

n 次 λ -Bézier曲线光滑拼接的连续性条件^{*}

胡 钢^{1,2} Wei Guo³ 吉晓民¹

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048; 2. 西安理工大学理学院, 西安 710054;
3. 北卡罗来纳大学彭布罗克分校, 彭布罗克 28372)

摘要: 针对 n 次 λ -Bézier曲线造型中的复杂曲线难以用单一曲线来构造的问题,研究了该曲线光滑拼接时的连续性条件。通过分析 λ -Bézier曲线的基函数及其端点性质,给出了相邻两段 λ -Bézier曲线间 C^1 、 C^2 和 G^1 、 G^2 光滑拼接的充要条件;最后,给出了 λ -Bézier曲线光滑拼接的具体步骤与几何造型实例,并分析了形状参数对拼接后曲线形状的影响规律。实例结果表明,所提方法不仅易实现且简单有效,在工程复杂曲面的构造与外形设计中将有一定的应用价值。

关键词: λ -Bézier曲线 形状参数 几何连续 曲线设计

中图分类号: TP391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)04-0351-09

Continuity Conditions for λ -Bézier Curves of Degree n

Hu Gang^{1,2} Wei Guo³ Ji Xiaomin¹

(1. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China
2. School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China
3. University of North Carolina at Pembroke, Pembroke NC 28372, USA)

Abstract: With the aim to tackle the problem that the engineering complex curves can not be constructed by using a single curve, the continuity condition of the λ -Bézier curves of degree n with shape control parameters were investigated. The λ -Bézier curves of degree n not only inherit the outstanding properties of the corresponding classical Bézier curve of degree n , but also have a good performance on adjusting their shapes by changing shape control parameters. In the particular case where the shape control parameter equals to zero, the λ -Bézier curves degenerate to the classical Bézier curve. Firstly, the Bernstein-like basis functions of arbitrary order n were constructed by using a recursive formula from the initial basis functions, and the geometric property at the endpoints of the λ -Bézier curves were obtained, such as interpolation at the corners, the derivative at end-points and the second derivative at end-points. Secondly, based on the analysis of basis functions and terminal properties, the necessary and sufficient conditions of G^1 , G^2 continuity and C^1 , C^2 continuity between two adjacent λ -Bézier curves were proposed. Finally, some properties of the continuity condition for the λ -Bézier curves and applications in λ -Bézier curves design were discussed. In addition, the influence rules of the shape parameters on the complex λ -Bézier curves shape were studied. The modeling examples showed that the proposed method was effective and easy to implement, which greatly enhanced the ability to construct complex curves by using λ -Bézier curves.

Key words: λ -Bézier curve Shape parameter Geometric continuity Curves design

收稿日期: 2014-07-31 修回日期: 2014-09-20

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51305344)、陕西省科技计划(工业攻关)资助项目(2014K05-22)和陕西省教育厅基金资助项目(2013JK1029)

作者简介: 胡钢,副教授,博士生,主要从事CAGD/CAD/CAM和产品造型设计理论研究,E-mail: hg_xaut@xaut.edu.cn

通讯作者: 吉晓民,教授,博士生导师,主要从事机械设计与方法、CAD/CAM、产品造型与仿真研究,E-mail: jixiaomin@xaut.edu.cn

引言

参数型曲线曲面不仅是 CAD/CAM 中研究的重要内容,而且也是产品形状设计、几何表示的有力工具。传统 Bézier 曲线是一种利用 Bernstein 基函数构造的曲线,由于它结构简单、直观且具有许多优良的性质(如端点插值性、端点切触性、对称性、凸包性、仿射不变性等),如今早已成为 CAD/CAM 领域用于表示曲线曲面的重要方法之一,然而 Bézier 曲线存在一个缺点:曲线的形状是由其控制顶点唯一确定的。为了克服这一缺点,有理 Bézier 曲线通过引入权因子在不改变曲线控制顶点的情况下可由权因子来调整曲线的形状,但是有理分式的引入又带来诸多缺陷,如计算复杂、求积分不方便、求导次数增加等^[1-2]。

在保留 Bézier 曲线已有优点的基础上,为了弥补 Bézier 曲线造型技术的缺陷,同时还为了增加曲线的形状可调性、逼近性,国内外学者构造了许多带形状参数的非有理形式的广义 Bézier 曲线^[3-19]。由于 Bernstein-like 基函数继承了 Bernstein 基函数诸多优良的性质,如非负性、对称性、权性、端点性质、线性无关性等,所有 λ-Bézier 曲线^[18]继承了 n 次 Bézier 曲线的诸多优点。此外,λ-Bézier 曲线还具有优良的形状可调性,同时其计算复杂度也要低于文献[5-11]中的非代数多项式曲线,所以该方法在 CAD/CAM 等领域中具有一定应用价值^[20-25]。

λ-Bézier 曲线的应用较为广泛,在描述曲线、曲面方面有一定的作用。然而,λ-Bézier 曲线仍然是一种多项式曲线,不可避免地会继承多项式曲线固有的缺点,即高次多项式的计算会产生数值不稳定现象。所以,当一条 λ-Bézier 曲线的次数过高时控制多边形对曲线的控制会减弱,而次曲线数过低时又无法更好地表达一条复杂的曲线,解决这一矛盾的关键是实现两相邻 λ-Bézier 曲线间的光滑拼接问题。本文通过分析 λ-Bézier 曲线的基函数及其端点性质,推导该曲线光滑拼接时的连续性条件。

1 λ-Bézier 曲线族

1.1 Bernstein-like 基函数的定义

定义 1:令 $\lambda \in [-1, 1]$,对任意 $t \in [0, 1]$,关于 t 的多项式函数

$$\begin{cases} b_{0,2}(t,\lambda) = (1-2\lambda t + \lambda t^2)(1-t)^2 \\ b_{1,2}(t,\lambda) = 2t(1-t)(1+\lambda - \lambda t + \lambda t^2) \\ b_{2,2}(t,\lambda) = (1-\lambda + \lambda t^2)t^2 \end{cases} \quad (1)$$

即为 2 次 Bernstein-like 基函数^[18]。

利用递归的方法,可将 n 次 Bernstein-like 基函数 $b_{i,n}(t,\lambda)$ 定义为^[18]

$$b_{i,n}(t,\lambda) = (1-t)b_{i,n-1}(t,\lambda) + tb_{i-1,n-1}(t,\lambda) \quad (t \in [0, 1]) \quad (2)$$

式中, $i = 0, 1, \cdots, n$, n 为正整数且满足 $n \geq 3$;而 $b_{i,2}(t,\lambda)$ ($i = 0, 1, 2$) 为式(1)定义的 2 次 Bernstein-like 基函数,且有 $b_{n,n-1}(t,\lambda) = b_{-1,n-1}(t,\lambda) = 0$ 。

可以证明, n 次 Bernstein-like 基函数 $b_{i,n}(t,\lambda)$ 具有 n 次 Bernstein 基函数类似的性质,如非负性、权性、对称性以及线性无关性等。特别当 $\lambda = 0$ 时, $b_{i,n}(t,\lambda)$ 便退化为 n 次 Bernstein 基函数。

1.2 λ-Bézier 曲线的定义与性质

定义 2:给定 $n+1$ 个控制顶点 $P_i \in \mathbf{R}^d$ ($d = 2, 3; i = 0, 1, \cdots, n; n \geq 2$),多项式曲线

$$C(t,\lambda) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t,\lambda) \quad (t \in [0, 1]) \quad (3)$$

