

柔顺关节并联机器人动力学模型*

李 渊^{1,2} 余跃庆¹

(1. 北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124; 2. 大同大学煤炭工程学院, 大同 037003)

摘要: 首次采用初始弯曲梁的伪刚体模型建立了柔顺关节的双 1R 伪刚体模型,应用拉格朗日方程和虚拟切割法推导了柔顺关节并联机器人系统动力学方程。对方程进行了数值求解,结果显示在理想结果的基础上存在低幅高频振动,而简化模型结果却比较理想,这表明理论模型比简化模型更能反映柔顺关节并联机器人这种刚柔耦合系统的特征;同时理论轨迹与 ADAMS – ANSYS 联合仿真轨迹、实验轨迹进行对比,最大相对误差分别为 2.41% 和 4.69%,验证了理论模型的正确性。

关键词: 并联机器人 柔顺关节 动力学

中图分类号: TP24 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)07-0345-09

Dynamic Model of Parallel Robot with Compliant Joints

Li Yuan^{1,2} Yu Yueqing¹

(1. College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

2. College of Coal Engineering, Datong University, Datong 037003, China)

Abstract: The double 1R pseudo-rigid body model of the compliant joint was put forward for the first time based on the pseudo-rigid-body model of the initial bending beam. And a dynamic equation of parallel robot system with compliant joints was proposed based on Lagrange method and the virtual cutting method. The dynamic response was obtained numerically. It is shown that there were low-amplitude high-frequency vibrations on the basis of the desired results in the theoretical results, while there was no apparent high-frequency vibration in the results of the simplified model. It indicated that the theoretical model was better than the simple model to reflect the characteristics of such rigid-flexible coupling system. Simultaneously, ADAMS – ANSYS united simulation model and the experimental system were accomplished. And the theoretical trajectory was compared with simulation and the experimental trajectory, respectively. The maximum relative errors were 2.41% and 4.69%, respectively, which proved the correctness and validity of the theoretical model.

Key words: Parallel robot Compliant joint Dynamics

引言

近年来,广泛应用于细胞与基因操作、精密外科手术、微电子装配、微细加工、光纤对接等微操作领域的微/纳米操作并联机器人^[1],很多采用了含有柔顺构件的一体化加工并联结构(机器人)。这种机器人不仅有并联机器人的优点:刚度大、精度高、

速度高、承载能力强等,还有柔顺机构^[2]的优点:传统的运动副减少甚至没有、零件数目减少、精度提高和质量减轻等,并在系统的结构及运动分析与设计方面取得了大量研究成果^[3-12],在静力学研究方面也有一定的进展^[13-14],但在动力学方面研究^[15-20]相对比较少,而且在建模过程中,多数是把柔顺关节看成是带有扭簧的传统关节,然后基于刚性机构的

收稿日期: 2015-01-15 修回日期: 2015-03-20

* 国家自然科学基金资助项目(50875002)

作者简介: 李渊,博士生,大同大学讲师,主要从事机器人和柔顺机构研究,E-mail: lytx2006@163.com

通讯作者: 余跃庆,教授,博士生导师,主要从事机构学和机器人学研究,E-mail: yqyu@bjut.edu.cn

理论建立简化模型。这种柔顺关节并联机器人虽然在微操作领域应用比较广泛,但其应用价值还没有完全体现出来,尤其是在具有机构整体大范围运动的一般意义并联机器人上,本文以柔顺关节平面并联机器人为例,建立具有整体大范围运动的一般意义的机器人动力学模型。

1 动力学建模

将 3-RRR 刚性平面并联机器人中的驱动杆和连杆之间的传统转动副用柔顺关节来代替,构成新型的柔顺关节平面并联机器人(图 1),它可以实现沿 x 、 y 轴方向上的移动和绕 z 轴方向上的转动。为了实验固定、拆卸方便等,柔顺关节与驱动杆、连杆的内侧固定连接。为了保证良好的驱动性能,定平台与各驱动杆之间仍然采用传统的转动副来连接;为了动平台的运动不直接受柔顺关节变形的影响而保持期望的运动规律,动平台和各连杆之间也仍然采用传统的转动副来连接。

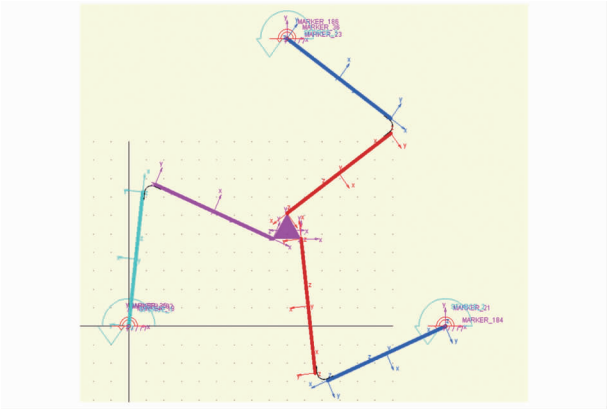


图 1 柔顺关节平面并联机器人

Fig.1 Planar parallel robot with compliant joints

在机器人加入柔顺关节后,固有刚性并联机器人的很多结构参数都没有改变。比如动平台、静平台的结构参数,驱动杆和连杆的截面参数和材料参数。改变的只是加入柔顺关节后,实际的驱动杆和连杆的杆长有所改变,这个变化与柔顺关节的初始曲率半径有关系,这样才能保证加入柔顺关节前后两者的初始位形都相同,如图 2 所示。表 1 为柔顺关节并联机器人的结构参数。

1.1 柔顺关节模型

由于柔顺关节具有初始曲率,而且两端和刚性构件固定连接,因此把柔顺关节平均分成中间固定连接的两段,每段都基于初始弯曲柔性梁 1R 伪刚体模型来建立其模型,2 个 1R 伪刚体模型末端固定连接成柔顺关节双 1R 伪刚体模型,如图 3 所示。

