

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.08.045

# 含四杆闭链球面机构位置分析方法\*

杨随先<sup>1</sup> 刘艳芳<sup>2</sup> 孙 艳<sup>1</sup>

(1. 四川大学制造科学与工程学院, 成都 610065; 2. 东方电气集团, 成都 610036)

**摘要:** 提出了针对含四杆闭链的球面机构位置分析的方法。通过对机构进行结构单元拆分, 将其划分为四杆闭链球面机构与球面单开链(SOC)基本单元。基于球面环路方程建立了四杆闭链球面机构约束方程(组), 基于坐标变换和方向余弦矩阵法建立了球面单开链约束方程(组), 基于球面三角学建立了整个机构的耦合约束方程(组), 进而获得机构的约束方程组。提出的方法具有约束建立简便、消元求解容易、少增根的特点, 有利于获得机构位置分析的符号解或数字-符号解。

**关键词:** 四杆闭链球面机构 位置分析 单开链 球面环路方程 球面三角学

**中图分类号:** TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)08-0262-06

## Position Analysis of Spherical Mechanism with Four-bar Closed-loop Chains

Yang Suixian<sup>1</sup> Liu Yanfang<sup>2</sup> Sun Yan<sup>1</sup>

(1. School of Manufacturing Science and Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China

2. Dongfang Electric Co., Ltd., Chengdu 610036, China)

**Abstract:** A method of position analysis for spherical mechanisms with four-bar closed-loop chains was proposed. The mechanism was divided into a four-bar closed-loop mechanism and a single-opened-chain (SOC) unit. The constraint equation of the four-bar closed-loop was established with spherical loop equation. The constraint equation of SOC was set up with coordinate transformation and direction cosine matrix. The coupled constraint equation of whole mechanism was built up based on spherical trigonometry. The proposed method was simple to set up constraint, easy for elimination and less extraneous root, which was helpful to obtain symbolic solutions or figure-symbolic solutions.

**Key words:** Four-bar closed-loop spherical mechanism Position analysis Single-opened-chain Spherical loop equation Spherical trigonometry

### 引言

位置分析是机构运动学分析的最基本问题。建立机构的位置约束关系, 进行机构的位置正反求解, 不仅是为获得机构的运动学约束, 也是为进行机构的速度、加速度等分析打下基础, 也为机构的工作空间求解打下坚实的基础。长期以来, 位置分析都受到国内外学者的广泛关注, 并取得了系统的研究成果<sup>[1-5]</sup>。

对闭链球面机构的位置分析, 主要采用球面输

入输出(IO)方程<sup>[6-7]</sup>和球面环路方程<sup>[8]</sup>建立机构约束方程。文献[6~7]提出了基于IO方程的回路位置约束方法, 以单回路、二回路、三回路机构为研究对象, 阐述了其位置约束的建立过程。但是该方法所建立的约束方程次数较高, 难以消元化简。Javad Enferadi等<sup>[8]</sup>给出了一种具有双三角形的球面并联机器人的位置正解分析方法。该方法利用球面几何理论和罗德里格公式的特殊形式建立了2个耦合三角形方程, 采用Bezout消元法对耦合方程进行求解, 获得了关于输出位置变量的八次多项式。

收稿日期: 2012-12-12 修回日期: 2013-02-13

\* 国家自然科学基金资助项目(50975186)

作者简介: 杨随先, 教授, 博士, 主要从事机构学和产品的设计研究, E-mail: yangsx@163.com

文献[9]提出了球面环路方程在单回路机构位置分析上的应用,但尚未拓展至多回路机构。对于球面机构的研究目前主要集中在球面四杆机构和 3 自由度球面并联机构上<sup>[10~14]</sup>。

本文利用球面环路方程和方向余弦矩阵法,针对含四杆闭链的闭链球面机构,提出基于四杆闭链球面机构与球面单开链(SOC)支链的位置分析方法,分别对单回路、二回路和三回路机构进行研究,建立其位置约束方程组。

