doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.01.052

基于自适应邻域 Harris 算子的三维对象检索方法

刘洞波^{1,2} 肖 鹏1 屈喜龙1 张细政^{1,2}

(1. 湖南工程学院计算机与通信学院,湘潭 411104; 2. 湖南工程学院风电装备与电能变换协同创新中心,湘潭 411104)

摘要:针对三维对象检索过程中在对象旋转、灰度改变等复杂情况下检索精度不高的问题,提出一种三维对象检索 方法。将 Harris 算子扩展运用到三维对象,自适应地确定顶点的邻域大小,然后根据 Harris 函数响应值选取兴趣 点。利用兴趣点构建三维对象具有全局形状特征的距离直方图,将距离直方图作为三维形状的描述符进行检索。 实验结果验证了算法的有效性,提高了检索的查全率和查准率。

关键词:三维对象 检索 Harris 兴趣点 距离直方图

中图分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2015)01-0373-06

3-D Object Retrieval Method Based on Adaptive Neighborhood Harris Operator

Liu Dongbo^{1,2} Xiao Peng¹ Qu Xilong¹ Zhang Xizheng^{1,2}

(1. College of Computer and Communication, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411104, China

2. CIC of Wind Power Equipment and Energy Conversion, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411104, China)

Abstract: The detection, characterization, and matching of various 3-D features from visual observations is important for a large variety of applications such as modeling, tracking, recognition or indexing. The existing methods detect features by using either photometric information available with geometric information available with 3-D surfaces. To deal with the low retrieval accuracy problem in complex situation of 3-D objects retrieval, such as 3-D objects rotation and brightness changing, and a 3-D objects retrieval method was proposed. The Harris operator was extended the use of 3-D objects, and an adaptive technique was proposed to determine the neighborhood of a vertex. Then the significant interest points were chosen with the Harris response function value. To construct the global shape features distance histogram of 3-D objects with interest points, the distance histogram was used as the 3-D shape descriptor for 3-D object retrieval. Extensive experimental results demonstrated that the proposed method was robust to affine transformations and distortion transformation such as noise addition. Moreover, the distribution of interest points on the surface of an object remains similar in transformed objects, which is a desirable behavior in applications such as shape matching and object registration.

Key words: 3-D object Retrieval Harris Interest points Distance histogram

引言

基于形状特征的三维对象检索以描述对象的形 状特征为依据,从数据库中查找到具有指定特征或 内容的三维数据,实现三维对象的有效检索。典型 的基于三维形状分布检索算法有三维形状直方图方法^[1]和形状分布算法^[2]。三维对象中兴趣点通常 都处于视觉关注的重要部位,对于相似的三维对象, 其兴趣点在对象的空间分布上具有相似性,而且兴 趣点对应区域的局部特征也相似。对于三维对象兴

收稿日期: 2014-02-10 修回日期: 2014-05-05

^{*} 国家自然科学基金资助项目(61203019)、湖南省自然科学基金资助项目(14JJ7071、13JJ9022)和湖南省科技计划资助项目 (2013CK3029)

作者简介:刘洞波,副教授,博士,主要从事机器人定位、导航、地图构建和云计算研究,E-mail: ldbymh@163.com

趣点的检测算子大多数方法都是对图像检测算子的 扩展^[3-9]。

本文采用兴趣点间(而非对象表面任意两点 间)最小距离构成的距离直方图^[10]作为三维对 象的形状描述符,利用兴趣点周围的灰度变化描 述三维对象的局部特征,提出一种基于自适应邻 域 Harris 算子和距离直方图的三维对象的检索 方法。本文算法充分利用 Harris 角点提取均匀, 对旋转、灰度变化、噪声影响和视角变化不敏感 等特征,根据顶点周围结构自适应地决定顶点的 邻域大小。

1 三维对象兴趣点检测

Harris 和 Stephens 在 Moravec 算法的基础上提 出了一种特征点提取算子——Harris 算子^[11]。 Harris 算子计算简单,提取特征点均匀,对图像旋 转、灰度变化、噪声影响和视角变化不敏感。这种算 子受信号处理中自相关函数的启发,描述局部灰度 变化程度的自相关函数可表示为

$$E(u,v) = \sum_{x,y} w(x,y) (f(x+u,y+v) - f(x,y))^{2}$$
(1)

