 $F_{zf0}=\dfrac{mgb}{2l}$ $F_{zr0}=\dfrac{mga}{2l}$ $\Delta F_{zf}=\dfrac{\varepsilon_fm_su\omega h_s}{t_w}$

$$l=a+b \quad \Delta F_{zr}=\frac{\varepsilon_rm_su\omega h_s}{t_w}$$

式中 F_{zf0}、F_{zr0}——前、后轮垂直载荷

ΔF_{zf}、ΔF_{zr}——前、后轮垂直载荷转移量

l——轴距 t_w——左右轮距

计算所需参数如表 1 所示。

表 1　计算所需样车参数

Tab. 1　Accuracy of parameters of vehicle model

参数	数值	参数	数值
m/kg	1 704.7	a/m	1.035
m_s/kg	1 526.9	b/m	1.655
k_p	0.3	h_s/m	0.455
μ	0.8	C_ϕ/(N·m·s·rad^{-1})	5 476
I_z/(kg·m^2)	3 048.1	$K_{\phi f}$/(N·rad^{-1})	47 300
I_x/(kg·m^2)	744	$K_{\phi r}$/(N·rad^{-1})	43 300

由式(5)及表 1 数值可计算出样车轮胎在不同侧偏角和不同路面附着系数下轮胎侧偏力与法向力的关系曲线，如图 2 所示。

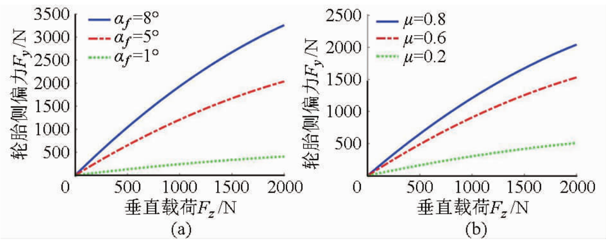

图 2　轮胎侧偏力与法向力关系曲线

Fig. 2　Relationship between side force and normal force

(a) $\mu=0.8$　(b) $\alpha_f=5°$

1.3　驾驶员模型

驾驶员的控制行为是影响闭环汽车操稳系统稳定性的重要因素。目前驾驶员模型主要有补偿跟踪模型[13－15]、预瞄跟踪模型[16－17]和智能控制模型[18－19]等。其中简化预瞄跟踪模型[17,20]便于仿真分析，且与试验结果对比有较好的精度而被广泛采用，因此本文选用该模型，其表达式为

$$\dot{\delta}_f=-\left[\frac{K}{T_r}\left(y+\frac{L}{u}\dot{y}\right)+\frac{\delta_f}{T_r}\right] \tag{9}$$

式中　L——驾驶员前方可视距离

T_r——视觉延迟　　K——增益放大系数

在固定坐标系中，用(x,y)表示车辆质心 G 的水平位置，车辆前进方向角为 ψ，则

$$\dot{y}=u(\beta\cos\psi+\sin\psi) \tag{10}$$

$$\dot{\Psi}=\omega \tag{11}$$

1.4　系统耦合动力学模型

由于研究人－车－路闭环系统操纵稳定性，因此建立车辆－驾驶员耦合系统动力学模型，根据前文中式(1)～(3)和式(9)～(11)建立含 6 个变量的耦合系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{X}}=f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\theta})\quad(\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^7) \tag{12}$$

其中　$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)=(\phi,\dot{\phi},\beta,\psi,\omega,y,\delta_f)$

$$\boldsymbol{\theta}=(u,\mu,a,h_s,k_p,L)$$

$$f_1=x_2$$

$$f_2=-\frac{1}{I_p}[D_p(F_f+F_r)+C_\phi x_2+(K_\phi-m_sgh_s)x_1]$$

$$f_3=\frac{1}{muI_p}[I_x(F_f+F_r)+C_\phi m_sh_sx_2+m_s^2gh_s^2x_1]-x_5$$

$$f_4=x_5\qquad f_5=\frac{1}{I_z}(aF_f-bF_r)$$

$$f_6=u(x_3\cos x_4+\sin x_4)$$

$$f_7=-\frac{1}{T_r}[Kx_6+KL(x_3\cos x_4+\sin x_4)+x_7]$$

$$I_p=I_x-\frac{m_s^2h_s^2}{m}\qquad D_p=\frac{m_sh_s}{m}$$

$$F_f=(F_{fl}+F_{fr})\cos\delta_f\qquad F_r=(F_{rl}+F_{rr})\cos\delta_r$$

其中前、后侧偏力函数表达 $F_f(\beta,\omega,\delta_f)$、$F_r(\beta,\omega,\delta_f)$由式(5)、(6)求得。

式(6)可以改写为

$$\begin{cases}\alpha_f=\arctan\left(x_3+\dfrac{ax_5}{\mu}\right)-x_7\\ \alpha_r=\arctan\left(x_3-\dfrac{bx_5}{\mu}\right)-k_px_7\end{cases} \tag{13}$$