即为带形状参数 λ 的 n 次 Bézier-like 曲线^[18],简称为 λ-Bézier 曲线。式中, $\lambda \in [-1, 1]$, $b_{i,n}(t,\lambda)$ 为由式(2)定义的 n 次 Bernstein-like 基函数。显然,由 Bernstein-like 基函数的性质可知 λ-Bézier 曲线继承了 n 次 Bézier 曲线的诸多优良性质,如凸包性、对称性、几何不变性以及端点性质等。此外,λ-Bézier 曲线还具有更好的形状可调性,曲线的形状是由其控制顶点和形状参数共同决定的,特别当 $\lambda = 0$ 时,λ-Bézier 曲线便退化为传统 n 次 Bézier 曲线。图 1 给出了分别利用 3 次 λ-Bézier 曲线和 4 次 λ-Bézier 曲线绘制的花瓣图形的实例,图 1 中虚折线均表示 λ-Bézier 曲线的控制多边形,实线、虚线和点划线对应的形状参数分别取值为 1、0 和 -1。

定理 1:由式(3)定义的 λ-Bézier 曲线 $C(t,\lambda)$ 满足如下端点性质

$$\begin{cases} C(0,\lambda) = P_0 \\ C(1,\lambda) = P_n \\ C'(0,\lambda) = (n+2\lambda)(P_1 - P_0) \\ C'(1,\lambda) = (n+2\lambda)(P_n - P_{n-1}) \\ C''(0,\lambda) = [2\lambda + (4\lambda - 1)n + n^2]P_0 + \\ \qquad \qquad \qquad [8\lambda + (2 - 8\lambda)n - 2n^2]P_1 + \\ \qquad \qquad \qquad [-10\lambda + (4\lambda - 1)n + n^2]P_2 \\ C''(1,\lambda) = [-10\lambda + (4\lambda - 1)n + n^2]P_{n-2} + \\ \qquad \qquad \qquad [8\lambda + (2 - 8\lambda)n - 2n^2]P_{n-1} + \\ \qquad \qquad \qquad [2\lambda + (4\lambda - 1)n + n^2]P_n \end{cases} \quad (4)$$

证明:利用式(2)中的递归表达式,可以推导出 n 次 Bernstein-like 基函数的一个显式表达式,即可

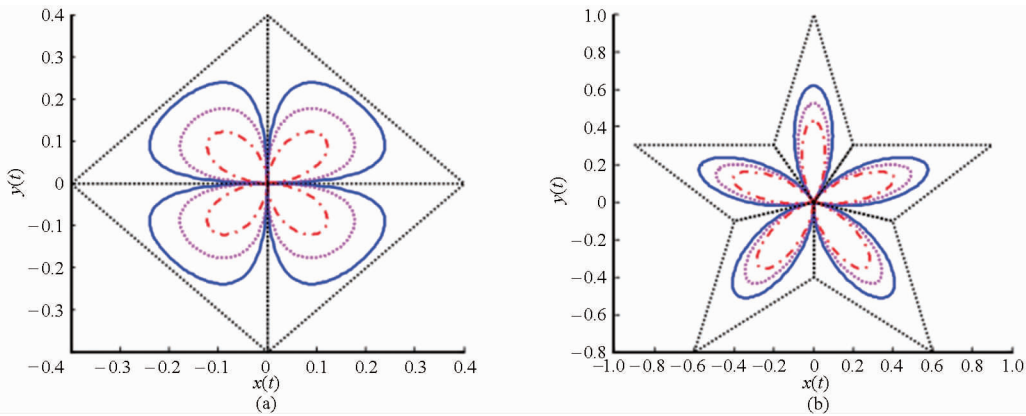


图 1 λ -Bézier 曲线的应用实例

Fig. 1 Application examples of λ -Bézier curves

(a) 3 次 λ -Bézier 曲线绘制的花瓣图形 (b) 4 次 λ -Bézier 曲线绘制的花瓣图形

将 $b_{i,n}(t,\lambda)$ ($i=0,1,\cdots,n$) 写成显式形式

$$b_{i,n}(t,\lambda) = \left(1 + \frac{3C_{n-2}^{i-1} + C_{n-1}^i - C_n^i}{C_n^i}\lambda - \frac{2C_{n-1}^{i-1}}{C_n^i}\lambda t + \lambda t^2\right) C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad (i=0,1,\cdots,n) \tag{5}$$

式中, $n \geq 2, C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \circ$

由式 (5) 易算出 Bernstein-like 基函数 $b_{i,5}(t,\lambda)$, ($i=0,1,\cdots,n; n \geq 2$) 的端点性质为

$$b_{i,n}(0,\lambda) = \begin{cases} 1 & (i=0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases} \tag{6}$$

$$b_{i,n}(1,\lambda) = \begin{cases} 1 & (i=n) \\ 0 & (i \neq n) \end{cases} \tag{7}$$

$$b'_{i,n}(0,\lambda) = \begin{cases} -(n+2\lambda) & (i=0) \\ n+2\lambda & (i=1) \\ 0 & (i=2,3,\cdots,n) \end{cases} \tag{8}$$

$$b'_{i,n}(1,\lambda) = \begin{cases} -(n+2\lambda) & (i=n-1) \\ n+2\lambda & (i=n) \\ 0 & (i=0,1,\cdots,n-2) \end{cases} \tag{9}$$

$$b''_{i,n}(0,\lambda) = \begin{cases} 2\lambda + (4\lambda - 1)n + n^2 & (i=0) \\ 8\lambda + (2 - 8\lambda)n - 2n^2 & (i=1) \\ -10\lambda + (4\lambda - 1)n + n^2 & (i=2) \\ 0 & (i=3,4,\cdots,n) \end{cases} \tag{10}$$

$$b''_{i,n}(1,\lambda) = \begin{cases} -10\lambda + (4\lambda - 1)n + n^2 & (i=n-2) \\ 8\lambda + (2 - 8\lambda)n - 2n^2 & (i=n-1) \\ 2\lambda + (4\lambda - 1)n + n^2 & (i=n) \\ 0 & (i=1,2,\cdots,n-3) \end{cases} \tag{11}$$

根据式 (6) ~ (11), 再结合式 (3) 中 λ -Bézier 曲

线定义, 即可得式 (4) 中的结论, 从而定理 1 得证。

2 λ -Bézier 曲线光滑拼接的连续性条件

在 CAD/CAM 领域中, 经常会遇到各种复杂曲线的造型问题, 而一条复杂的曲线通常难以用单条 λ -Bézier 曲线来构造, 为此需解决的关键技术是实现多条 λ -Bézier 曲线间的光滑拼接。目前, 关于曲线拼接的连续性度量标准有 2 种^[1, 26-28]: ① 参数连续性, 即曲线在拼接处具有 n 阶参数连续可微, 则称这类拼接为 C^n 连续。② 几何连续性, 即当且仅当两曲线相应的弧长参数化在公共拼接点处具有 C^n 连续性, 则称它们在该点具有 G^n 连续。实际应用中, 更关心的是曲线 C^1 、 C^2 和 G^1 、 G^2 连续的拼接条件。为了讨论方便, 不妨假设待拼接的 2 条 λ -Bézier 曲线为

$$\begin{cases} C_1(t,\lambda_1) = \sum_{i=0}^n P_{i,1} b_{i,n}(t,\lambda_1) & (t \in [0,1]) \\ C_2(t,\lambda_2) = \sum_{j=0}^m P_{j,2} b_{j,m}(t,\lambda_2) & (t \in [0,1]) \end{cases} \tag{12}$$