在实验中,柔顺关节和机器人刚性杆件连接时是和刚性驱动杆、刚性连杆的内侧进行连接的,但

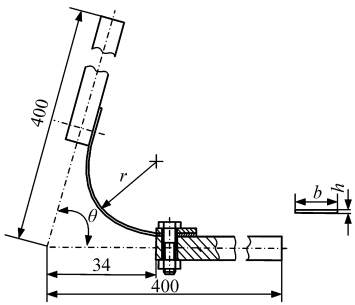


图 2 柔顺关节结构图

Fig.2 Structure diagram of compliant joint

表 1 柔顺关节并联机器人结构参数

Tab.1 Structural parameters of parallel robot with compliant joints

部件	长度/mm	宽度/mm	厚度/mm	材料
驱动杆	366	23	10	硬铝
连杆	366	23	10	硬铝

部件	边长/mm	厚度/mm	材料
动平台	80	25	硬铝
静平台	900	36	铸铁

部件	半径/mm	弧度/rad	宽度/mm	厚度/mm	材料
柔顺关节	20	1.88	26	0.3	硬铝

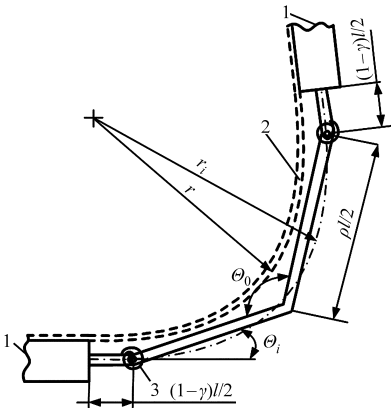


图 3 柔顺关节双 1R 伪刚体模型

Fig.3 Double 1R pseudo-rigid-body model of compliant joint

1. 驱动杆或连杆 2. 柔顺关节 3. 扭簧

是在理论建模时,是以刚性驱动杆和刚性连杆的中心轴线进行建模的,此时,理想柔顺关节的半径为实际柔顺关节的半径与刚性驱动杆或者刚性连杆宽度的一半之和,即

$$r_i = r + \frac{b_r}{2}$$

(1)

式中 r_i ——理想的柔顺关节半径
 r ——实际的柔顺关节半径
 b_r ——刚性杆件的宽度

柔顺关节的初始弧度为 θ , 相对应的理想弧长 l 为

$$l = r_i \theta$$

(2)

理想柔顺关节一半的曲率为

$$\kappa_0 = \frac{l}{2r_i} \quad (3)$$

根据曲率 κ_0 , 从文献[21]表 2 选择伪刚体模型中参数 γ, ρ, K_θ 值。

然后基于伪刚体模型法, 计算柔顺关节伪刚体模型中的各主要参量。其中特征半径(伪刚体杆长)为 $\rho l/2$, 短杆长为 $(1-\gamma)l/2$, 伪刚体角初始值为

$$\Theta_i = \arctan \frac{b_i}{a_i - l(1-\gamma)} \quad (4)$$

式中 a_i ——初始弯曲柔性梁末端的初始位置 x 方向坐标

b_i ——初始弯曲柔性梁末端的初始位置 y 方向坐标

两个伪刚体杆之间的夹角为

$$\Theta_0 = 2\Theta_i + \pi - \theta \quad (5)$$

扭簧刚度为

$$K = \frac{2IE\rho K_\theta}{L} \quad (6)$$

式中 L ——实际柔顺关节的弧长

I ——转动惯量

$$L = r\theta \quad (7)$$

式(7)表示扭簧刚度是按照实际柔顺关节的结构参数进行计算的。

由于图 3 所示柔顺关节双 1R 伪刚体模型中的伪刚体杆末端是固定连接, 所以它可以简化成图 4 所示模型。这种简化模型, 对整个机器人的建模计算更为方便。

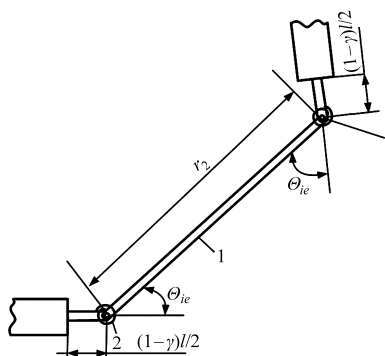


图 4 柔顺关节双 1R 简化伪刚体模型

Fig. 4 Double 1R simplified pseudo-rigid-body model of compliant joint

1. 等效伪刚体杆 2. 扭簧

在简化伪刚体模型中, 根据三角形余弦定理可知, 等效伪刚体杆长为

$$r_2 = \sqrt{2(\rho l/2)^2(1 - \cos\Theta_0)} \quad (8)$$

等效初始伪刚体角度为

$$\Theta_{ie} = \arccos \frac{\rho l \sin\Theta_0}{2r_2} + \Theta_i \quad (9)$$

1.2 运动学分析

将柔顺关节的模型和并联机器人的模型融合到一起, 其结构如图 5 所示。

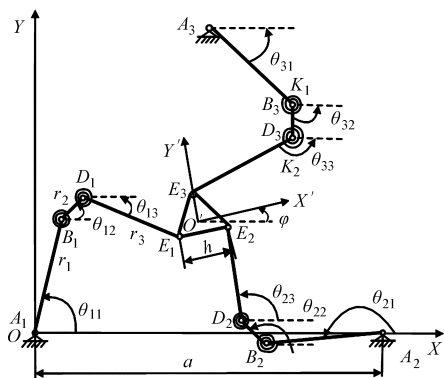


图 5 柔顺关节平面并联机器人结构图

Fig. 5 Structures diagram of parallel robot with compliant joints

其中理论模型中刚性杆件(驱动杆和连杆)的杆长为实际刚性杆件杆长与柔顺关节双 1R 伪刚体简化模型中伪刚体短杆杆长之和, 即

$$r_1 = l_1 + (1-\gamma)l/2 \quad (10)$$

$$r_3 = l_3 + (1-\gamma)l/2 \quad (11)$$

式中 r_1, r_3 ——理论模型中驱动杆杆长和连杆杆长
 l_1, l_3 ——实际驱动杆杆长和连杆杆长

建立如图 5 所示的坐标系, 以 A_1 点为坐标原点建立绝对坐标系 XOY ; 以动平台中心点为坐标原点建立相对坐标系 $R: X'O'Y'$ 。驱动杆 $B_i A_i$ 的驱动关节处坐标点 A_1, A_2, A_3 在绝对坐标系 XOY 的坐标分别为: $A_1(0, 0), A_2(a, 0), A_3\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$; 动平台上 E_1, E_2, E_3 在相对坐标系(采用极坐标系) $R: X'O'Y'$ 下坐标分别为: ${}^R E_1\left(\frac{\sqrt{3}h}{3}, \frac{7\pi}{6}\right), {}^R E_2\left(\frac{\sqrt{3}h}{3}, -\frac{\pi}{6}\right), {}^R E_3\left(\frac{\sqrt{3}h}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$; 统一为 ${}^R E_i(\rho_i, \theta_i)$ 。