2　样车 Hopf 分岔特性

汽车操纵稳定性非线性动力学特性分析，主要分为开环系统与闭环系统两方面，开环系统汽车转向失稳时主要表现为鞍－结分岔，倍周期及混沌行为。考虑驾驶员的闭环系统在不考虑路面激励的情况下汽车转向失稳时可能出现 Hopf 分岔。因此，本文对以上建立的操纵稳定性闭环系统进行 Hopf 分岔特性分析。寻找样车发生 Hopf 分岔临界车速及关键的车辆性能参数对该分岔的影响。

2.1　系统 Hopf 分岔存在性判定

根据系统状态方程式(12)，令 $\dot{\boldsymbol{X}}=0$ 求得系统平衡点为(0,0,0,0,0,0,0)。平衡点处 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0&a_{25}&0&a_{27}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0&a_{35}&0&a_{37}\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&a_{53}&0&a_{55}&0&a_{57}\\0&0&a_{63}&a_{64}&0&0&0\\0&0&a_{73}&a_{74}&0&a_{76}&a_{77}\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中　$a_{21}=\dfrac{m_sgh_s-k_p}{I_p}$　$a_{22}=-\dfrac{C_\phi}{I_p}$

$$a_{23}=\frac{\mu D_p}{I_p}(C_{fl}+C_{fr}+C_{rl}+C_{rr})$$

$$a_{25}=\frac{\mu D_p}{uI_p}[a(C_{fl}+C_{fr})-b(C_{rl}+C_{rr})]$$

$$a_{27}=-\frac{\mu D_p[C_{fl}+C_{fr}+k_p(C_{rl}+C_{rr})]}{I_p}$$

$$a_{31}=-\frac{D_p(m_s g h_s-K_\phi)}{uI_p}\quad a_{32}=\frac{D_p C_\phi}{uI_p}$$

$$a_{33}=-\left(\frac{D_p^2}{I_p}+\frac{1}{m}\right)\frac{\mu(C_{fl}+C_{fr}+C_{rl}+C_{rr})}{u}$$

$$a_{35}=-\left(\frac{D_p^2}{I_p}+\frac{1}{m}\right)\frac{\mu[a(C_{fl}+C_{fr})-b(C_{rl}+C_{rr})]}{u^2}-1$$

$$a_{37}=\left(\frac{D_p^2}{I_p}+\frac{1}{m}\right)\frac{\mu[C_{fl}+C_{fr}+k_p(C_{rl}+C_{rr})]}{u}$$

$$a_{53}=-\frac{\mu[a(C_{fl}+C_{fr})-b(C_{rl}+C_{rr})]}{I_z}$$

$$a_{55}=-\frac{\mu[a^2(C_{fl}+C_{fr})+b^2(C_{rl}+C_{rr})]}{uI_z}$$

$$a_{57}=\frac{\mu[a(C_{fl}+C_{fr})-b(C_{rl}+C_{rr})]}{I_z}\quad a_{63}=u\quad a_{64}=u$$

$$a_{73}=-\frac{KL}{T_r}\quad a_{74}=-\frac{KL}{T_r}\quad a_{76}=-\frac{K}{T_r}\quad a_{77}=-\frac{1}{T_r}$$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})$的特征方程为

$$\lambda^7+a_6\lambda^6+a_5\lambda^5+a_4\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0 \tag{15}$$

根据Hopf代数判据[21]，特征方程(15)有一对纯虚根，且其余5个根均具有负实部的充分必要条件为$a_i>0(i=0,1,2,3,4,5,6,7)$，$\Delta_i>0(i=3,5)$，$\Delta_6=0$。将表1中的数据代入式(14)、(15)获得10个不等式方程组和一个等式方程为

$$\begin{cases}
a_0=64\,320.2>0\qquad a_1=\dfrac{3\,396\,611.0}{u}+4\,203.85>0\\
a_2=\dfrac{221\,996.0}{u}+\dfrac{1.026\,6\times10^7}{u^2}+7\,386.58>0\\
a_3=\dfrac{191\,110.0}{u}+\dfrac{1\,412\,488.0}{u^2}+3\,089.35>0\\
a_4=\dfrac{34\,820.6}{u}+\dfrac{139\,625.0}{u^2}+521.429>0\\
a_5=\dfrac{2\,945.81}{u}+\dfrac{6\,584.64}{u^2}+216.146>0\\
a_6=\dfrac{172.785}{u}+13.548\,7>0\qquad a_7=1.0>0\\
\Delta_2=\dfrac{42\,438.0}{u}+\dfrac{458\,579.0}{u^2}+\dfrac{1\,137\,722.0}{u^3}+2\,407.07>0\\
\Delta_4=\dfrac{243.737}{u}+\dfrac{9\,726.41}{u^2}+\dfrac{163\,794}{u^3}+\dfrac{1.741\,4\times10^6}{u^4}+\\
\quad\dfrac{1.154\,9\times10^7}{u^5}+\dfrac{5.012\,46\times10^7}{u^6}+\dfrac{1.474\,73\times10^8}{u^7}-\\
\quad 1.171\,5>0\\
\Delta_6=-\dfrac{34.727\,2}{u}+\dfrac{39\,360.5}{u^2}-\dfrac{2\,810\,770}{u^3}-\dfrac{9.205\,03\times10^7}{u^4}+\\
\quad\dfrac{3.344\,39\times10^8}{u^5}+\dfrac{2.041\,94\times10^{10}}{u^6}+\dfrac{3.640\,37\times10^{11}}{u^7}+\\
\quad\dfrac{3.003\,99\times10^{12}}{u^8}+\dfrac{1.596\,1\times10^{13}}{u^9}+\dfrac{5.142\,3\times10^{13}}{u^{10}}-\\
\quad 1.277\,44=0
\end{cases} \tag{16}$$