其中, $-1 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1, P_{i,1}$ ($i=0,1,\cdots,n$)、 $P_{j,2}$ ($j=0,1,\cdots,m$) 为曲线 $C_1(t,\lambda_1)$ 和 $C_2(t,\lambda_2)$ 的控制顶点。

2.1 λ -Bézier 曲线的 C^1 、 C^2 光滑拼接

若曲线 $C_1(t,\lambda_1)$ 和 $C_2(t,\lambda_2)$ 在公共连接点处具有相同的一阶导数, 则称两条曲线在拼接处满足 C^1 连续; 若曲线 $C_1(t,\lambda_1)$ 和 $C_2(t,\lambda_2)$ 在公共连接点处除了满足 C^1 连续的条件外, 还具有相同的二阶导数, 则称这两条曲线在拼接处达到了 C^2 连续^[1, 28]。

定理 2: 当两相邻 λ -Bézier 曲线 $C_1(t,\lambda_1)$ 和 $C_2(t,\lambda_2)$ 的控制顶点满足

$$\begin{cases} P_{0,2} = P_{n,1} \\ P_{1,2} = \left(1 + \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2}\right)P_{n,1} - \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2}P_{n-1,1} \end{cases} \quad (13)$$

同时成立,则曲线 C_1 和 C_2 在公共拼接点处达到 C^1 连续,反之亦成立。

证明:为了让两条相邻曲线 $C_1(t, \lambda_1)$ 和 $C_2(t, \lambda_2)$ 满足 C^1 连续,首先应让 $C_1(t, \lambda_1)$ 的末端顶点与 $C_2(t, \lambda_2)$ 首端顶点满足 C^0 连续,即

$$P_{0,2} = P_{n,1} \quad (14)$$

其次,两相邻曲线在公共拼接点处还应满足切矢向量相等,即

$$C'_1(1, \lambda_1) = C'_2(0, \lambda_2) \quad (15)$$

再根据定理 1 中的结论,可知

$$\begin{cases} C'_1(1, \lambda_1) = (n+2\lambda_1)(P_{n,1} - P_{n-1,1}) \\ C'_2(0, \lambda_2) = (m+2\lambda_2)(P_{1,2} - P_{0,2}) \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)代入式(15)可得

$$(n+2\lambda_1)(P_{n,1} - P_{n-1,1}) = (m+2\lambda_2)(P_{1,2} - P_{0,2}) \quad (17)$$

最后,结合式(14)可将式(17)进一步整理为

$$P_{1,2} = \left(1 + \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2}\right)P_{n,1} - \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2}P_{n-1,1} \quad (18)$$

从而,式(14)和式(18)构成了 2 条 λ -Bézier 曲线光滑拼接的 C^1 连续条件,定理 2 得证。

定理 3: 当两相邻 λ -Bézier 曲线 $C_1(t, \lambda_1)$ 和 $C_2(t, \lambda_2)$ 的控制顶点满足

$$\begin{cases} P_{0,2} = P_{n,1} \\ P_{1,2} = \left(1 + \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2}\right)P_{n,1} - \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2}P_{n-1,1} \\ P_{2,2} = \frac{-10\lambda_1 + (4\lambda_1 - 1)n + n^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2}P_{n-2,1} + \\ \left[\frac{8\lambda_1 + (2 - 8\lambda_1)n - 2n^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} + \right. \\ \left. \frac{8\lambda_2 + (2 - 8\lambda_2)m - 2m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2} \right]P_{n-1,1} + \\ \left[\frac{(2+4n)\lambda_1 + (4m-10)\lambda_2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} + \right. \\ \left. \frac{n^2 - n + m^2 - m}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} - \right. \\ \left. \frac{8\lambda_2 + (2 - 8\lambda_2)m - 2m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2} \right]P_{n,1} \end{cases} \quad (19)$$

同时成立,则曲线 C_1 和 C_2 在公共拼接点处达到 C^2 连续,反之亦成立。

证明:两相邻曲线 $C_1(t, \lambda_1)$ 和 $C_2(t, \lambda_2)$ 要满足

C^2 连续,先应在公共拼接点处满足 C^1 连续的条件

$$\begin{cases} P_{0,2} = P_{n,1} \\ P_{1,2} = \left(1 + \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2}\right)P_{n,1} - \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2}P_{n-1,1} \end{cases} \quad (20)$$

其次,曲线在公共拼接点处还要求二阶导数相等,即 $C'''_1(1, \lambda_1) = C'''_2(0, \lambda_2)$,再根据定理 1 中 λ -Bézier 曲线的端点性质有

$$\begin{aligned} & [-10\lambda_1 + (4\lambda_1 - 1)n + n^2]P_{n-2,1} + \\ & [8\lambda_1 + (2 - 8\lambda_1)n - 2n^2]P_{n-1,1} + \\ & [2\lambda_1 + (4\lambda_1 - 1)n + n^2]P_{n,1} = \\ & [2\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2]P_{0,2} + \\ & [8\lambda_2 + (2 - 8\lambda_2)m - 2m^2]P_{1,2} + \\ & [-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2]P_{2,2} \end{aligned} \quad (21)$$

最后,将式(20)中的 2 个等式分别代入式(21)中,整理可得

$$\begin{aligned} P_{2,2} = & \frac{-10\lambda_1 + (4\lambda_1 - 1)n + n^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2}P_{n-2,1} + \\ & \left[\frac{8\lambda_1 + (2 - 8\lambda_1)n - 2n^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} + \right. \\ & \left. \frac{8\lambda_2 + (2 - 8\lambda_2)m - 2m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2} \right]P_{n-1,1} + \\ & \left[\frac{(2+4n)\lambda_1 + (4m-10)\lambda_2 - n - m + n^2 + m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} - \right. \\ & \left. \frac{8\lambda_2 + (2 - 8\lambda_2)m - 2m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} \frac{n+2\lambda_1}{m+2\lambda_2} \right]P_{n,1} \end{aligned} \quad (22)$$

从而,式(20)和式(22)便构成 2 条 λ -Bézier 曲线光滑拼接的 C^2 连续条件,定理 3 得证。

2.2 λ -Bézier 曲线的 G^1 、 G^2 光滑拼接

若曲线 $C_1(t, \lambda_1)$ 和 $C_2(t, \lambda_2)$ 在公共连接点处的一阶导数成正比例,则称两条曲线在拼接处满足 G^1 连续;若曲线 $C_1(t, \lambda_1)$ 和 $C_2(t, \lambda_2)$ 在公共连接点处满足 G^1 连续的条件,与此同时两者的曲率相等,且其副法向量的方向也相同,则称它们在拼接点处达到了 G^2 连续^[27-28]。

定理 4: 两相邻 λ -Bézier 曲线 $C_1(t, \lambda_1)$ 和 $C_2(t, \lambda_2)$ 在公共拼接点处达到 G^1 连续的充要条件为

$$\begin{cases} P_{0,2} = P_{n,1} \\ P_{1,2} = \left[1 + \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)}\right]P_{n,1} - \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)}P_{n-1,1} \end{cases} \quad (23)$$

式中, $\alpha > 0$ 表示常数。

证明:两条相邻曲线 $C_1(t, \lambda_1)$ 和 $C_2(t, \lambda_2)$ 需要达到 G^1 连续,首先应让 $C_1(t, \lambda_1)$ 的末端顶点与 $C_2(t, \lambda_2)$ 首端顶点满足 G^0 连续,即

$$\boldsymbol{P}_{0,2} = \boldsymbol{P}_{n,1} \tag{24}$$

其次,两相邻曲线在公共拼接点处还应满足切矢方向相同,即

$$\boldsymbol{C}'_1(1,\lambda_1) = \alpha \boldsymbol{C}'_2(0,\lambda_2) \quad (\alpha > 0) \tag{25}$$