其中, u 和 v 分别为 x 和 y 方向上的平移量,f 为灰 度函数,w(x,y)是高斯窗口函数,以提高抗噪能力。 在式(1)中,通过 Taylor 展开式,用微分算子重新定 义灰度强度变化的公式,得到

$$E(u,v) \cong \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$
(2)

M是自相关函数 E(u,v)的近似 Hessian 矩阵

$$\boldsymbol{M}(x,y) = w(x,y) \otimes \begin{bmatrix} f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & f_y^2 \end{bmatrix}$$
(3)

设 λ_1 和 λ_2 分别是 *M* 的两个特征值,如果 λ_1 和 λ_2 都很小说明局部自相关函数很平坦,如果 λ_1 和 λ_2 相差很大则处于图像的边缘区域,如果 λ_1 和 λ_2 都比较大且为基本相等的正数则该处存在角点。 由此,定义角点的响应函数

$$R_{\text{Harris}} = \det \boldsymbol{M} - k(\text{ trace } \boldsymbol{M})^2 \qquad (4)$$

其中 det *M* 表示矩阵的行列式值,且 det $M = \lambda_1 \lambda_2$, trace *M* 表示矩阵的迹且 trace $M = \lambda_1 + \lambda_2, k$ 是经验 常数,通常取 0.04。det *M* 在边缘处较小而在角点 处较大,trace *M* 在边缘和角点处保持一致。因此, 当 R_{Harris} 值为局部最大时即为角点。

Harris 算子已经广泛运用到图像处理或计算机 视觉中,然而,三维数据的拓扑随机性很大,不容易 计算 Harris 算子值,本文提出一种鲁棒的三维对象 兴趣点检测方法^[12-14]。

1.1 鲁棒的三维对象 Harris 算子

三维对象是由一系列的顶点和顶点相连的面构 成的。给定一个三维对象的顶点,即可计算该点的 Harris 算子值^[15]。

设顶点 v 为待分析顶点, V_k(v) 为围绕顶点 v 的 分布于 k 个环上的邻域点集。如图 1 所示, 所有这 些点构成了 V 的邻域点集 V_k(v)。



图 1 顶点 v 及相应邻域点集

Fig. 1 Vertex v and the corresponding neighborhood set

为了减少进一步分析的计算工作量,计算出 V_k(v)的质心并且变换坐标系使得质心和三维坐标 系的原点重合。应用主分量分析法分析点集,选择 具有最小向量特征值的向量作为拟合平面法线,使 用最小二乘法将转换后的点集拟合成二次曲面

$$z = f(x, y) = p_1 x^2 + p_2 xy + p_3 y^2 + p_4 x + p_5 y + p_6$$
(5)

式(5)中包含6个未知系数,只要具备6组以上满 足条件的坐标值就可以求得6个系数。对 v 点求 导,即对函数 f(x,y)在原点处进行求导

$$f_{x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0}$$
(6)

$$f_{y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}$$
(7)

式(6)、(7)会受到噪声的影响,采用高斯窗口函数 以提高抗噪能力

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \iint e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} f_x(x,y)^2 dxdy \qquad (8)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \iint e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} f_y(x,y)^2 dxdy \qquad (9)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \iint e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} f_x(x,y) f_y(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad (10)$$

 σ 为高斯函数尺度参数。

将式(8)~(10)代入式(3),构造 v 点的相关矩 阵

$$\boldsymbol{M}(x,y) = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}$$
(11)

式(11)代入式(4)可求得顶点的响应函数值。

1.2 自适应邻域尺寸

在对象分割过程中,如果选择对象某点周围固定的环数作为邻域均匀分割对象,那么对象表面所 有分割得到的三角形几乎大小都相同,所有这些点 包含在一个中心点为 v、半径为 r 的球体内。然而, 这种按均匀面积的思想选取邻域的方法对于不规则 和复杂的模型不能充分近似邻域。对尖锐区域上的 点,如果其邻域选取过大,则其拟合函数会将尖锐特 征平滑掉;而对于平坦表面上的点,如果其邻域选取 较小,则拟合函数受噪声的影响会比较明显。

针对以上情况,本文提出一种对每个顶点给予 自适应邻域的方法,具体描述如下:

定义一个对象为G(V', E'),其中集合V'为顶点 集 $\{V\}$,E'为相邻点构成的边。给定一个顶点 $v, v \in$ V',围绕顶点v的k环是一个顶点集 $r_k(v)$,其中 $r_k(v)$ 包含的顶点到顶点v的最短路径长度为k,则

 $r_{k}(v) = \{ u \in V' \mid | \text{shortest_path}(v, u) \mid = k \}$ (12)

顶点 v 到 $r_k(v)$ 的最大距离定义成顶点 v 到 $r_k(v)$ 的距离,即

$$d_{r}(v, r_{k}(v)) = \max_{u \in r_{k}(v)} ||v - u||_{2}$$
(13)

最后,定义顶点 V 的邻域尺寸

 $r_{v} = \{k \in \mathbf{N}, d_{r}(v, r_{k-1}(v)) < \delta \coprod d_{r}(v, r_{k}(v)) \ge \delta\}$ (14)

δ是对象边界矩形对角的一部分。

由此可见,即使顶点周围形状复杂或不规则,本 文所提出的方法也能根据边界矩形的大小确定顶点 相应的邻域。

此外,本文对每个邻域提供一个大致的范围,并 使用该信息不断应用高斯函数来计算 Harris 算子 值。高斯范围由参数 σ 控制, σ 定义为

$$\sigma_v = \frac{\delta}{r_v} \tag{15}$$

因此,每个顶点 v 计算 Harris 算子值时都有对 应的各自不同的高斯窗口,而高斯窗口决定对应的 邻域尺寸。

1.3 选择兴趣点

顶点的 Harris 响应值必须为局部极大值,即符 合条件

*R*_{Harris}(*v*) > *R*_{Harris}(*u*) (∀*u*∈*r*₁(*v*)) (16)
 每个顶点具有各自对应的 Harris 算子值,选择
 Harris 响应值为局部最大值的顶点作为兴趣点。根据实际应用选定兴趣点的阈值,Harris 响应值大于
 阈值的点选为兴趣点。

2 基于兴趣点的距离分布特征提取

文献[2]中提出了形状分布理论,其中距离构

成了其中的形状函数之一,本文构建一种距离直方 图,构建距离的方法与文献[2,8,10]不同,选择三 维模型表面 Harris 角点筛选出的兴趣点间的欧氏距 离进行量化后构建距离直方图。因为距离有平移和 旋转不变的性质,所以距离直方图也具有平移和缩 放不变性。另外,只要距离直方图的量化级数不变, 进行相同比例的缩放后距离直方图所表达的距离分 布也具有缩放不变性。故本文构造的距离直方图对 描述三维物体的平移、缩放和旋转等几何变换具有 不变性。

假设 v_i(i=1,2,…,L)是三维对象提取出的兴趣点,计算兴趣点 v_i与其他各兴趣点的距离,并把 其中对应的最小距离记为 d_i(i=1,2,…,L),根据这 些最小距离的统计分布情况形成距离直方图。为了 保证距离直方图对目标尺度的不变性,对最小距离 进行归一化处理,距离归一化公式为

$$d_{\text{norm}}(i) = \lceil \frac{d_i}{d_{\text{max}}} \times G \rceil$$
(17)

其中, d_{max} 是 d_i 的最大值,G是距离直方图的距离量 化级数, $d_{norm}(i) \in [1,G]$,距离直方图的定义为

dist_hist(
$$d_{\text{norm}}(i)$$
) = $\frac{\text{num}(d_{\text{norm}}(i))}{L}$ (18)

其中, $i = 1, 2, \dots, G$, num($d_{norm}(i)$)表示最小距离量 化后属于距离直方图对应的量化级 $d_{norm}(i)$ 的个数, L是统计的最小距离的总个数。

$$\sum_{i=1}^{6} \operatorname{dist_hist}(d_{\operatorname{norm}}(i)) = 1$$
 (19)