假定动平台处于绝对坐标系下的某一位姿 (x, y, φ) , 则 O' 的坐标为 (x, y) , 进一步可以得到动平台上 E_i 在绝对坐标系 XOY 的坐标为 $E_i(x + \rho_i \cos(\theta_i + \varphi), y + \rho_i \sin(\theta_i + \varphi))$ 。在绝对坐标系下, 连杆 $D_i E_i$ 上 E_i 的坐标和动平台上 E_i 点的坐标相同, 基于矢量法, 有

$$l_{OA_i} + l_{A_i B_i} + l_{B_i D_i} + l_{D_i E_i} = l_{OO'} + l_{O' E_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

设 $\mathbf{X} = [x \ y \ \varphi]^T$

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_{11} \ \theta_{12} \ \theta_{13} \ \theta_{21} \ \theta_{22} \ \theta_{23} \ \theta_{31} \ \theta_{32} \ \theta_{33}]^T$$

对位移表达式(12)两边分别求导, 可得输入速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$

和动平台输出速度 $\dot{\mathbf{X}}$ 的关系式为

$$\mathbf{P}\dot{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{Q}\dot{\mathbf{X}} \tag{13}$$

其中
$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & \\ & \mathbf{P}_2 & \\ & & \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_i=\begin{bmatrix} -r_1\sin\theta_{i1} & -r_2\sin\theta_{i2} & -r_3\sin\theta_{i3} \\ r_1\cos\theta_{i1} & r_2\cos\theta_{i2} & r_3\cos\theta_{i3} \end{bmatrix} \tag{i=1,2,3}$$

$$\mathbf{Q}_i=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3}h\sin(\theta_{Di}+\varphi) \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3}h\cos(\theta_{Di}+\varphi) \end{bmatrix} \tag{i=1,2,3}$$

进一步可化简求得机器人的速度映射方程

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{J}_1\dot{\mathbf{X}} \tag{14}$$

式中 $\mathbf{J}_1$ ——机器人的广义逆雅可比矩阵

$$\mathbf{J}_1=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \tag{15}$$

1.3 动力学建模

图5所示的柔顺关节并联机器人有3个相同结构的运动支链(图6),通过 E_i 和动平台连接而构成的。

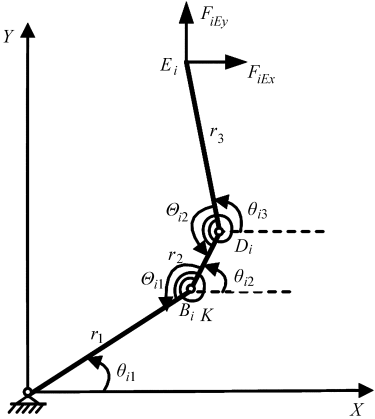


图6 机器人第*i*条运动支链结构图

Fig.6 Structure diagram of robot's *i*th branch

通过在 E_i 点进行虚拟切割,可以将机器人分成3个结构相同的运动支链和1个动平台。基于这种切割法^[22],机器人中的每个构件的位移(包括 $\mathbf{X}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$)中的量都是相互独立的。这种独立性使得建立动力学模型时可以用上拉格朗日法,然后再加上并联机器人中闭链约束引起的约束力,使上述开链动力学模型变为闭链动力学模型。

记 m_1 、 m_2 、 m_3 、 m_4 分别为杆 B_iA_i 、杆 D_iB_i 、杆 E_iD_i 、动平台的质量; I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 分别为杆 B_iA_i 、杆 D_iB_i 、杆 E_iD_i 、动平台的转动惯量; r_{ac} 、 r_{bc} 、 r_{dc} 分别为杆 B_iA_i 质心到 A_i 的距离、杆 D_iB_i 质心到 B_i 的距离、杆 E_iD_i 质心到 D_i 的距离。则机器人的第 i 条 ($i=1,2,3$) 运动支链的驱动杆 B_iA_i 动能可表示为

$$T_{i1}=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_{i1}^2+\frac{1}{2}m_1r_{ac}^2\dot{\theta}_{i1}^2 \tag{16}$$

杆 D_iB_i 的动能为

$$T_{i2}=\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_{i2}^2+\frac{1}{2}m_2(r_1^2\dot{\theta}_{i1}^2+r_{bc}^2\dot{\theta}_{i2}^2+2r_1r_{bc}\cos(\theta_{i1}-\theta_{i2})\dot{\theta}_{i1}\dot{\theta}_{i2}) \tag{17}$$

和动平台连接的杆 E_iD_i 的动能为

$$T_{i3}=\frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_{i3}^2+\frac{1}{2}m_3(\dot{x}_{dc}^2+\dot{y}_{dc}^2)=\frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_{i3}^2+\frac{1}{2}m_3(r_1^2\dot{\theta}_{i1}^2+r_2^2\dot{\theta}_{i2}^2+r_{dc}^2\dot{\theta}_{i3}^2+2r_1r_2\cos(\theta_{i1}-\theta_{i2})\dot{\theta}_{i1}\dot{\theta}_{i2}+2r_1r_{dc}\dot{\theta}_{i1}\dot{\theta}_{i3}\cos(\theta_{i1}-\theta_{i3})+2r_2r_{dc}\cos(\theta_{i2}-\theta_{i3})\dot{\theta}_{i2}\dot{\theta}_{i3}) \tag{18}$$