由式(16)解得系统发生Hopf分岔的临界车速$u_c=20.256\,4$ m/s，将20.256 4 m/s代入式(14)，计算Jacobi矩阵$\boldsymbol{A}(u_c)$对应的特征方程有一对纯虚根，且其他特征根均具有负实部，特征根如表2所示。

表2 矩阵$\boldsymbol{A}(u_c)$的特征根

Tab.2 Characteristic roots of matrix $\boldsymbol{A}(u_c)$

特征根	数值	特征根	数值
λ_1	0 +4.279 1i	λ_5	−3.422 9 +5.426 2i
λ_2	0 −4.279 1i	λ_6	−3.422 9 −5.426 2i
λ_3	−7.411 0 +12.363 5i	λ_7	−0.410 7
λ_4	−7.411 0 −12.363 5i		

$\boldsymbol{A}(u_c)$纯虚根$\lambda_1=0+4.279\,1\mathrm{i}$对应的左特征矢量$\boldsymbol{X}_l$和右特征矢量$\boldsymbol{X}_r$为

$$\boldsymbol{X}_l=\begin{bmatrix}-0.005\,8+0.042\,0\mathrm{i}\\0.009\,4+0.004\,1\mathrm{i}\\0.419\,5+0.196\,9\mathrm{i}\\0.852\,9\\0.026\,2-0.085\,9\mathrm{i}\\0.016\,9+0.001\,6\mathrm{i}\\0.020\,5-0.217\,0\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_r=\begin{bmatrix}-0.075\,5-0.014\,0\mathrm{i}\\0.059\,9-0.323\,1\mathrm{i}\\0.045\,7+0.087\,6\mathrm{i}\\0.000\,0-0.170\,1\mathrm{i}\\0.727\,8\\-0.390\,6-0.216\,3\mathrm{i}\\0.243\,8+0.242\,5\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

令$\boldsymbol{M}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(u)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_c}$，由表1、式(14)及$u_c=20.256\,4$ m/s得：$\boldsymbol{X}_l\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_r=-0.002\,1-0.019\,9\mathrm{i}$，则$\mathrm{Re}(\boldsymbol{X}_l\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_r)=-0.002\,1\neq0$，根据Hopf分岔判定定理可知系统在$u=u_c$处发生Hopf分岔。

2.2 Hopf分岔稳定性判定

由以上分析可知，该系统在临界车速工况下，在平衡点(0,0,0,0,0,0,0)处发生Hopf分岔，产生极限环的稳定性由文献[22]中Hopf分岔稳定性判据进行判定。

$\boldsymbol{X}_l\boldsymbol{A}(u_c)=\lambda_1\boldsymbol{X}_l$，$\boldsymbol{A}(u_c)\boldsymbol{X}_r=\lambda_1\boldsymbol{X}_r$，且$\boldsymbol{X}_l\boldsymbol{X}_r=1$，$\overline{\boldsymbol{X}}_r$是$\boldsymbol{X}_r$的共轭复数，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵，令

$$\beta=-\boldsymbol{X}_l f_{xxx}\boldsymbol{X}_r\boldsymbol{X}_r\overline{\boldsymbol{X}}_r+2X_l f_{xx}\boldsymbol{X}_r\boldsymbol{A}^{-1}(0,u_c)f_{xx}\boldsymbol{X}_r\overline{\boldsymbol{X}}_r+\boldsymbol{X}_l f_{xx}\overline{\boldsymbol{X}}_r(\boldsymbol{A}(0,u_c)-2\lambda_1\boldsymbol{I})^{-1}f_{xx}\boldsymbol{X}_r\boldsymbol{X}_r \tag{17}$$