再根据定理 1 中的结论有

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}'_1(1,\lambda_1) = (n+2\lambda_1)(\boldsymbol{P}_{n,1} - \boldsymbol{P}_{n-1,1}) \\ \boldsymbol{C}'_2(0,\lambda_2) = (m+2\lambda_2)(\boldsymbol{P}_{1,2} - \boldsymbol{P}_{0,2}) \end{cases} \tag{26}$$

将式(26)代入式(25)可得

$$(n+2\lambda_1)(\boldsymbol{P}_{n,1} - \boldsymbol{P}_{n-1,1}) = \alpha(m+2\lambda_2)(\boldsymbol{P}_{1,2} - \boldsymbol{P}_{0,2}) \tag{27}$$

最后,结合式(24)可将式(27)进一步整理为

$$\boldsymbol{P}_{1,2} = \left[1 + \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)} \right] \boldsymbol{P}_{n,1} - \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)} \boldsymbol{P}_{n-1,1} \tag{28}$$

从而,式(24)和式(28)构成了两条 λ -Bézier 曲线光滑拼接的 G^1 连续条件,定理 4 得证。

定理 5: 两相邻 λ -Bézier 曲线 $\boldsymbol{C}_1(t, \lambda_1)$ 和 $\boldsymbol{C}_2(t, \lambda_2)$ 在公共拼接点处达到 G^2 连续的充要条件为

$$\left\{ \begin{aligned} &\boldsymbol{P}_{0,2} = \boldsymbol{P}_{n,1} \\ &\boldsymbol{P}_{1,2} = \left[1 + \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)} \right] \boldsymbol{P}_{n,1} - \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)} \boldsymbol{P}_{n-1,1} \\ &\boldsymbol{P}_{2,2} = \frac{-10\lambda_1 + (4\lambda_1 - 1)n + n^2}{\alpha^2[-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2]} \boldsymbol{P}_{n-2,1} + \\ &\quad \left\{ \frac{\alpha[8\lambda_1 + (2-8\lambda_1)n - 2n^2] + d(n+2\lambda_1)}{\alpha^3[-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2]} + \right. \\ &\quad \left. \frac{8\lambda_2 + (2-8\lambda_2)m + m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)} \right\} \boldsymbol{P}_{n-1,1} + \\ &\quad \left\{ \frac{\alpha[2\lambda_1 + (4\lambda_1 - 1)n + n^2] - d(n+2\lambda_1)}{\alpha^3[-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2]} - \right. \\ &\quad \left. \frac{2\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{8\lambda_2 + (2-8\lambda_2)m + m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} \left[1 + \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)} \right] \right\} \boldsymbol{P}_{n,1} \end{aligned} \right. \tag{29}$$

式中, $\alpha > 0$ 表示常数, d 表示任意常数。

证明: 两条相邻曲线 $\boldsymbol{C}_1(t, \lambda_1)$ 和 $\boldsymbol{C}_2(t, \lambda_2)$ 需要达到 G^2 连续, 首先应让 $\boldsymbol{C}_1(t, \lambda_1)$ 的末端顶点与 $\boldsymbol{C}_2(t, \lambda_2)$ 首端顶点满足 G^1 连续, 即

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_{0,2} = \boldsymbol{C}_2(0, \lambda_2) = \boldsymbol{C}_1(1, \lambda_1) = \boldsymbol{P}_{n,1} \\ \boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1) = \alpha \boldsymbol{C}'_2(0, \lambda_2) \quad (\alpha > 0) \end{cases} \tag{30}$$

式中, α 取值与式(23)中同值。不妨设 $\boldsymbol{C}_1(t, \lambda_1)$ 在 $t=1$ 处的副法向量记为 $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{C}_2(t, \lambda_2)$ 在 $t=0$ 处的副法向量记为 $\boldsymbol{D}_2$, 且有

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1) \times \boldsymbol{C}''_1(1, \lambda_1) \\ \boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{C}'_2(0, \lambda_2) \times \boldsymbol{C}''_2(0, \lambda_2) \end{cases} \tag{31}$$

其次, G^2 连续要求曲线 $\boldsymbol{C}_1(t, \lambda_1)$ 和 $\boldsymbol{C}_2(t, \lambda_2)$ 在拼接点处的副法向量的方向相同, 再结合式(30)和式(31)可知向量 $\boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1)$ 、 $\boldsymbol{C}''_1(1, \lambda_1)$ 、 $\boldsymbol{C}'_2(0, \lambda_2)$ 、 $\boldsymbol{C}''_2(0, \lambda_2)$ 共面, 从而由式(30) 即可得

$$\boldsymbol{C}''_1(1, \lambda_1) = c \boldsymbol{C}''_2(0, \lambda_2) + d \boldsymbol{C}'_2(0, \lambda_2) \tag{32}$$

式中, $c > 0$ 为未知待求常数。

然后, 将曲线 $\boldsymbol{C}_1(t, \lambda_1)$ 和 $\boldsymbol{C}_2(t, \lambda_2)$ 的曲率分别记 $\kappa_1(1, \lambda_1)$ 和 $\kappa_2(0, \lambda_2)$, 且有

$$\begin{cases} \kappa_1(1, \lambda_1) = \frac{|\boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1) \times \boldsymbol{C}''_1(1, \lambda_1)|}{|\boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1)|^3} \\ \kappa_2(0, \lambda_2) = \frac{|\boldsymbol{C}'_2(0, \lambda_2) \times \boldsymbol{C}''_2(0, \lambda_2)|}{|\boldsymbol{C}'_2(0, \lambda_2)|^3} \end{cases} \tag{33}$$

根据式(30)、(32)和(33), 可将 $\boldsymbol{C}_2(t, \lambda_2)$ 的曲率 $\kappa_2(0, \lambda_2)$ 转换为

$$\begin{aligned} \kappa_2(0, \lambda_2) &= \frac{|\boldsymbol{C}'_2(0, \lambda_2) \times \boldsymbol{C}''_2(0, \lambda_2)|}{|\boldsymbol{C}'_2(0, \lambda_2)|^3} = \\ &= \frac{\left| \frac{1}{\alpha} \boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1) \times \left[\frac{1}{c} \boldsymbol{C}''_1(1, \lambda_1) - \frac{d}{c\alpha} \boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1) \right] \right|}{\left| \frac{1}{\alpha} \boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1) \right|^3} = \\ &= \frac{\alpha^2 |\boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1) \times \boldsymbol{C}''_1(1, \lambda_1)|}{c |\boldsymbol{C}'_1(1, \lambda_1)|^3} \end{aligned} \tag{34}$$

又因为 G^2 连续要求曲线 $\boldsymbol{C}_1(t, \lambda_1)$ 和 $\boldsymbol{C}_2(t, \lambda_2)$ 在拼接处的曲率相等, 即 $\kappa_1(1, \lambda_1) = \kappa_2(0, \lambda_2)$, 从而结合式(33)和式(34)可计算出 $c = \alpha^2$ 。将 c 代入式(32) 可得

$$\boldsymbol{C}''_1(1, \lambda_1) = \alpha^2 \boldsymbol{C}''_2(0, \lambda_2) + d \boldsymbol{C}'_2(0, \lambda_2) \tag{35}$$