动平台的动能为

$$T_4=\frac{1}{2}I_4\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_4(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \tag{19}$$

机器人总变形势能表示为

$$U=\frac{1}{2}K\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^2(\Delta\boldsymbol{\theta}_{ij})^2 \tag{20}$$

其中

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{ij}=\boldsymbol{\theta}_{ij}-\boldsymbol{\theta}_{i0} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{i0}=\pi-\boldsymbol{\theta}_{ie} \tag{e=1,2} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{i1}=\pi-\theta_{i1}+\theta_{i2} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{i2}=\pi-\theta_{i2}+\theta_{i3} \tag{24}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{\theta}_{ij}$ ——某时刻柔顺关节双1R简化伪刚体模型中伪刚体杆两端的伪刚体角与初始伪刚体角的差值

$\boldsymbol{\theta}_{i0}$ ——柔顺关节伪刚体简化模型中的初始伪刚体角的补角

$\boldsymbol{\theta}_{i1}$ 、 $\boldsymbol{\theta}_{i2}$ ——某时刻柔顺关节双1R简化伪刚体模型中伪刚体杆两端的伪刚体角,如图6

式(20)中 $\Delta\boldsymbol{\theta}_{i1}$ 和 $\Delta\boldsymbol{\theta}_{i2}$ 有一定的关系,下面进行推导。首先对伪刚体杆 B_iD_i 进行静力平衡分析,如图7所示。

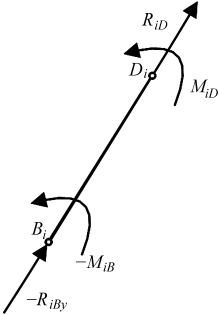


图7 杆 B_iD_i 受力分析示意图

Fig.7 Force analysis schematic diagram of rod B_iD_i

图7中 M_{iB} 、 M_{iD} 为柔顺关节双1R简化伪刚体模型中伪刚体杆两端所受的扭矩,其值为

$$M_{iB} = K\Delta\Theta_{i1} \tag{25}$$

$$M_{iD} = K\Delta\Theta_{i2} \tag{26}$$

根据静力平衡,列方程组

$$\begin{cases} -R_{iB} + R_{iD} = 0 \\ -M_{iB} + M_{iD} = 0 \end{cases} \tag{27}$$

将式(25)、(26)代入式(27),得

$$\Delta\Theta_{i1} = \Delta\Theta_{i2} \tag{28}$$

式(28)表示柔顺关节伪刚体简化模型中的两端伪刚体角度变化量相同。结合式(21)、(23)、(24),可以化简为

$$\theta_{i1} - 2\theta_{i2} + \theta_{i3} = 0 \tag{29}$$

定义常量

$$\alpha_1 = I_1 + m_1r_{ac}^2 + m_2r_1^2 + m_3r_1^2 \tag{30}$$

$$\alpha_2 = I_2 + m_2r_{bc}^2 + m_3r_2^2 \tag{31}$$

$$\alpha_3 = I_3 + m_3r_{dc}^2 \tag{32}$$

$$\beta_{12} = m_2r_1r_{bc} + m_3r_1r_2 \tag{33}$$

$$\beta_{13} = m_3r_1r_{dc} \tag{34}$$

$$\beta_{23} = m_3r_2r_{dc} \tag{35}$$

式(16)~(20)为机器人构件的动能和势能表达式,将其代入机器人的拉格朗日函数

$$L_f = T - U \tag{36}$$

并代入常量表达式(30)~(35),可得

$$\begin{aligned} L_f = & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2}\alpha_i\dot{\theta}_{i1}^2 + \beta_{12}\cos(\theta_{i1} - \theta_{i2})\dot{\theta}_{i1}\dot{\theta}_{i2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}\alpha_2\dot{\theta}_{i2}^2 + \frac{1}{2}\alpha_3\dot{\theta}_{i3}^2 + \beta_{13}\cos(\theta_{i1} - \theta_{i3})\dot{\theta}_{i1}\dot{\theta}_{i3} + \right. \\ & \left. \beta_{23}\cos(\theta_{i2} - \theta_{i3})\dot{\theta}_{i2}\dot{\theta}_{i3} \right) + \frac{1}{2}I_4\dot{\varphi}^2 + \\ & \frac{1}{2}m_4(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}K \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (\Delta\Theta_{ij})^2 \end{aligned} \tag{37}$$

记机器人的关节向量为

$$\boldsymbol{q} = [\theta_{11} \quad \theta_{12} \quad \theta_{13} \quad \theta_{21} \quad \theta_{22} \quad \theta_{23} \quad \cdots \quad \theta_{31} \quad \theta_{32} \quad \theta_{33} \quad x \quad y \quad \varphi]^T \tag{38}$$

对应于机器人关节向量的关节力(矩)为

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_{11} \quad \tau_{12} \quad \tau_{13} \quad \tau_{21} \quad \tau_{22} \quad \tau_{23} \quad \cdots \quad \tau_{31} \quad \tau_{32} \quad \tau_{33} \quad F_{4x} \quad F_{4y} \quad \tau_{43}]^T \tag{39}$$

将机器人的拉格朗日函数式(37)代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_f}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) - \frac{\partial L_f}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\tau} \tag{40}$$

可得并联机器人动力学模型为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_0 \tag{41}$$

定义符号

$$\begin{aligned} c_{i12} &= \cos(\theta_{i1} - \theta_{i2}) & s_{i12} &= \sin(\theta_{i1} - \theta_{i2}) \\ c_{i13} &= \cos(\theta_{i1} - \theta_{i3}) & s_{i13} &= \sin(\theta_{i1} - \theta_{i3}) \\ c_{i23} &= \cos(\theta_{i2} - \theta_{i3}) & s_{i23} &= \sin(\theta_{i2} - \theta_{i3}) \end{aligned}$$