其中
$$f_{xx}\boldsymbol{X}_r=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\boldsymbol{X}_r\right)\bigg|_{(0,u_c)}=\boldsymbol{O}$$

$$f_{xx}\overline{\boldsymbol{X}}_r=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\overline{\boldsymbol{X}}_r\right)\bigg|_{(0,u_c)}=\boldsymbol{O}$$

$$f_{xx}\boldsymbol{X}_r\overline{\boldsymbol{X}}_r=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\boldsymbol{X}_r\right)\overline{\boldsymbol{X}}_r\bigg|_{(0,u_c)}=\boldsymbol{O}$$

$$f_{xx}\boldsymbol{X}_r\boldsymbol{X}_r=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\boldsymbol{X}_r\right)\boldsymbol{X}_r\bigg|_{(0,u_c)}=\boldsymbol{O}$$

$$f_{xx}\boldsymbol{X}_r\boldsymbol{X}_r=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\boldsymbol{X}_r\right)\boldsymbol{X}_r\right)\overline{\boldsymbol{X}}_r\bigg|_{(0,u_c)}=$$

$$\begin{bmatrix}0\\-258.022-84.5056\mathrm{i}\\-429.134+185.123\mathrm{i}\\0\\-392.256-87.5665\mathrm{i}\\0\\0\end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{O}$ 为零矩阵或零向量。

根据文献[22]中 Hopf 分岔极限环稳定性的判定定理，即若 $\mathrm{Re}(\beta)>0$，则分岔周期解为轨道渐进稳定的；若 $\mathrm{Re}(\beta)<0$，则分岔周期解为轨道不稳定的。由式(17)计算 $\mathrm{Re}(\beta)=635.822>0$，所以分岔周期解是轨道渐进稳定的，表现为稳定极限环。

3　样车稳定区域计算分析

目前大多数稳态响应的分析都是采用具有沿 Y 轴侧向位移与绕 Z 轴横摆运动两个自由度模型，由于车辆转向行驶时车身侧倾是实际存在的，且随车速 u 增加，轮胎侧倾载荷转移量加大，悬挂与非悬挂之间的非线性耦合增强，导致侧倾对车辆横摆耦合，甚至引起车辆过多转向与侧向滑移。对于闭环系统车身侧倾振动是由 Hopf 分岔产生的极限环振动，随着极限环的幅值递增可能诱发侧翻事故。为了验证以上分析，运用侧倾与平面系统 2 种模型进行对比计算。

3.1　2 种模型稳定区域对比计算分析

由于车速 u 是汽车行驶稳定性中最重要参数，所以选择临界速度 u_c 为汽车行驶稳定性评价参数，由耦合系统动力学方程式(12)及表 1 参数可得不同驾驶员预瞄距离 L 和车辆质心到前轴距离时的样车系统三维稳定区域，如图 3 所示。

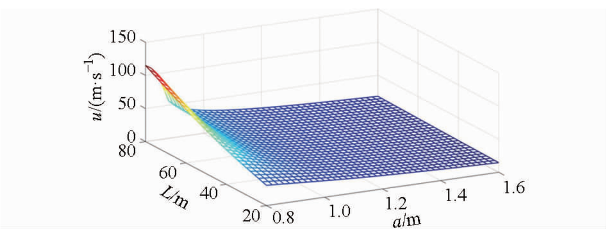

图 3　3-DOF 模型三维稳定区域边界 (a,L,u)

Fig. 3　Stability boundary of 3-DOF model in three-dimensional space (a,L,u)

三维稳定边界可以更直观地反映 2 种不同参数对车辆系统稳定区域的影响趋势。在图 3 中稳定区域边界为各参数值对应的 Jacobi 矩阵的一对纯虚根 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}\omega$，此时系统达到发生 Hopf 分岔的临界速度 u_c，当 $u>u_c$ 边时，发生 Hopf 分岔，系统失稳；当 $u<u_c$边时，不发生 Hopf 分岔，系统是稳定的。可以清晰地看出人-车参数预瞄距离 L 和质心到前轴距离 a 对稳定区域的影响趋势，随着预瞄距离的增大、质心位置的后移系统稳定区域增大。

为了分析侧倾模型较于平面模型的准确性，选择人车系统平面稳定区域(a,u)为研究对象 $L=20$、40、60、80 m，时，由式(12)及表 1、表 2 参数值计算结果如图 4 所示。