式中, α 取值与式(23)中同值。

最后, 根据定理 1 中 λ -Bézier 曲线的端点性质计算 $\boldsymbol{C}_1(t, \lambda_1)$ 和 $\boldsymbol{C}_2(t, \lambda_2)$ 的各阶切矢, 并代入式(35) 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{2,2} &= \frac{-10\lambda_1 + (4\lambda_1 - 1)n + n^2}{\alpha^2[-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2]} \boldsymbol{P}_{n-2,1} + \\ &\quad \left\{ \frac{\alpha[8\lambda_1 + (2-8\lambda_1)n - 2n^2] + d(n+2\lambda_1)}{\alpha^3[-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2]} + \right. \\ &\quad \left. \frac{8\lambda_2 + (2-8\lambda_2)m + m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)} \right\} \boldsymbol{P}_{n-1,1} + \\ &\quad \left\{ \frac{\alpha[2\lambda_1 + (4\lambda_1 - 1)n + n^2] - d(n+2\lambda_1)}{\alpha^3[-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2]} - \right. \\ &\quad \left. \frac{2\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{8\lambda_2 + (2-8\lambda_2)m + m^2}{-10\lambda_2 + (4\lambda_2 - 1)m + m^2} \left[1 + \frac{n+2\lambda_1}{\alpha(m+2\lambda_2)} \right] \right\} \boldsymbol{P}_{n,1} \end{aligned} \tag{36}$$

从而,式(36)和式(23)便构成两条 λ -Bézier 曲线光滑拼接的 G^2 连续条件,定理5得证。

3 曲线拼接的步骤与实例

3.1 曲线拼接的步骤

利用 λ -Bézier 曲线光滑拼接的连续条件及其优良 的形状可调性,能方便、灵活地设计各种造型复杂的 曲线。这里以 λ -Bézier 曲线的 G^2 光滑拼接为例, 其他情况拼接可类似讨论。根据定理5中的结论, 可知2条 λ -Bézier 曲线 G^2 光滑拼接的步骤为: ① 自由给定初始曲线 $C_1(t, \lambda_1)$ 的形状参数 λ_1 和 控制顶点 $P_{i,1}(i=0,1,\cdots,n)$ 。② 令 $P_{0,2}=P_{n,1}$,使 得 $C_1(t, \lambda_1)$ 和 $C_2(t, \lambda_2)$ 具有一个公共的拼接点,即 达到 G^0 连续。③ 给定形状参数 λ_2 、曲线的次数 m 以及常数 $\alpha>0$,然后由式(29)中的第2个等式计算 出曲线 $C_2(t, \lambda_2)$ 的第2个控制顶点 $P_{1,2}$ 。④ 在步 骤(2)、(3)的基础上,再由式(29)中的第3个等式 计算出曲线 $C_2(t, \lambda_2)$ 的第3个控制顶点 $P_{2,2}$ 。⑤ 自由给定曲线 $C_2(t, \lambda_2)$ 剩余的 $m-2$ 个控制顶 点 $P_{j,m}(j=3,4,\cdots,m)$,即可实现两相邻曲线 $C_1(t, \lambda_1)$ 和 $C_2(t, \lambda_2)$ 间的 G^2 光滑拼接。

显然,反复使用上述曲线的拼接步骤,可实现多 条 λ -Bézier 曲线间的 G^2 光滑拼接,此外还可类似给出 曲线间 C^1 、 C^2 、 G^1 光滑拼接的步骤,这里不再赘述。

3.2 曲线拼接的实例

为了更好地说明本文的结论,给出一些3次 λ -Bézier 曲线、4次 λ -Bézier 曲线和5次 λ -Bézier 曲线 间相互 C^1 、 C^2 、 G^1 、 G^2 光滑拼接的造型实例。图2 给出了一个苹果曲线图形造型实例。图2中,苹果图 形是由2条4次 λ -Bézier 曲线和2条3次 λ -Bézier 曲线 C^1 光滑拼接而成的(采用不同颜色的曲线区 分),两侧蓝色曲线为3次 λ -Bézier 曲线,上下红色 曲线为4次 λ -Bézier 曲线。其中,绘制3次和4次 λ -Bézier 曲线时使用的 Bernstein-like 基函数 $b_{i,3}(t, \lambda)$ ($i=0,1,2,3$)和 $b_{j,4}(t, \lambda)$ ($j=0,1,2,3,4$)分别为

$$\begin{cases} b_{0,3}(t, \lambda) = (1-t)^3(1-2\lambda t + \lambda t^2) \\ b_{1,3}(t, \lambda) = t(1-t)^2(3+2\lambda-4\lambda t + 3\lambda t^2) \\ b_{2,3}(t, \lambda) = t^2(1-t)(3+\lambda-2\lambda t + 3\lambda t^2) \\ b_{3,3}(t, \lambda) = t^3(1-\lambda + \lambda t^2) \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} b_{0,4}(t, \lambda) = (1-t)^4(1-2\lambda t + \lambda t^2) \\ b_{1,4}(t, \lambda) = t(1-t)^3(4+2\lambda-6\lambda t + 4\lambda t^2) \\ b_{2,4}(t, \lambda) = t^2(1-t)^2(6+3\lambda-6\lambda t + 6\lambda t^2) \\ b_{3,4}(t, \lambda) = t^3(1-t)(4-2\lambda t + 4\lambda t^2) \\ b_{4,4}(t, \lambda) = t^4(1-\lambda + \lambda t^2) \end{cases} \quad (38)$$

式中, Bernstein-like 基函数可由式(2)和式(5)计算 得到。

图3给出了一个2条 λ -Bézier 曲线间 C^2 光 滑拼接的实例。图3中,组合曲线是由1条3次 λ -Bézier 曲线(红色曲线)和1条4次 λ -Bézier 曲 线(蓝色曲线) C^2 光滑拼接而成,而虚折线均表示 λ -Bézier 曲线的控制多边形,圆点表示曲线 的控制顶点、黑实圆点表示曲线公共的拼接点。 从图2、图3中的拼接效果来看,拼接曲线在公 共连接点处过渡自然、光滑,达到了较好的拼接 效果。

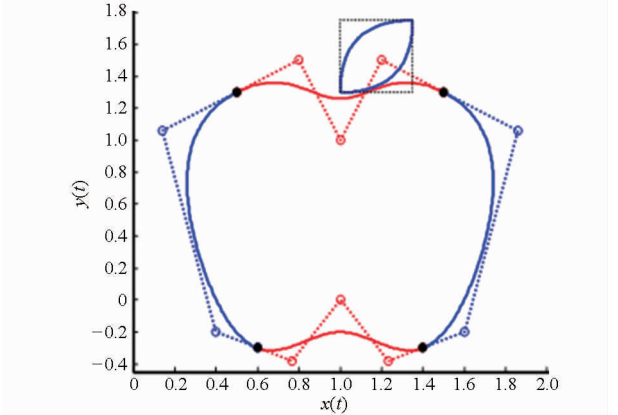


图2 苹果图形的设计实例

Fig.2 Designed curve of apple

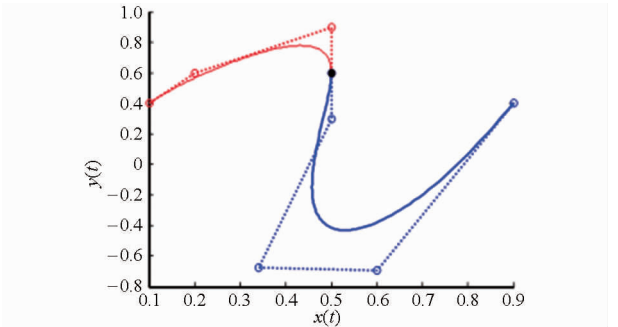


图3 λ -Bézier 曲线 C^2 拼接的实例

Fig.3 C^2 continuity condition between two adjacent λ -Bézier curves

图4给出了一个3条 λ -Bézier 曲线间 G^1 光 滑拼接的实例。图4中,组合曲线是由1条3次 λ -Bézier 曲线(红色曲线)、1条4次 λ -Bézier 曲 线(蓝色曲线)和1条5次 λ -Bézier 曲线(黑色曲 线) G^1 光滑拼接而成。而图5则给出了一个2条 λ -Bézier 曲线间 G^2 光滑拼接的实例,图中组合 曲线是由1条3次 λ -Bézier 曲线(红色曲线)和 1条5次 λ -Bézier 曲线(蓝色曲线) G^2 光滑拼 接而成。图4、图5中,虚折线和圆点所表示的含 意与图3相同,绘制5次 λ -Bézier 曲线时使用的 Bernstein-like 基函数 $b_{i,5}(t, \lambda)$ ($i=0,1,2,3,4, 5$)的取值为