则式(41)开链动力学模型中的惯性矩阵 $\boldsymbol{M}$ 、科里奥利矩阵 $\boldsymbol{C}$ 、刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 分别为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1 & & & \\ & \boldsymbol{M}_2 & & \\ & & \boldsymbol{M}_3 & \\ & & & \boldsymbol{M}_4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & & \\ & & \boldsymbol{C}_3 & \\ & & & \boldsymbol{C}_4 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{K} = K \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 & & & \\ & \boldsymbol{K}_2 & & \\ & & \boldsymbol{K}_3 & \\ & & & \boldsymbol{K}_4 \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_{12}c_{i12} & \beta_{13}c_{i13} \\ \beta_{12}c_{i12} & \alpha_2 & \beta_{23}c_{i23} \\ \beta_{12}c_{i13} & \beta_{23}c_{i23} & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$\boldsymbol{M}_4 = \begin{bmatrix} m_4 & & \\ & m_4 & \\ & & I_4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12}s_{i12}\dot{\theta}_{i2} & \beta_{13}s_{i13}\dot{\theta}_{i3} \\ -\beta_{12}s_{i12}\dot{\theta}_{i1} & 0 & \beta_{23}s_{i23}\dot{\theta}_{i3} \\ -\beta_{13}s_{i13}\dot{\theta}_{i1} & -\beta_{23}s_{i23}\dot{\theta}_{i2} & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{C}_4 = \boldsymbol{O}_{3 \times 3}$$

$$\boldsymbol{K}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \boldsymbol{K}_4 = \boldsymbol{O}_{3 \times 3}$$

由并联机器人的运动学关系式(12),可得闭链约束方程

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{l}_{OA_i} + \boldsymbol{l}_{A_iB_i} + \boldsymbol{l}_{B_iD_i} + \boldsymbol{l}_{D_iE_i} - \boldsymbol{l}_{O'O'} - \boldsymbol{l}_{O'E_i} = 0 \tag{42}$$

(i = 1, 2, 3)

式(42)两边对时间求导,可得

$$\frac{d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{O} \tag{43}$$

$$\text{其中} \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = [\boldsymbol{P}, -\boldsymbol{Q}] \tag{44}$$

式中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ ——并联机器人速度约束矩阵

$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda}$ 是由并联机器人闭链约束关系引入的约束内力,这种约束内力用来保证并联机器人的闭链约束关系。其中 $\boldsymbol{A}^T$ 表示约束力的作用方向,而 $\boldsymbol{\lambda}$ 表示约束力的大小。

在开链机器人动力学模型(式(41))基础上,加入闭链约束引入的约束力 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda}$,可以得到并联机器人动力学模型

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda} \tag{45}$$

设并联机器人的变关节向量 $\boldsymbol{q}$ 关于动平台位姿 $\boldsymbol{X}$ 的广义逆雅可比矩阵为 $\boldsymbol{J}$,则

$$\dot{q} = J \dot{X}$$

(46)

其中 $J = \begin{bmatrix} P^{-1}Q \\ I_3 \end{bmatrix}$

(47)

式(46)代入式(43)得

$$AJ\dot{X} = O$$

(48)

由于式(48)对于动平台任意的速度向量 $\dot{X}$ 都成立,因此有

$$\begin{cases} AJ = O \\ J^T A^T = O \end{cases}$$

(49)

同时将式(41)中的向量 Kq 转换成与 X 相关的表达式,有

$$Kq = KDJX$$

(50)

其中 $D = q(JX)^{-1}$

在式(45)两边同时左乘 J^T ,并且将式(46)、(48)~(50)代入得

$$J^T M J \ddot{X} + J^T (M \dot{J} + C J) \dot{X} + J^T K D J X = J^T \tau + J^T K q_0$$

(51)

设3个主动关节的驱动力矩为 τ_a ,则

$$J^T \tau = S^T \tau_a$$

(52)

其中 $S = \begin{bmatrix} J(1,i) \\ J(4,i) \\ J(7,i) \end{bmatrix}$

式中 S ——动平台的位姿与3个主动关节坐标之间的速度雅可比矩阵

将式(52)代入式(51),得到工作空间的动力学模型

$$J^T M J \ddot{X} + J^T (M \dot{J} + C J) \dot{X} + J^T K D J X = S^T \tau_a + J^T K q_0$$

(53)

为了书写方便,式(53)简化为

$$M_e \ddot{X} + C_e \dot{X} + K_e X = S^T \tau_a + \tau_e$$

(54)

其中 $M_e = J^T M J$ $C_e = J^T (M \dot{J} + C J)$

$$K_e = J^T K D J$$
 $\tau_e = J^T K q_0$

式中 M_e ——惯性矩阵 C_e ——阻尼矩阵

K_e ——刚度矩阵

τ_e ——机器人初始载荷向量的修正量

2 计算仿真

2.1 数值仿真

以动平台的中心点为目标点,机器人的名义运动规律为

$$\begin{cases} x = 0.45 + 0.1 \cos \frac{5t}{6} \\ y = 0.15 \times \sqrt{3} + 0.1 \sin \frac{5t}{6} \\ \varphi = -0.05 \sin \frac{5t}{6} \end{cases} \quad (t \in (0, 7.54])$$

(55)