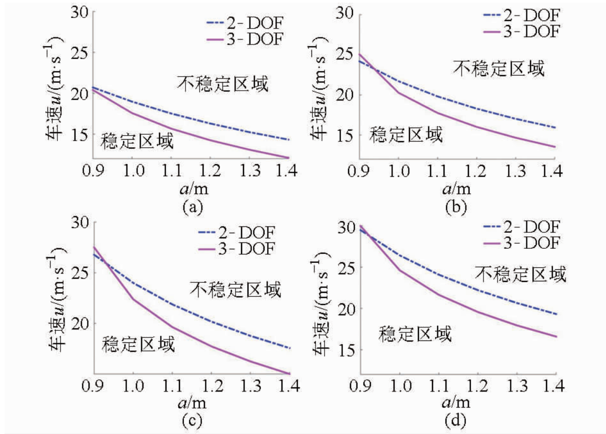

图 4　3-DOF 模型与 2-DOF 模型平面稳定区域对比

Fig. 4　Stable region of 3-DOF model compared with 2-DOF model

(a) $L=20$ m　(b) $L=40$ m　(c) $L=60$ m　(d) $L=80$ m

由图 4 可知，2 种模型获得的稳定区域边界变化趋势一致，随着车辆质心位置后移和驾驶员预瞄距离的减小，人车系统临界车速 u_c 减小即稳定区域变小；由于车辆转向行驶过程确实存在轮荷转移，所以考虑车身侧倾计算所得的结果相对于未考虑轮荷转移更为准确。而考虑轮荷转移后的 3-DOF 模型计算所得稳定区域明显小于平面模型，平面模型计算所得稳定区域要大于侧倾模型，图示中虚线、实线与坐标轴所围成的面积即两种模型计算的稳定区域差值。由此可见，实际车辆转向行驶过程中存在的侧倾不可忽略。

3.2　主要参数对 3-DOF 稳定区域影响

选择考虑车身侧倾 4WS 闭环系统模型，运用上述建立的人车系统耦合动力学方程，分析人-车参数预瞄距离 L、前后轮转角比例系数 k_p 对样车稳定区域的影响，结果如图 5、图 6 所示。

由图 5、图 6 可见，随着前后轮转角比例系数 k_p 的增大，系统稳定区域都会相应增大。而且可见 k_p 对稳定区域影响比较明显。

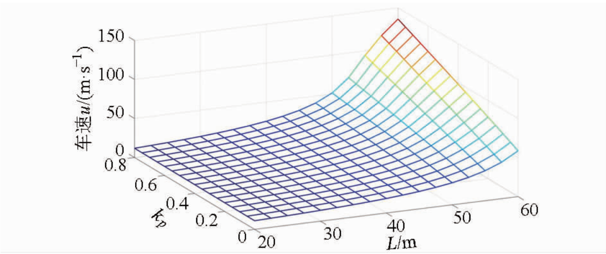

图 5　3-DOF 模型三维稳定区域边界(L,k_p,u)

Fig. 5　Stability boundary of 3-DOF model in three-dimensional space (L,k_p,u)

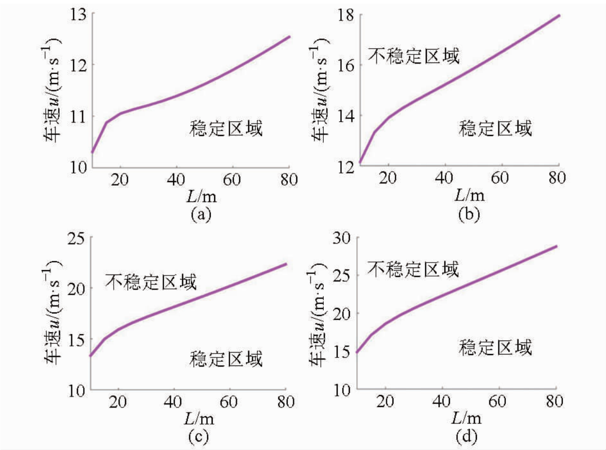

图 6　k_p、L 对稳定区域的影响

Fig. 6　Effect of k_p and L on stable region

(a) $k_p=0$　(b) $k_p=0.2$　(c) $k_p=0.3$　(d) $k_p=0.4$

4　系统 Hopf 分岔特性数值计算

现有关于人-车-路闭环操纵稳定性非线性分析主要以平面模型为主,没有考虑车身侧倾自由度,车辆高速行驶时车身的侧倾角振动会导致轮胎正压力的不断变化,从而导致轮胎侧向力不断变化,因而会引起横摆角速度持续振动。对比考虑车身侧倾闭环操纵稳定模型与现有平面的闭环操纵稳定性模型二者不同之处,说明车身侧倾在高速行驶时不可忽略。由第 2 节 Hopf 分岔定性分析可知,样车系统在临界车速处发生超临界 Hopf 分岔,即整车发生蛇形运动。因此以某型 4WS 车辆为样车基于以上建立的车辆操纵稳定性系统运动方程,运用 Runge - Kutta 法进行数值求解,计算所需参数如表 1 所示,横摆角速度与速度的分岔特性如图 7 所示。

4.1　2 种模型分岔特性对比

图 7a 为运用平面和侧倾 2 种动力学模型计算出的车辆 $\omega-u$ 分岔图。由图可见 2 种模型获得的分岔特性趋势一致,但二者速度分岔点值和车辆横摆角速度幅值有明显差异。由侧倾模型计算 Hopf 分岔临界车速 $u_c=19.8$ m/s,平面模型计算 Hopf 分岔的临界速度 $u_c=22.4$ m/s,对比可得,考虑车身侧倾后临界速度减小 $\Delta u_c=2.6$ m/s,产生 Hopf 分岔时