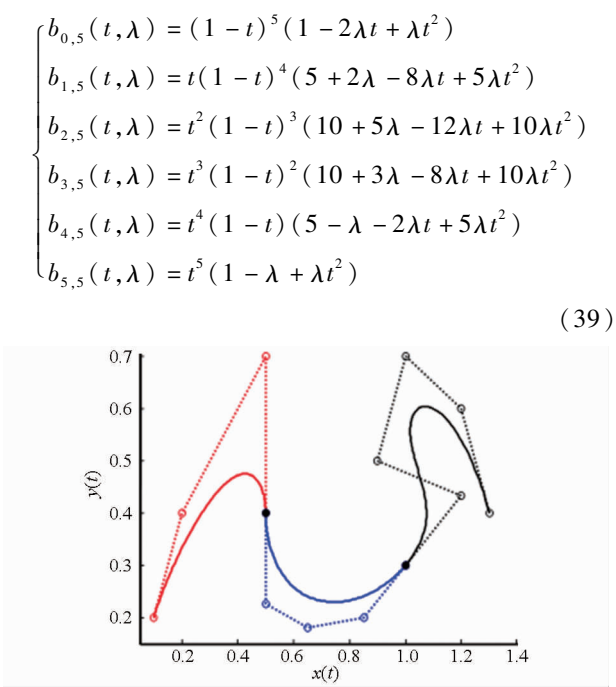


图 4 λ -Bézier 曲线 G^1 拼接的实例

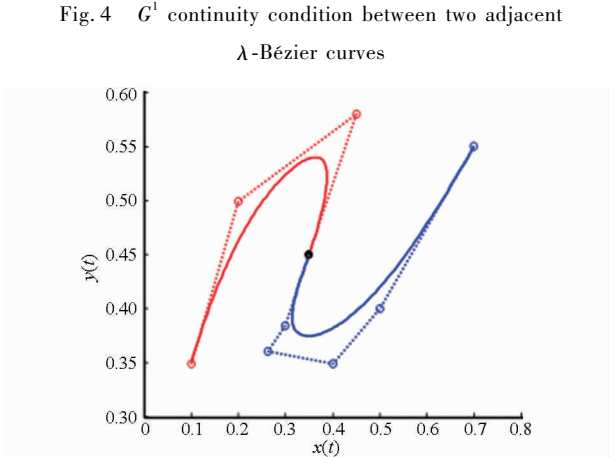


图 5 λ -Bézier 曲线 G^2 拼接的实例

Fig. 4 G^1 continuity condition between two adjacent λ -Bézier curves

Fig. 5 G^2 continuity condition between two adjacent λ -Bézier curves

3.3 曲线拼接后的形状调整

相对于传统 Bézier 曲线的拼接,本文方法的优点是:除了可以改变曲线的控制顶点外,还可以通过修改曲线形状参数来调整组合曲线的整体或局部形状,同时不影响拼接曲线的平滑程度。根据定理 1 中的结论可知,修改 λ -Bézier 曲线的形状参数只会影响到曲线两端切矢量 $\mathbf{C}'(0,\lambda)$ 和 $\mathbf{C}'(1,\lambda)$ 的大小,而不会影响其切矢方向。所以, C^1 光滑拼接后的 λ -Bézier 组合曲线可以在不改变控制顶点的情况下,通过修改形状参数来调整自身的形状,但是此时组合曲线只能做整体形状调整,不能做局部形状调整。这是因为改变某一段曲线的形状参数,为了确保两相邻曲线在公共拼接点处满足 C^1 连续,与之相邻曲线的形状参数也必须随之改变(可按式(17)计算新的形状参数)。图 6 给出了图 2 中“苹果”组合

曲线的形状调整实例。图 6 中,实线表示形状调整前的原曲线(与图 2 中的曲线相同),虚线和点划线表示修改形状参数后的组合曲线。从图 6 中可以看出,由于组合曲线在形状调整时其控制顶点和整条曲线的 C^1 连续性始终保持不变,所以修改形状参数后组合曲线的整体形状发生了变化。

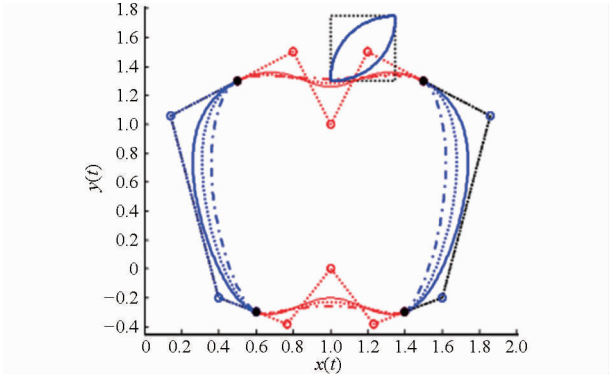


图 6 曲线 C^1 光滑拼接后的形状调整实例

Fig. 6 Shape modification of λ -Bézier curve with C^1 continuity condition

然而 G^1 光滑拼接后的 λ -Bézier 组合曲线,在不改变控制顶点和整条曲线的 G^1 连续性的情况下,也可以通过修改形状参数来调整自身的形状,但此时曲线即能做整体形状调整、又可以做局部形状调整。这是因为 G^1 连续的组合曲线只要求相邻曲线在公共拼接点处满足切矢方向相同,改变某一段曲线的形状参数并不会影响其端点的切矢方向。图 7 给出了图 4 中 G^1 光滑拼接组合曲线的形状调整实例。图 7 中,实线表示形状调整前的原曲线,虚线和点划线表示修改形状参数后的曲线,折线和圆点所表示的含意与图 4 相同。由图 7 可知, G^1 光滑拼接后的组合曲线具有灵活的局部形状可调性,改变单个形状参数只会影响某一段曲线的形状,组合曲线形状修改时具有较大的自由度但曲线整体光滑性较低。

对于 C^2 连续的 λ -Bézier 组合曲线,在不改变控制顶点和整条曲线的 C^2 连续性的情况下,通过修改形状参数无法对自身形状进行整体和局部形状调整。若在保持控制顶点不变条件下,修改形状参数来调整自身的形状,此时整条组合曲线的连续性会降低为 C^1 连续或 G^1 连续;但在保持整条曲线 C^2 连续的条件,可通过修改形状参数和控制顶点(按式(19)中的第 2、3 个等式来修改控制顶点)来实现组合曲线的局部或整体形状调整。图 8 给出了图 3 中 C^2 连续组合曲线的形状调整实例。图 8 中,实线、虚线和点划线以及折线和圆点所表示的含意与图 7 相同,星号点表示修改后的控制顶点。图 8a 中通过修改 4 次 λ -Bézier 曲线的形状参数和其 2 个控