式中 $x、y$ ——动平台目标点在 x 轴、 y 轴方向上的位移,m

φ ——动平台转角,rad

根据机器人动力学方程(式(54)),给定机器人的初始位姿和期望驱动力矩,可以求解动平台的末端轨迹以及动平台转角,并且和简化模型进行对比,如图8、9所示。

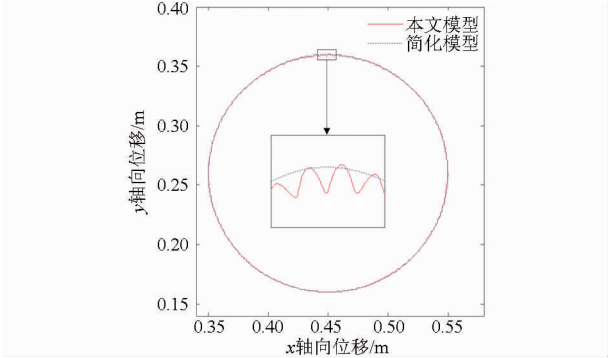


图8 本文模型和简化模型动平台轨迹对比

Fig. 8 Trajectory comparison between model in this study and simplified model

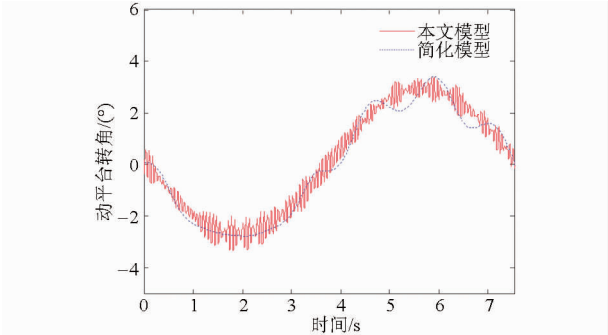


图9 本文模型和简化模型的动平台转角对比

Fig. 9 Moving platform angle comparison between model in this study and simplified model

从图8、9可以看出:简化模型计算所得的动平台轨迹接近理想圆周运动的轨迹,这说明简化模型不能反映系统中柔顺部件对机器人的影响;而基于本文理论模型计算所得的轨迹是在理想轨迹的基础上,存在低幅高频振动。这种低幅高频振动特性,是柔顺关节在机器人运动过程中反映出来的,是柔顺部件特有的性质。而简化模型不能反映这一性质,这说明本文理论模型比简化模型优越。

2.2 软件仿真

建立柔顺关节并联机器人仿真模型的主要步骤有:

- (1)在 SolidWorks 中建立柔顺关节的模型。
- (2)将柔顺关节模型导入到 ANASY 软件中进行柔性化处理,生成模态中性文件。
- (3)在 ADAMS 中,建立驱动杆、连杆和动平台的模型,导入柔性化后的柔顺关节;通过选择材料参

数、添加约束、加载理论计算出的期望驱动力矩等操作,建立起柔顺关节并联机器人的仿真模型。

通过上述步骤,建立的柔顺关节并联机器人刚柔耦合仿真模型如图 1 所示。

基于仿真模型,输入理论计算出的驱动力矩进行仿真,并和理论计算结果进行对比,结果如图 10、11 所示。

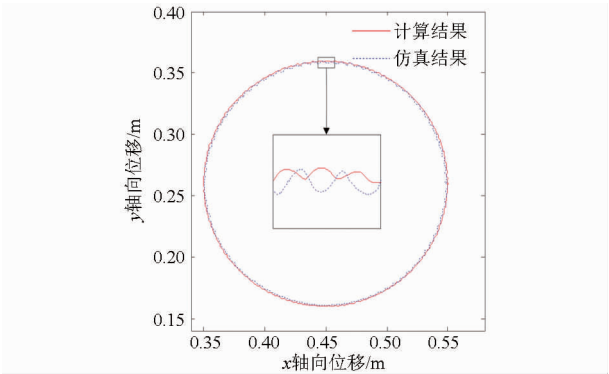


图 10 计算结果和仿真结果的轨迹对比
Fig. 10 Trajectory comparison between calculation results and simulation results

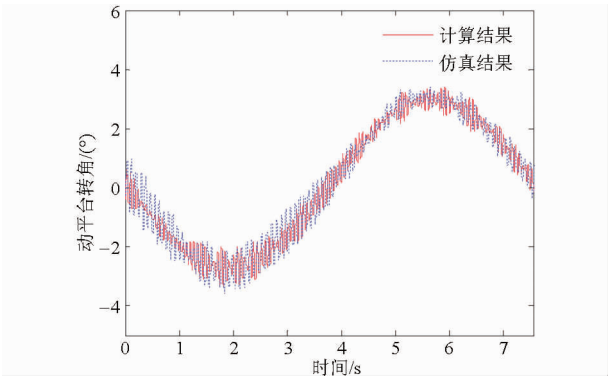


图 11 动平台转角理论计算结果和仿真结果对比
Fig. 11 Moving platform angle comparison between theoretical calculation results and simulation results

从图 10、11 中可以看出,通过求解机器人动力学响应,软件仿真结果和理论计算结果中的动平台轨迹大体上都是圆,都存在低幅高频振动。理论计算轨迹和 ADAMS 仿真轨迹的径向误差曲线如图 12 所示。

由统计结果可知,在做圆周运动时,理论计算和软件仿真的轨迹径向误差最大值为 2.41 mm,最小值为 -0.99 mm,平均误差为 0.84 mm,最大相对误差为 2.41%。这说明理论轨迹和仿真轨迹基本吻合,从而验证了理论模型的正确性。在同一台计算机上,理论计算的时间为 1 min,而刚柔耦合软件仿真求解的时间一般比较长,最短为 28 min,而且仿真步数越多,精度越高,所需时间越长。

为了进一步研究柔顺关节本身的变形运动,以第 1 支链中的柔顺关节为例,给出了软件仿真中柔

顺关节两端角位移并进行对比,如图 13 所示。

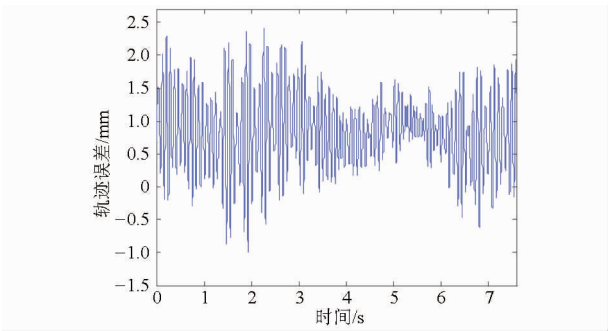


图 12 轨迹误差曲线
Fig. 12 Error curve of trajectory

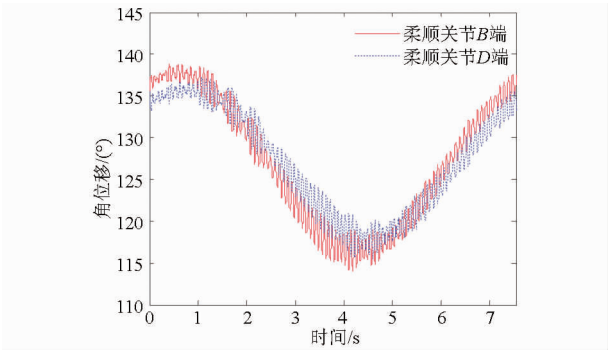


图 13 第 1 支链柔顺关节两端角位移变化仿真曲线
Fig. 13 Angles of both ends of compliant joints in the first chain in software simulation