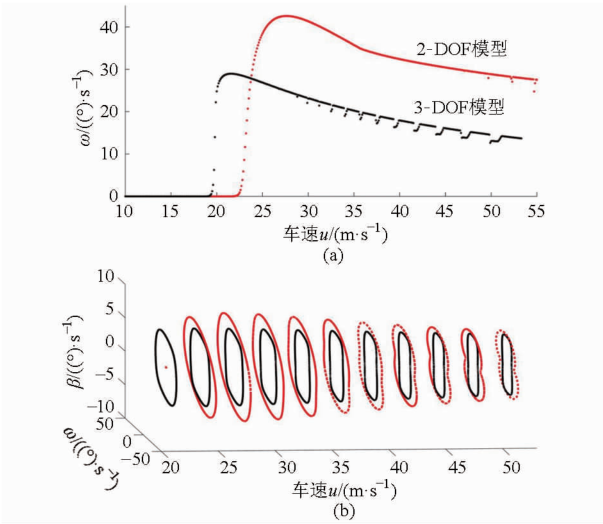

图 7　2-DOF 平面模型和 3-DOF 侧倾模型 $\omega-u$ 分岔图

Fig. 7　$\omega-u$ bifurcation diagram of 2-DOF model and 3-DOF model

横摆角速度 W 幅值也减小;由考虑车身侧倾模型可见,在车速 $u=10\sim19.8$ m/s 的范围内,横摆角速度 ω 幅值近似为零,车辆行驶状态趋于稳定。在车速 $u=19.8\sim55$ m/s 范围内,车辆横摆角速度 ω 振动幅值先迅速增大再平缓减小,车辆表现为蛇形运动特性,由图 7 侧倾模型 30 m/s 后高速行驶区间可见,由于高速时车身侧倾振动对横摆运动的耦合,诱发横摆振动加大,出现锯齿形曲线,而相应区间平面模型是光滑曲线。

4.2　主要参数对 3-DOF 分岔特性的响

为了进一步研究人-车-路主要参数对样车分叉特性的影响,本文样车采用最常用的比例与前轮转角指令控制后轮转角的策略 $\delta_r=k_p\delta_f$,k_p 是影响车辆行驶稳定性的重要参数,当 $u=30$ m/s 时,选取 $k_p=0.1\sim0.4$ 计算其对车辆 Hopf 分岔特性影响。计算结果如图 8、图 9 所示。不同前后轮比例系数极限环幅值如表 4 所示。

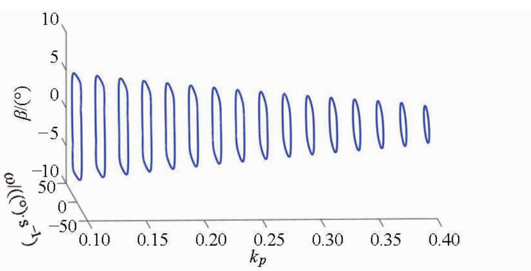

图 8　不同前后轮比例系数 k_p 的三维相图

Fig. 8　Three-dimensional phase diagram of different steering ratios k_p

由图 9 及表 4 可见,随着前后轮比例系数 k_p 由 0.1 增大至 0.4,车辆质心侧偏角极限环振荡幅值由 6.710°减小至 2.172°。

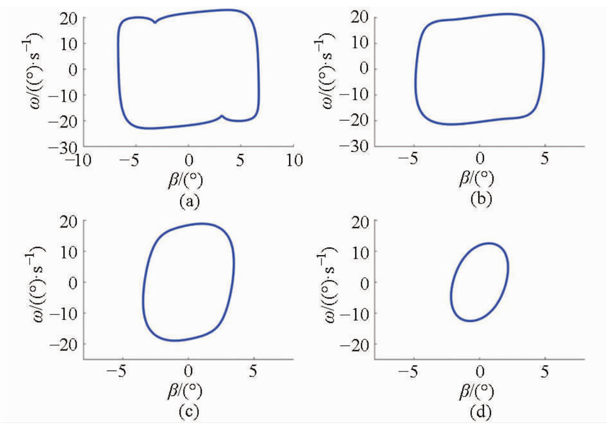

图 9　不同前后轮比例系数 k_p 的相图轨迹

Fig. 9　Phase diagram of different steering ratios k_p

(a) $k_p=0.1$　(b) $k_p=0.2$　(c) $k_p=0.3$　(d) $k_p=0.4$

表 4　不同前后轮比例系数 k_p 极限环幅值

Tab. 4　Phase diagram of different steering ratios k_p

极限环幅值	$k_p=0.1$	$k_p=0.2$	$k_p=0.3$	$k_p=0.4$
$\beta/(\degree)$	6.710	4.895	3.460	2.172
$\omega/((\degree)\cdot s^{-1})$	22.990	21.402	18.921	12.278

5　结论

(1)建立了考虑车身侧倾及车轮载荷转移的 4WS 汽车动力学方程，与 2-DOF 平面模型对比分析了系统稳定区域和分岔特性，发现侧倾模型较平面模型更为准确，说明车辆行驶过程中车身与底盘非线性耦合不可忽略。