制顶点,实现了组合曲线的局部形状调整;图 8b 中通过修改 3 次 λ -Bézier 曲线的形状参数和 4 次 λ -Bézier 曲线 2 个控制顶点,实现了组合曲线的整

体形状调整;图 8c 中通过分别修改 3 次和 4 次 λ -Bézier 曲线各自的形状参数以及 4 次 λ -Bézier 曲线 1 个控制顶点,实现了组合曲线的整体形状调整。

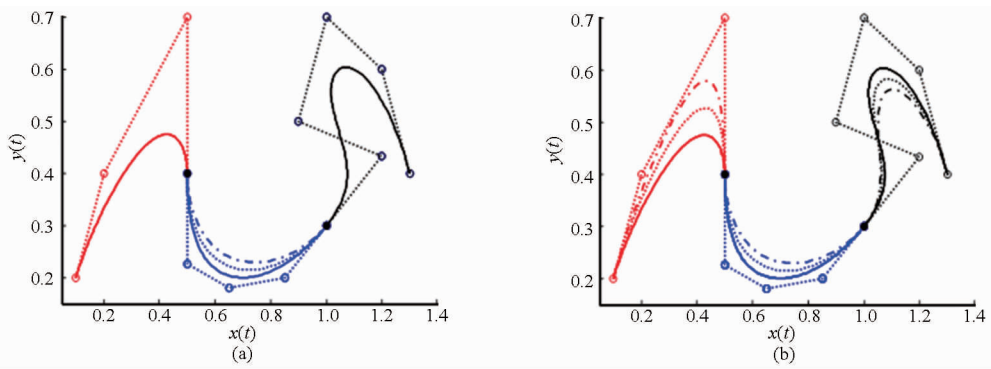


图 7 曲线 G^1 光滑拼接后的形状调整实例

Fig. 7 Shape modification of λ -Bézier curve with G^1 continuity condition

(a) G^1 连续组合曲线的局部形状调整 (b) G^1 连续组合曲线的整体形状调整

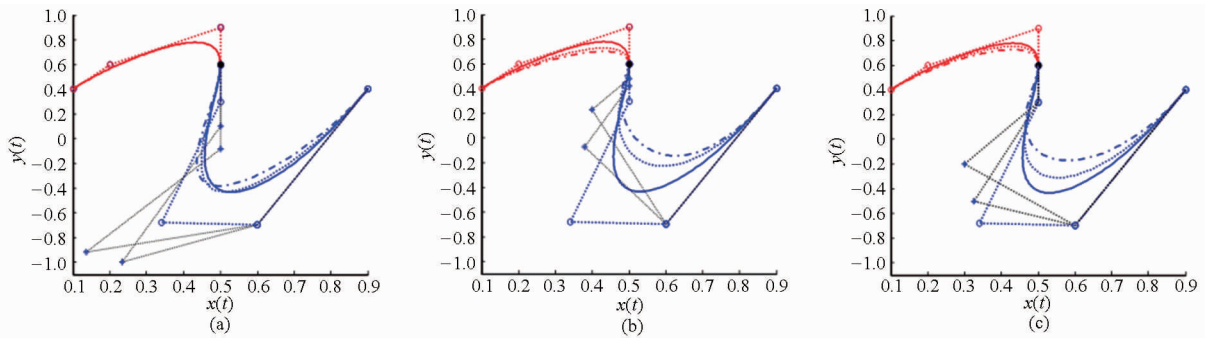


图 8 曲线 G^2 光滑拼接后的形状调整实例

Fig. 8 Shape modification of λ -Bézier curve with G^2 continuity condition

(a) 组合曲线局部形状调整 (b) 组合曲线整体形状调整(修改 1 个形状参数和 2 个顶点)

(c) 组合曲线整体形状调整(修改 2 个形状参数和 1 个顶点)

类似的有, G^2 连续的 λ -Bézier 组合曲线在不变其控制顶点和整条曲线的 G^2 连续性的情况下,仅仅修改形状参数无法对自身形状进行整体和局部调整。若保持控制顶点不变,修改形状参数调整组合曲线形状时其整体光滑性会降低为 G^1 连续;若要保持整条曲线 G^2 连续性不变,可通过修改形状参数和

控制顶点(按式(29)来修改控制顶点)来实现组合曲线的局部或整体形状调整。图 9 给出了图 5 中 G^2 连续组合曲线的形状调整实例。图 9 中,实线、虚线和点划线以及折线和圆点所表示的含意与图 7 相同,星号点表示修改后的控制顶点。图 9a 中通过修改 5 次 λ -Bézier 曲线的形状参数和其 1 个控制顶

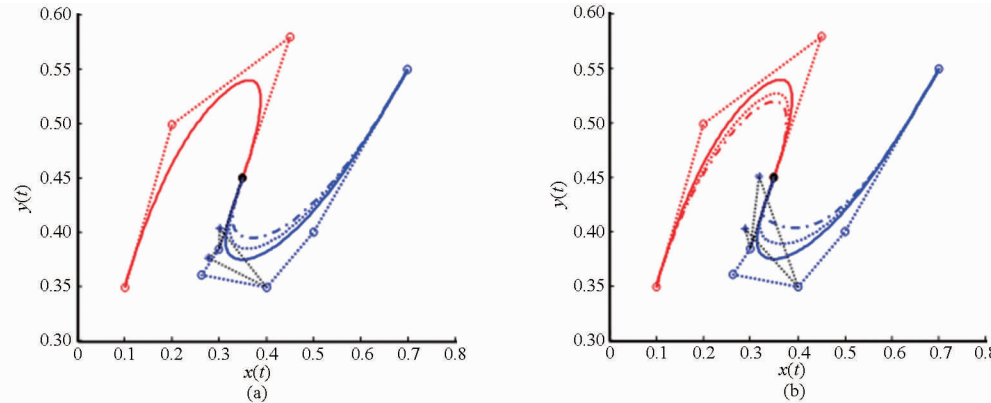


图 9 曲线 G^2 光滑拼接后的形状调整实例

Fig. 9 Shape modification of λ -Bézier curve with G^2 continuity condition

(a) G^2 连续组合曲线的局部形状调整 (b) G^2 连续组合曲线的整体形状调整

点,实现了组合曲线的局部形状调整;图 9b 中通过修改 3 次 λ -Bézier 曲线的形状参数和 5 次 λ -Bézier 曲线的 1 个控制顶点,实现了组合曲线的整体形状调整。

4 结束语

为了解决 n 次 λ -Bézier 曲线造型中复杂曲线的构造与形状调整问题,推导了两相邻 λ -Bézier 曲线

间 C^1 、 C^2 和 G^1 、 G^2 光滑拼接的连续性条件,并分析了形状参数对复杂曲线形状的影响规律,给出了曲线拼接的基本步骤。理论分析和造型实例表明,本文所得 λ -Bézier 曲线的拼接条件不仅直观有效、易实现,而且为工程复杂曲线的构造与外形设计提供了更多的自由度,可以用来构造多种不同光滑性的复杂曲线。