从图 13 以及统计结果可知,在机器人运动过程中柔顺关节两端角位移最大差值为 5.60°,最小差值为 -7.62°,平均差值是 -0.04°,最大相对值为 6.60%,说明柔顺关节两端的角位移相对比较接近,这也说明了式(28)正确有效。

3 实验

图 14 所示为柔顺关节并联机器人的实验系统实物图。



图 14 柔顺关节平面并联机器人实验系统
Fig. 14 Experimental system of planar parallel robot with compliant joints

1. 柔顺关节并联机器人 2. 工控机(内插 PMAC) 3. 电气控制柜 4. 伺服电机、接近开关、减速器 5. Optotrak 测量系统

系统由柔顺关节并联机器人机构(图 15)、机器人控制系统和机器人测量系统组成。其中测量系统

由 NDI Optotrak 三维测量系统实现。机器人控制系统和测量系统详见文献[23]。

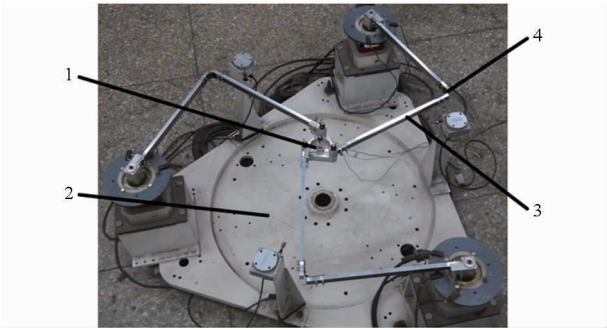


图 15 柔顺关节的平面并联机器人机构
Fig. 15 Planar parallel robot with compliant joints
1. 动平台 2. 定平台 3. 运动支链 4. 柔顺关节

在柔顺关节并联机器人机构中,为了固定和拆卸柔顺关节方便,柔顺关节是和驱动杆、连杆内侧连接的,如图 16 所示。

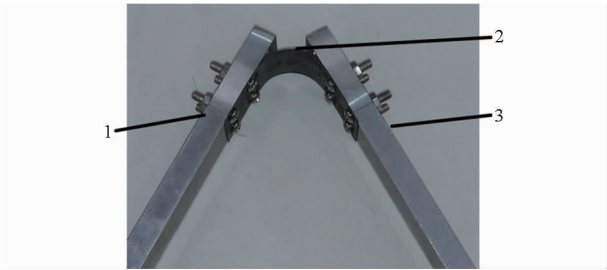


图 16 柔顺关节的连接
Fig. 16 Connection diagram of compliant joint
1. 驱动杆 2. 柔顺关节 3. 连杆

从图 10 和图 11 可以看出,当柔顺关节截面厚度为 0.3 mm 时,计算结果和仿真结果振动比较明显。为了提高机器人位移精度,在实际实验中,柔顺关节截面厚度变为 0.5 mm。

以动平台移动速度 5 000 mm/min 为例进行柔顺关节并联机器人高速轨迹跟踪实验,其实验结果如图 17 所示,并且和理论计算结果进行了对比。图 18 给出了理论计算结果和实验结果的径向误差曲线。

从柔顺关节并联机器人实验结果和理论结果对比(图 17、18)可以看出:理论求解结果比较理想,几乎看不出明显振动;两者最大误差为 4.69 mm,最小误差为 -3.59 mm,误差平均值为 0.71 mm,最大相对误差为 4.69%,在工程允许范围之内,验证了本文理论模型的正确性。

分析图 17、18 中柔顺关节并联机器人实验结果和理论结果的差别,主要原因有:

(1)实验机构与理论分析模型之间有一定差

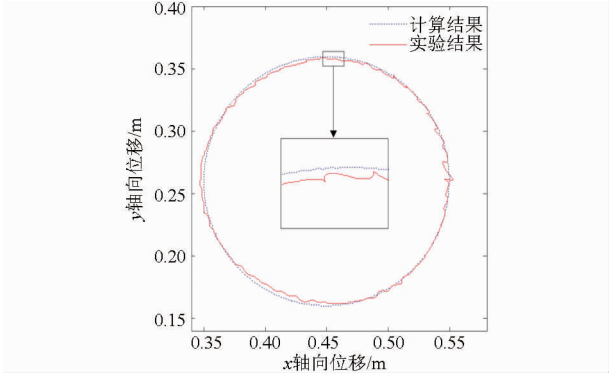


图 17 实验轨迹与理论计算结果对比
Fig. 17 Comparison between experimental trajectory and theoretical results

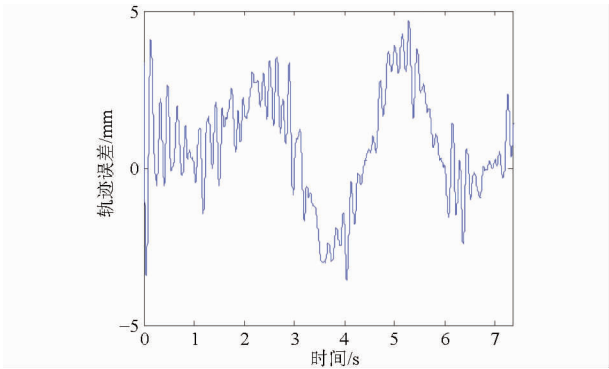


图 18 实验轨迹与理论计算结果的误差曲线
Fig. 18 Error curve of experimental trajectory and theoretical results