(2)运用 Hopf 分岔定理判定人-车-路闭环操纵稳定性系统发生的超临界 Hopf 分岔，临界车速为 $u_c=20.2564$ m/s，车辆系统发生了蛇形运动。

(3)随着预瞄距离 L、前后轮转角比例系数 k_p 的增大系统稳定区域会增大。前后轮转角比例系数 k_p 的增大，汽车侧倾角 β、横摆角速度 ω 的自激振动极限环幅值呈减小的趋势，且汽车侧倾角 β 幅值减小幅度明显大于横摆角速度 ω。

参　考　文　献

1　Vincent N. Vehicle handling, stability and bifurcation analysis of nonlinear vehicle models [D]. Washington: University of Maryland, 2005.

2　李韶华，吴金毅，胡彬. 路面方向扰动下重型汽车的横向稳定性及分岔、混沌运动[J]. 应用数学和力学，2013，34(9)：891－899.
Li Shaohua, Wu Jinyi. Hu Bin. Research on lateral stability bifurcation and chaotic motions of heavy vehicle with road direction disturbance [J]. Applied Mathmatics and Mechannics, 2013,34(9):891－899. (in Chinese)

3　魏道高，王子涵，张翼天，等. 转向系间隙对汽车操纵稳定性影响研究[J]. 汽车工程，2014，36(2)：139－144.
Wei Daogao, Wang Zihan, Zhang Yitian, et al. A study on the influence of clearance in steering system on vehicle handing and stability [J]. Automitive Engineering, 2014, 36(2):139－144. (in Chinese)

4　杨秀建，王增才，朱淑亮，等. 汽车稳态转向失稳的最近分岔点实时追踪[J]. 农业机械学报，2009，40(1)：20－25.
Yang Xiujian, Wang Zengcai, Zhu Shuliang, et al. Real-time tracking of the closes bifurcation for vehicle-state cornering stability [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Mechinery, 2009,40(1):20－25. (in Chinese)

5　杨秀建. 极限工况下汽车转向失稳的非线性动力学特性与主动控制研究[D]. 济南：山东大学，2009
Yang Xiujian. Research on the nonlinear dynamics and active control for vehicle cornering destabilization in critical situations [D]. Ji'nan: Shandong University, 2009. (in Chinese)

6　Dai L, Han Q. Stability and Hopf bifurcation of a nonlinear model for a four-wheel-steering vehicle system[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2004, 9(3):331－341.

7　Hu Haiyan, Wu Zhiqiang. Stability and Hopf bifurcation of four-wheel-Steering vehicles involving driver's delay [J]. Nonlinear Dynamics, 2000, 22(4):361－374.

8　Shen Shuiwen, Wang Jun, Shi Peng, et al. Nonlinear dynamics and stability analysis of vehicle plane motions[J]. Vehicle System Dynamics, 2007, 45(1):15－35.

9　宋宇. 车辆稳定性系统和四轮转向系统及其集成控制研究[D]. 合肥：合肥工业大学，2012.
Song Yu. Study on the control of vehicle stability system and four wheel steering system and integrated system[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2012. (in Chinese)

10　王树凤，李华师. 四轮转向车辆后轮转角与横摆力矩联合模糊控制[J]. 农业机械学报，2011，42(5)：14－19.
Wang Shufeng, Li Huashi. Yaw moment fuzzy control of four-wheel-steering vehicle based on co-simulation technology [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Mechinery, 2011,42(5):14－19. (in Chinese)

11　Sampson D J M. Aetive roll control of artieulated heavy vehieles[D]. Cambridge: University of Cambridge, 2000.

12　Daniel E W, Wassim M H. Nonlinear control of roll moment distribution to influence vehicle yaw characteristics [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1995, 3(2):110－116.

13　Wang J. Integrated vehicle ride and steady-state handling control via active suspensions [J]. International Joural of Vehicle Design, 2006,42(3－4):306－327.

(下转第 363 页)