距离直方图表示了兴趣点间距离的分布情况, 每个三维目标可用 *G* 维向量描述,该 *G* 维向量构成 了三维目标兴趣点空间关系的描述符。

3 相似性度量

直方图很好地描述了三维模型形状的统计学特征,直方图相似度是反映三维模型相似程度的一项 重要指标,主要包括顺序相似度和交叉相似度两大 类。顺序相似度由于运算简单迅速等而被较多地用 于匹配过程,顺序相似度主要包括 L_1 距离、 L_2 距离、 χ^2 统计和 KL 分歧等,但是顺序相似度忽略了栅格 的空间关系,因此计算结果不能很好地反映直方图 之间的距离。本文采用推土机距离(Earth mover's distance, EMD)算法^[16]计算直方图间的交叉相似 度,进行相似性度量。EMD 算法源于最优运输问 题,通过求解最小运输代价来计算两个向量的相似 度,充分利用了特征分布的紧凑性和灵活性,具有较 好的抗噪性和鲁棒性,其物理意义在于计算两个三 维模型之间转换所需要的最小工作量。设 P =

2015年

 $((p_1, w_{p_1}), \dots, (p_m, w_{p_m}))$ 和 **Q** = $((q_1, w_{q_1}), \dots, (q_n, w_{q_n}))$ 分别为待查询三维对象和数据库中三维 对象的向量, w 为分量权值, 寻找最佳路径 **F** 使得总 工作量最小, 总工作量表示为

WORK(
$$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{F}$$
) = $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}f_{ij}$ (20)

其中 $d_{ij} = d(p_i, q_j)$,为采用欧式距离等方法计算的 $p_i 和 q_j$ 之间的不相似性; f_{ij} 为 i, j之间的转移量, 式(20)满足限制

$$\begin{cases} f_{ij} \ge 0 & (1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \\ \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \le w_{p_i} & (1 \le i \le m) \\ \sum_{i=1}^{m} f_{ij} \le w_{q_j} & (1 \le j \le n) \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} = \min\left(\sum_{i=1}^{m} w_{p_i}, \sum_{j=1}^{n} w_{q_j}\right) \end{cases}$$

$$(21)$$

在解决运输问题求得最优路径 F 后, EMD 可定 义为

$$\text{EMD}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} f_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}}$$
(22)

EMD 能适用于不同维度间的距离计算,也适用 特征的局部匹配,比其他算法更健壮,运输的概念和 运输的最小代价更能符合特征中某一维特征仅和邻 近维度特征具有较显著相关性的匹配要求。

4 实验结果分析

4.1 兴趣点检测与距离直方图

为了验证本文算法的可行性,选取了多种模型 进行了测试,包括动物模型、交通工具、盆景、人体器 官、维修工具、日常用具等,这些模型均来自普林斯 顿形状基准数据库^[1]。图2给出了家兔三维对象不 同状态下的兴趣点提取结果。实验中对本文兴趣点 提取算法的旋转不变性、尺度不变性以及光照变化 对算法的影响进行了验证。

图 2a 中家兔三维对象可见投影面检测到 30 个 兴趣点,图 2b 中检测到 36 个兴趣点,图 2c 中检测 到 26 个兴趣点,图 2d 中检测到 24 个兴趣点。从实 验数据分析,兴趣点数目平均变化控制在 9.57% 以 内,算法对尺度变化比较敏感,也就是说同一模型尺 度产生变化后对其检索的影响比较大;检索对光照 变化最不敏感,同一模型在同等条件下改变光照的 强度对检索的结果影响最小。在旋转不变性方面, 由于本实验中旋转角度变化幅度在 18% 左右,而尺 度变化幅度和光照强度变化幅度在 9% 左右。旋转



角度变化幅度相对较大,造成了检测到的兴趣点净 增6个,净增数和尺度变化的情况相同,相对变化较 大。如果旋转角度变化幅度、比尺度变化幅度、光照 强度变化幅度三者接近,视角的变化对于检索结果 的影响介于尺度和光照变化之间,旋转角度变化引 起的检测点数目的变化也会相应减少。因此该算法 具有一定的鲁棒性。图3给出了对应的归一化后的 距离直方图。



图中量化等级分为 15 级,即 G = 15, L = 80, 式(18)中dist_hist(d_{norm}(i))对应图 3 纵坐标,d_{norm}(i) 对应图 3 横坐标。

4.2 检索实验

三维模型数据库采用普林斯顿大学形状分析小 组提供的标准测试数据库^[1],数据库中共有 907 个 模型。依据模型的功能和形状,将模型数据库人工 分类成 35 类,然后再进一步细分成 92 个小类。实 验采用检索的查全率-查准率曲线评价检索算法的 性能。