参 考 文 献

- 1 Farin G. Curves and surfaces for CAGD: a practical guide fifth edition[M]. San Diego: Academic Press, 2002: 227 – 238.
- 2 Mamar E. Shape preserving alternatives to the rational Bézier model[J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(1): 37 – 60.
- 3 Chen Q Y, Wang G Z. A class of Bézier-like curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 29 – 39.
- 4 Oruc H, Phillips G H. q -Bernstein polynomials and Bézier curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(1): 1 – 12.
- 5 丁敏,汪国昭. 基于三角和代数多项式的 T-Bézier 曲线[J]. 计算机学报, 2004, 27(8): 1021 – 1026.
Ding Min, Wang Guozhao. T-Bézier curves based on algebraic and trigonometric polynomials[J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(8): 1021 – 1026. (in Chinese)
- 6 Han Xuli. Cubic trigonometric polynomial curves with a shape parameter[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(6): 535 – 548.
- 7 Wang Guozhao, Yang Qinmin. Planar cubic hybrid hyperbolic polynomial curve and its shape classification [J]. Progress in Natural Science, 2004, 14(1): 41 – 46.
- 8 Zhang Jiwen, Frank L K, Zhang Huaiyu. Unifying C-curves and H-curves by extending the calculation to complex numbers[J]. Computer Aided Geometric Design, 2005, 22(9): 865 – 883.
- 9 檀结庆,王燕,李志明. 三次 H-Bézier 曲线的分割、拼接及其应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(5): 584 – 588.
Tan Jieqing, Wang Yan, Li Zhiming. Subdivision algorithm, connection and applications of cubic H-Bézier curves[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(5): 584 – 588. (in Chinese)
- 10 Han Xi'an, Ma Yichen, Huang Xili. The cubic trigonometric Bézier curve with two shape parameters[J]. Applied Mathematic Letters, 2009, 22(3): 226 – 231.
- 11 Han Xi'an, Huang Xili, Ma Yichen. Shape analysis of cubic trigonometric Bézier curves with a shape parameter [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(6): 2527 – 2533.
- 12 Rachid A, Yusuke S, Taishin N. Gelfond-Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2013, 30(2): 199 – 225.
- 13 Qin Xinqiang, Hu Gang, Yang Yang, et al. Construction of PH splines based on H-Bézier curves[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 238(6): 460 – 467.
- 14 Farin G. Class a Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(7): 573 – 581.
- 15 Han Xi'an, Ma Yichen, Huang Xili. A novel generalization of Bézier curve and surface[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217(1): 180 – 193.
- 16 Yang Lianqiang, Zeng Xiaoming. Bézier curves and surfaces with shape parameter [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2009, 86(7): 1253 – 1263.
- 17 Xiang Taining, Liu Zhi, Wang Weifeng, et al. A novel extension of Bézier curves and surfaces of the same degree[J]. Journal of Information & Computational Science, 2010, 7(10): 2080 – 2089.
- 18 Yan Lanlan, Liang Jiongfeng. An extension of the Bézier model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(6): 2863 – 2879.
- 19 Qin Xinqiang, Hu Gang, Zhang Nianjuan, et al. A novel extension to the polynomial basis functions describing Bézier curves and surfaces of degree n with multiple shape parameters[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 223(1): 1 – 16.
- 20 郭磊,吉晓民,胡钢. 基于四次带参 Bézier 曲线的汽车前脸造型设计[J]. 机械科学与技术, 2013, 32(9): 1327 – 1331.
Guo Lei, Ji Xiaomin, Hu Gang, et al. Automobile face design based on quartic Bézier curves[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2013, 32(9): 1327 – 1331. (in Chinese)
- 21 陈军,周联. 两类带两个形状参数的三角 Quasi-Bézier 曲面[J]. 农业机械学报, 2013, 44(6): 263 – 268.
Chen Jun, Zhou Lian. Two kinds of triangular Quasi-Bézier surfaces with two shape parameters[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(6): 263 – 268. (in Chinese)
- 22 Liang Janejing, Song Hui, Qu Boyang. Path planning based on dynamic multi-swarm particle swarm optimizer with crossover[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2012, 7390: 159 – 166.

- 14 杨通, 韩建友. 复合四位置刚体导引机构综合的研究[J]. 农业机械学报, 2011, 42(3): 203–207.
Yang Tong, Han Jianyou. Rigid-body guidance mechanism synthesis through four mixed positions[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(3): 203–207. (in Chinese)
- 15 Mirth J A, Chase T R. Circuit rectification for four precision position synthesis of four-bar and Watt six-bar linkages[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1995, 117(4): 612–619.
- 16 Mirth J A, Chase T R. Circuit rectification for four precision position synthesis of Stephenson six-bar linkages[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1995, 117(4): 644–646.
- 17 Wang Jun, Kwun L T, Xue Changyu. Discriminant method for mobility identification of single degree-of-freedom double-loop linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(5): 740–755.
- 18 Kwun L T, Xue Changyu, Wang Jun. Stretch rotation and complete mobility identification of Watt six-bar chains[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(10): 1877–1886.
- 19 Kwun L T, Wang Jun, Xue Changyu. Full rotatability and singularity of six-bar and geared five-bar linkages[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2010, 2(1): 011011.
- 20 Wang Jun, Kwun L T. Mobility identification of a group of single degree-of-freedom eight-bar linkages[C] // Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering Conference, 2010: 1739–1749.
- ~~~~~

(上接第 359 页)

- 23 Zhu Yuanpeng, Han Xuli. Curves and surfaces construction based on new basis with exponential functions[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2014, 129(1): 183–203.
- 24 Wu Beibei, Xie Jiqiang, Li Chunjing. A new extension of quadratic Bézier curves with multiple shape parameters[J]. Journal of Information & Computational Science, 2014, 11(9): 3219–3227.
- 25 Zhu Yuanpeng, Han Xuli, Liu Shengjun. Curve construction based on four $\alpha\beta$ -Bernstein-like basis functions[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 273(1): 160–181.
- 26 胡钢, 吉晓民, 郭磊. 四次带参广义 Bézier 曲面构造与光滑拼接技术[J]. 农业机械学报, 2014, 45(5): 315–321.
Hu Gang, Ji Xiaomin, Guo Lei. Quartic generalized Bézier surfaces with multiple shape parameters and its continuity conditions [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(5): 315–321. (in Chinese)
- 27 胡钢, 秦新强, 韩西安, 等. 拟三次 Bézier 曲线曲面的拼接技术[J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(11): 46–50, 60.
Hu Gang, Qin Xinqiang, Han Xi'an, et al. Continuity conditions for cubic quasi-Bézier curves and surfaces[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2010, 44(11): 46–50, 60. (in Chinese)
- 28 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 195–208.
- ~~~~~

(上接第 371 页)

- 15 Gosselin C, Angeles J. A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 1991, 113(3): 220–226.
- 16 张立杰. 两自由度并联机器人的性能分析及尺寸优化[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2006.
Zhang Lijie. The optimum design an performance criteria of 2-DOF parallel manipulators[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2006. (in Chinese)
- 17 邹冀华, 周万勇, 韩先国. 飞机装配中基于 3-RPS 的并联机构法向调整算法[J]. 中国机械工程, 2011, 22(5): 557–560.
Zou Jihua, Zhou Wanyong, Han Xianguo. Normal adjusting algorithm of a 3-RPS parallel mechanism in airplane assembly[J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(5): 557–560. (in Chinese)
- 18 唐国明, 梅涛. 一种用于无人驾驶汽车运动模拟的 3 自由度并联机构动力学建模[J]. 机械工程学报, 2011, 47(23): 74–81.
Tang Guoming, Mei Tao. Dynamic modeling of a three degrees of freedom parallel manipulator for motion simulation of unmanned vehicle[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(23): 74–81. (in Chinese)
- 19 Liu Xinjun, Wang Jinsong. A new methodology for optimal kinematic design of parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(9): 1210–1224.
- 20 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 1 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.