Ni Tao, Li Xiaopeng, Zhang Hongyan, et al. 3-D Vision-based kinesthesis teaching control strategy for telerobotics [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2013,44(1): 244 - 247,243. (in Chinese)
11 毕寻,罗杨宇,李成荣.引导力训练系统的位置:力模糊控制方法研究[J].控制工程,2013,20(增刊):30 - 38.
Bi Xun, Luo Yangyu, Li Chengrong. Strudy on position-force fuzzy control in training system with haptic guidance[J]. Control Engineering of China,2013,20(Supp.):30 - 38. (in Chinese)
12 游有鹏,张宇,李成刚.面向直接示教的机器人零力控制[J].机械工程学报,2014,50(3):10 - 17.
You Youpeng, Zhang Yu, Li Chenggang. Force-free control for the direct teaching of robots [J]. Journal of Mechanical Engineering,2014,50(3):10 - 17. (in Chinese)
13 王学林,肖永飞,毕淑慧,等. 机器人柔性抓取试验平台的设计与抓持力跟踪阻抗控制[J]. 农业工程学报,2015,31(1):58 - 63.
Wang Xuelin, Xiao Yongfei, Bi Shuhui, et al. Design of test platform for robot flexible grasping and grasping force tracking impedance control[J]. Transactions of the CSAE,2015,31(1):58 - 63. (in Chinese)
14 刘强,童昕,冯培恩,等.挖掘机器人伺服控制技术综述[J].中国工程机械学报,2007,5(2):235 - 239.
Liu Qiang, Tong Xin, Feng Peien, et al. Overview of servo control technologies for excavators [J]. Chinese Journal of Construction Machinery,2007,5(2):235 - 239. (in Chinese)
15 Ha Q P, Nguyen Q H, Rye D C, et al. Impedance control of a hydraulically actuated robotic excavator[J]. Automation in Construction,2000,9(5 - 6): 421 - 435.
16 Ha Q P, Santos M, Nguyen Q, et al. Robotic excavation in construction automation [J]. IEEE Robotics and Automation Maganize,2002,2(1): 20 - 28.
17 Yamada Hironao, Kato Hidetoshi, Moto T. Master-slave control for construction robot teleoperation[J]. Journal of Robotics and Mechatronics, 2003,15(1):35 - 42.
18 Kim Dongmok, Kim Jongwon, Lee Kyouhee, et al. Excavator tele-operation system using a human arm [J]. Automation in Construction, 2009,18(2):173 - 182.
19 Yamada Hironao, Gong Mingde, Zhao Dingxuan. A master-slave control for a tele-operation system for a construction robot (application of a velocity control method with a force feedback model)[J]. Journal of Robotics and Mechatronics, 2007,19(1): 60 - 70.
20 Rose H E, Murray D J. Weber on the tactile senses[M]. 2nd edition. Erlbawu, UK: Taylor & Erancis, 1996.
21 Huang Lingtao, Kawamura Tasuchi, Yamada Hironao. Master-slave control method with force feedback for grasping soft objects using a teleoperation construction robot[J]. International Journal of Fluid Power, 2012,13(2):41 - 49.
22 Huang Lingtao, Kawamura Tasuchi, Yamada Hironao. Construction robot operation system with object's hardness recognition using force feedback and virtual reality[J]. Journal of Robotics and Mechatronics, 2012,24(6):958 - 966.
23 Huang Lingtao, Kawamura Tasuchi, Yamada Hironao. Application of a position-force control method in a master-slave teleoperation construction robot system[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012,229 - 231:2243 - 2247.

(上接第 349 页)

14 McRuer D T. A review of quasi-linear pilot models[J]. IEEE Transactions on Human Factors in Electronics, 1967(3):231 - 249.
15 Hess R A, Modjtahedzadzadeh A. A control theoretic model of driver steering behavior[J]. Control Systems Magazine, 1990, 8: 3 - 8.
16 高振海,管欣,郭孔辉.驾驶员方向控制模型及在汽车智能驾驶研究中的应用[J]. 中国公路学报,2000,13(3):106 - 109.
Gao Zhenhai, Guan Xin, Guo Konghui. Driver directional control model and the application in the research of intelligent vehicle [J]. China Journal of Highway and Transport, 2000,13(3):106 - 109. (in Chinese)
17 Legouis T, Laneville A, Bourassa P, et al. Characterization of dynamic vehicle stability using two models of the human pilot behaviour[J]. Vehicle System Dynamics, 1986, 15(1):1 - 18.
18 Macadam C C, Johnson G E. Application of elementary neural networks and preview sensors for representing driver steering control behavior[J]. Vehicle System Dynamics, 1996, 25(1):3 - 30.
19 李英.方向与速度综合控制驾驶员模型及在 ADAMS 中的应用[D]. 长春:吉林大学, 2008.
Li Ying. Direction control and speed control combined driver model and its application to ADAMS [D]. Changchun: Jilin University,2008. (in Chinese)
20 王洪礼,刘晟,迟仲玉. 汽车四轮转向运动的稳定性分析[J]. 机械强度,2000, 22(1):23 - 25.
Wang Hongli, Liu Sheng, Chi Zhongyu. Analysis of the motion stability for four wheel vehicle steering system [J]. Journal of Mechanical Strength, 2000, 22(1):23 - 25. (in Chinese)
21 张继业,杨栩仁,曾京. Hopf 分岔的代数判据及其在车辆动力学中的应用[J]. 力学学报, 2000, 32(5):596 - 605.
Zhang Jiye, Yang Xuren, Zeng Jing. The algebraic criteria for Hopf bifurcation and its application in vehicle dynamics [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2000, 32(5):596 - 605. (in Chinese)
22 舒仲周,张继业,曹登庆. 运动稳定性[M]. 北京:中国铁道出版社, 2001.