## 1 含四杆闭链球面机构位置分析方法步骤

对于含四杆闭链的球面机构的位置分析问题,可以通过对机构进行结构单元拆分,将其划分为四杆闭链与球面单开链(SOC)基本单元。在此基础上运用坐标变换、方向余弦矩阵和球面三角学分别建立各个单元位置约束方程(组)和机构耦合约束方程(组),从而建立整个机构的完整位置约束方程组。

具体方法是:基于球面环路方程建立闭链机构约束方程(组),基于坐标变换和方向余弦矩阵法建立球面单开链约束方程(组),基于球面三角学建立整个机构的耦合约束方程(组)。

记  $S_i = \sin\theta_i$ ;  $C_i = \cos\theta_i$ ;  $S_{ij} = \sin\alpha_{ij}$ ;  $C_{ij} = \cos\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$  为  $i, j$  两点所夹的球心角(即  $i, j$  两点间杆件的杆长)。  $S_i$  为运动副节点  $i$  的位置向量。

## 2 单回路球面四杆机构

图 1 为单回路球面四杆机构简图。建立如图 1 所示的坐标系  $OXYZ$ , 其中  $X$  轴垂直于  $OA, OB$  构成的平面,  $Z$  轴与轴  $OB$  重合,  $Y$  轴在  $OA, OB$  构成的平面内。四杆机构以  $AD$  杆为输入, 输入参考角为  $\theta_1$ , 以  $BC$  杆为输出, 输出参考角为  $\theta_2$ 。

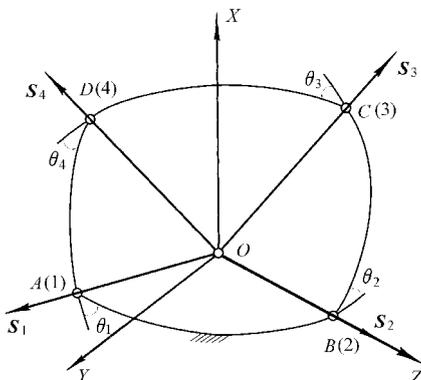


图 1 单回路球面四杆机构

Fig. 1 Single-loop spherical four-bar mechanism

根据球面三角学多边形回路方程<sup>[9]</sup>可得各矢量  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 的方向余弦分别为

$$S_1 = (0 \quad S_{12} \quad C_{12}) \quad (1)$$

$$S_2 = (0 \quad 0 \quad 1) \quad (2)$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} S_{23}S_2 \\ C_{12}C_{23} - S_{12}S_{23}C_2 \\ -S_{12}C_{23} - C_{12}S_{23}C_2 \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

$$S_4 = (S_{14}S_1 \quad C_{14} \quad S_{14}C_1) \quad (4)$$

机构约束方程为

$$S_3S_4 = C_{34} \quad (5)$$

将  $S_3, S_4$  代入式(5)并展开得球面四杆机构输入-输出方程,即

$$C_{12}C_{23}C_{14} - C_{34} - S_{12}S_{23}C_{14}C_2 - S_{12}C_{23}S_{14}C_1 - C_{12}S_{23}S_{14}C_1C_2 + S_{23}S_{14}S_1S_2 = 0 \quad (6)$$

令  $\tan\theta_2 = x_2$ , 则  $S_2 = 2x_2/(1+x_2^2)$ ,  $C_2 = (1-x_2^2)/(1+x_2^2)$ 。将  $S_2, C_2$  代入式(6)并化简,得球面四杆机构输入-输出方程

$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \quad (7)$$

其中

$$a = C_{12}C_{23}C_{14} - C_{34} - S_{12}C_{23}S_{14}C_1 + S_{12}S_{23}C_{14} + C_{12}S_{23}S_{14}C_1$$

$$b = 2S_{23}S_{14}S_1$$

$$c = C_{12}C_{23}C_{14} - C_{34} - S_{12}C_{23}S_{14}C_1 - S_{12}S_{23}C_{14} - C_{12}S_{23}S_{14}C_1$$

当给定机构的输入  $\theta_1$ , 由式(7)可求得机构的输出

$$\theta_2 = 2\arctan\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \quad (8)$$