从每类模型中选取3个模型,共组成105次查询,取这105次检索结果精确度和检索率的平均值 作为算法的平均检索结果。图4a代表搜索目标的 模型,图4b~4e给出了实验数据库中与搜索目标最 相似的5个模型,匹配程度依次减弱,从检索结果可 知,同一种类模型的特征距离值较小,在检索结果中 排在相对靠前的位置,图4f为非同种类型模型。



Fig. 4 Search results between different models

本文与文献[1]的三维形状直方图方法和文 献[2]的形状分布算法进行了比较,图5给出了本 文算法同其他2种算法在查全率-查准率上的对比 曲线。文献[1]中形状直方图算法是将模型所在的 空间进行有效的分割,分割的离散单元对应着直方 图的维数,但是,这些特征描述三维模型之间的相似 性还不够强,不能充分表达拓扑信息和形状特征,检 索的准确性不稳定,比较适合对模型进行粗分类,建 立分类数据库。文献[2]从几何形状特征方面对形 状直方图进行了改进,提出了形状分布函数方法,将 三维模型的形状分布转换成为一个表达模型几何性 质的形状函数的概率分布,通过计算两个模型的形 似度,计算速度较快,但区分度不够,而且意义不明确。本文利用自适应邻域 Harris 算子选取的兴趣点构建三维对象全局形状特征的距离直方图,采用推 土机距离算法计算直方图间的交叉相似度,对模型的平移、旋转、缩放等具有较好的不变性,对模型边 界一些小的扰动具有较好的鲁棒性,取得了比文 献[1]和文献[2]更好的查全率-查准率。



5 结束语

给出了一种采用 Harris 算子和自适应邻域大小 的方法获取三维对象兴趣点,然后利用兴趣点之间 的最小距离分布图来描述一个三维对象的检索算 法。Harris 算子提取特征点均匀,对三维对象灰度 变化、噪声等影响不敏感;而距离直方图较好地捕捉 了三维对象的拓扑结构,检索效果有较大提高。实 验结果显示提高了查全率和查准率,验证了算法的 有效性。

参考文献

- 1 Shilane P, Min P, Kazhdan M. The princeton shape bench-mark [C] // Proceedings of Shape Modeling International 2004, 2004: 167-178.
- 2 Osada R, Funkhouser T, Chazelle B. Shape distributions [J]. ACM Transactions on Graphics, 2002, 21(4): 807-832.
- 3 Lowe D G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints [J]. International Journal of Computer Vision, 2004, 60(2): 91-110.
- 4 刘明烁,吴铁军. 一种基于关联规则的图像特征点匹配算法[J]. 传感技术学报, 2009,22(12):1737-1741. Liu Mingshuo, Wu Tiejun. An image feature matching algorithm based on association rules[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2009,22(12):1737-1741. (in Chinese)
- 5 Castellani U, Cristani M, Fantoni S, et al. Sparse points matching by combining 3-D mesh saliency with statistical descriptors [J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(2):643-652.
- 6 Zaharescu A, Boyer E, Varanasi K, et al. Surface feature detection and description with applications to mesh matching [C] // Proceedings IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition CVPR '09, 2009: 373 - 380.
- 7 杨恒,王庆. 一种新的局部不变特征检测和描述算法[J]. 计算机学报,2010,33(5):935-944. Yang Heng, Wang Qing. A novel local invariant feature detection and description algorithm[J]. Chinese Journal of Computers, 2010, 33(5):935-944. (in Chinese)
- 8 曹伟国,胡平,李华,等. 基于距离直方图的最优视点选择[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,2010,22(9):1515-1521. Cao Weiguo, Hu Ping, Li Hua, et al. Canonical viewpoint selection based on distance histogram[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2010,22(9):1515-1521. (in Chinese)
- 9 王洪申,张树生,张开兴,等. 基于法向分类的三维模型形状分布检索算法[J]. 计算机集成制造系统,2009,15(6):1187-1193.