距,例如在理论分析中,并没有考虑柔顺关节或者传统关节的配套装置等对机器人产生的影响。

(2)在柔顺关节的厚度方向加工过程中,不可避免地会产生一些误差,而机器人系统的刚度和基频等对柔顺关节的厚度很敏感,使实验机构与理论模型间产生差异。

(3)传统关节轴承间隙及摩擦等因素也会产生一定的影响,而在理论分析中没有考虑这些因素。

4 结束语

首次基于初始弯曲梁的伪刚体模型建立了柔顺关节的双 1R 伪刚体模型,应用拉格朗日方程和虚拟切割法推导了柔顺关节并联机器人系统动力学方程。对方程进行了数值求解。通过和简化模型的求解结果对比,表明了理论模型可以更真实地反映柔顺关节并联机器人这一刚柔耦合系统的运动,从而表明了理论模型比简化模型优越;同时和软件仿真结果、实验结果进行了相互对比,验证了理论模型正确有效。

参 考 文 献

- 1 贲远,徐青松,李杨民. 并联微操作机器人技术及应用进展[J]. 机械工程学报, 2008,44(12): 12-23.
Yun Yuan, Xu Qingsong, Li Yangmin. Survey on parallel manipulators with micro/nano manipulation technology and applications [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(12): 12-23. (in Chinese)
- 2 Howell L L. Compliant mechanism [M]. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- 3 Ryu J W, Lee S Q, Gweon D G, et al. Inverse kinematic modeling of a coupled flexure hinge mechanism [J]. Mechatronics, 1999, 9(6): 657-674.
- 4 Koseki Y, Tanikawa T, Koyachi N, et al. Kinematic analysis of a translational 3-DOF micro-parallel mechanism using the matrix method [J]. Advanced Robotics, 2002, 16(3):251-264.
- 5 Yu J J, Hu Y D, Bi S S, et al. Kinematics feature analysis of a 3-DOF compliant mechanism for micro manipulation [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 17(1):127-131.
- 6 Correa J, Crane C. Velocity analysis of a compliant platform [C] // Proceedings of the ASME 2009 International Mechanical Engineering Congress & Exposition, 2009,10:75-82.
- 7 Yun Y, Li Y M. Design and analysis of a novel 6-DOF redundant actuated parallel robot with compliant hinges for high precision positioning [J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 61(4):829-845.
- 8 Hao G B, Kong X W. A 3-DOF translational compliant parallel manipulator based on flexure motion [C] // ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2009,7:101-110.
- 9 Hesselbach J, Plitea N, Thoben R. Advanced technologies for micro assembly [J]. International Society for Optical Engineering, 1998, 3202:178-190.
- 10 余跃庆,崔忠炜,赵鑫,等. 柔顺关节并联机器人设计与实验 [J]. 农业机械学报, 2013, 44(7): 274-278.
Yu Yueqing, Cui Zhongwei, Zhao Xin, et al. Design and experiment of parallel robot with compliant joints[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(7): 274-278. (in Chinese)
- 11 余跃庆,马兰,崔忠炜,等. 并联机器人开槽薄壁柔顺关节设计与实验 [J]. 农业机械学报,2014, 45(5): 284-290.
Yu Yueqing, Ma Lan, Cui Zhongwei, et al. Design and experiment of open thin-walled flexure joints of parallel robot [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(5): 284-290. (in Chinese)
- 12 田浩,余跃庆,吕强. 片簧型柔顺并联机器人运动规划与轨迹跟踪技术 [J]. 农业机械学报,2015, 46(3):372-378.
Tian Hao, Yu Yueqing, Lü Qiang. Motion planning and trajectory tracking of parallel robot with leaf compliant joint [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(3):372-378. (in Chinese)
- 13 Yong Y K, Lu T F. Kinetostatic modeling of 3-RRR compliant micro-motion stages with flexure hinges[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009,44(6):1156-1175.
- 14 Yue Y, Gao F, Zhao X C, et al. Relationship among input-force, payload, stiffness and displacement of a 3-DOF perpendicular parallel micro-manipulator [J]. Mechanism and Machine Theory, 2010,45(5): 756-771.
- 15 刘平安. 柔性关节及 3-DOF 微动平面并联机器人设计与分析 [D]. 北京:北京交通大学,2008.
Liu Pingan. Design and synthesis of flexure hinges and 3-DOF micro-motion planar parallel manipulators[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2008. (in Chinese)
- 16 Tian Y L, Shirinzadeha B, Zhang D. Design and dynamics of a 3-DOF flexure-based parallel mechanism for micro/nano manipulation [J]. Microelectronic Engineering, 2010, 87(2): 230-241.
- 17 Yun Y, Li Y M. Optimal design of a 3-PUPU parallel robot with compliant hinges for micromanipulation in a cubic workspace [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(6):977-985.
- 18 Xu Q S. Design, testing and precision control of a novel long-stroke flexure micropositioning system [J]. Mechanism and Machine Theory, 2013,70:209-224.
- 19 Li Y, Yu Y Q. Dynamic modeling for a high-speed 3-DOF parallel robot with compliant joints [C]//International Conference on Mechanical Design, Manufacture and Automation Engineering, 2014: 224-229.
- 20 田浩,余跃庆. 柔顺关节并联机器人动力学建模与控制研究[J]. 农业机械学报, 2014,45(5):279-283.
Tian Hao, Yu Yueqing. Dynamics and control of parallel robot with compliant joints [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014,45(5):279-283. (in Chinese)
- 21 Howell L L, Midha A. Parametric deflection approximations for end loaded large deflection beams in compliant mechanisms [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1995,117(3):156-165.
- 22 从爽,尚伟伟. 并联机器人——建模、控制优化与应用[M]. 北京:电子工业出版社,2010.
- 23 赵鑫. 含有柔顺关节的三自由度并联机器人结构设计与实验研究[D]. 北京:北京工业大学,2012.
Zhao Xin. Structural design and experimental study of a 3-DOF parallel robot with compliant joints [D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2012. (in Chinese)