Wang Hongshen, Zhang Shusheng, Zhang Kaixing, et al. Shape distributions retrieval algorithm of 3-D CAD models based on

normal direction [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2009,15(6):1187-1193. (in Chinese)

- 10 程涛,侯榆青,李明俐,等. 一种基于显著兴趣点的图像检索方法[J]. 计算机工程,2010,36(18):171-173.
 Cheng Tao, Hou Yuqing, Li Mingli, et al. Image retrieval method based on distinct interest points [J]. Computer Engineering, 2010,36(18):171-173. (in Chinese)
- 11 Harris C, Stephens M. A combined corner and edge detector [C] // Proceedings of the Fourth Alvey Vision Conference, 1988: 147-151.
- 12 司永胜,乔军,刘刚,等. 苹果采摘机器人果实识别与定位方法[J]. 农业机械学报, 2010, 41(9): 148-153. Si Yongsheng, Qiao Jun, Liu Gang, et al. Recognition and location of fruits for apple harvesting robot [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(9): 148-153. (in Chinese)
- 13 张旭堂,陈晓峰,蒋立军,等. 基于局部特征提取的棱柱类零件三维模型检索[J]. 计算机集成制造系统,2012,18(3):458-466. Zhang Xutang, Chen Xiaofeng, Jiang Lijun, et al. Prismatic parts 3-D model retrieval based on local shape features extraction [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2012,18(3):458-466. (in Chinese)
- 14 张开兴,张树生,刘贤喜. 三维 CAD 模型检索技术研究现状与发展分析[J]. 农业机械学报, 2013, 44(7): 256-264. Zhan Kaixing, Zhang Shusheng, Liu Xianxi. Current research and future development of 3-D CAD model retrieval [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(7): 256-264. (in Chinese)
- 15 Ivan Sipiran, Benjamin Bustos. A robust 3-D interest points detector based on Harris operator [C] // Proceedings of Eurographics Workshop on 3-D Object Retrieval (3-DOR'10), 2010: 7 - 14.
- 16 Rubner Y, Tomasi C, Guibas L. The earth mover's distance as a metric for image retrieval [J]. International Journal of Computer Vision, 2000, 40(2): 99 - 121.

(上接第364页)

- 8 方宗德,吴序堂,乐兑谦.汽车变速箱齿轮的高强度优化设计[J].西安交通大学学报,1988,22(5):93-98. Fang Zongde, Wu Xutang, Le Duiqian. Optimal design for high strength of the gears in gearbox of automobile[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1988,22(5):93-98. (in Chinese)
- 9 杜海霞.圆柱齿轮减速器的最小体积优化设计[J].机械工程与自动化,2011,2(1):186-189.
 Du Haixia. Optimization design for the minimum volume of cylindrical gear reducer[J]. Mechanical Engineering & Automation, 2011,2(1):186-189. (in Chinese)
- 10 Luchko I I, Livdar V A. Calculation and design of sheets with a circular hole with equal strength reinforcement and with minimum mass[J]. Soviet Materials Science, 1989, 24 (4):415-418.
- 11 霍水泉,李人厚.多目标规划的惩罚函数法[J].西安交通大学学报,1993,27(3):75-80.
 Huo Shuiquan, Li Renhou. Penalty function method for multi-objective programming problems [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1993,27(3):75-80. (in Chinese)
- 12 明勇,郭军华,吴刚,等. 多级圆柱齿轮减速器等强度优化方法研究[J]. 后勤工程学院学报,2010,26(6):55-60.
 Ming Yong, Guo Junhua, Wu Gang, et al. Optimum research on equal stress intensity of multi-split standard cylindrical reducer
 [J]. Journal of Logistical Engineering University, 2010,26(6):55-60. (in Chinese)
- 13 唐进元,刘继凯,雷敦财.基于 Romax 与 Kisssoft 软件的齿形优化设计与分析[J]. 机械传动,2011,35(2):1-3. Tang Jinyuan, Liu Jikai, Lei Duncai. Optimization design and analysis of tooth profile based on Romax and Kisssoft software[J]. Journal of Mechanical Transmission,2011,35(2):1-3. (in Chinese)
- 14 张喜逢.轮边减速器齿轮疲劳寿命预测和均载性研究[D].长春:吉林大学,2012.
- 15 张涛,王克胜.应用 Miner 法则进行齿轮寿命的预测 [J]. 矿山机械,1994(5):23-26.