与文献[7]中由 IO 方程式建立机构的约束方程相比,本文采用球面环路方程建立机构的约束方程结果更为简洁。IO 方程获得的是关于  $x_2^4$  的方程,而采用环路方程获得的是关于  $x_2^2$  的方程,减少了增根。

## 3 双回路球面机构

### (1) Stephenson-III 型球面机构

图 2 所示为 Stephenson-III 型球面机构,该机构可以分解为一个球面四杆机构  $ABCD$  和一个球面二杆组  $EFG$  两个结构单元。分别应用球面环路方程建立球面四杆机构的位置约束和球面二杆组的位置约束,再基于球面三角学建立起机构的平台耦合约束,进而可方便地建立 Stephenson-III 型球面机构的位置约束方程组。

建立如图 2 所示的坐标系。基础坐标系同单回路球面四杆机构坐标系,  $OXYZ$  的  $X$  轴垂直于  $(O, \alpha_{12})$  平面,  $Z$  轴与轴  $OB$  重合,  $Y$  轴在  $(O, \alpha_{12})$  平面内。二杆组分支坐标系  $OX_1Y_1Z_1$  的  $X_1$  轴垂直于  $(O, \alpha_{12})$  平面,  $Z_1$  轴与轴  $OE$  重合,  $Y_1$  按右手定则确定。

根据文献[15], 球面坐标系的定点变换可以分

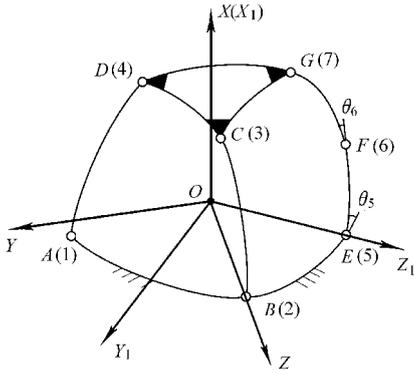


图2 Stephenson-III型球面机构

Fig.2 Stephenson-III spherical mechanism

别表示为绕自身  $X, Y, Z$  轴变换而得, 且绕  $X$  轴和  $Z$  轴的变换矩阵分别为

$$R(X, \alpha_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{ij} & -S_{ij} \\ 0 & S_{ij} & C_{ij} \end{bmatrix}$$

$$R(Z, \theta_i) = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 \\ S_i & C_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此, 基础坐标系  $OXYZ$  到分支坐标系  $OX_1Y_1Z_1$  的坐标变换为绕  $X$  轴逆时针旋转  $\alpha_{25}$ , 其变换矩阵为

$$R(X, \alpha_{25}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{25} & -S_{25} \\ 0 & S_{25} & C_{25} \end{bmatrix}$$

根据单回路四杆球面机构分析结果, 在基础坐标系  $OXYZ$  中向量  $S_1, S_2, S_3, S_4$  由式(1)~(4)给出, 且四杆球面机构的约束为

$$S_3 S_4 = C_{34} \quad (9)$$

根据位移旋转理论<sup>[10]</sup>, 在坐标系  $OX_1Y_1Z_1$  中向量  $S_7$  可表示为

$$S_7^T = R(Z, \theta_5) R(X, \alpha_{56}) R(Z, \theta_6) R(X, \alpha_{67}) [0 \ 0 \ 1]^T \quad (10)$$

则在坐标系  $OXYZ$  中向量  $S_7$  可表示为

$$S_7 = R(X, \alpha_{25}) S_7^T \quad (11)$$

Stephenson-III型球面机构为球面四杆机构分支与球面二杆组分支通过三角平台  $\Delta CDG$  耦合得到, 其耦合约束方程组可以通过球面三角形余弦公式建立

$$\begin{cases} S_3 S_7 = C_{37} \\ S_4 S_7 = C_{34} C_{37} - S_{34} S_{37} \cos \sigma \end{cases} \quad (12)$$

式(9)和(12)共同构成机构约束方程组。它们是关于变量  $\theta_1, \theta_2, \theta_5$  和  $\theta_6$  的方程组, 给定输入参数  $\theta_1$ , 可求解另外3个变量。

应用非线性方程组的结式消元算法 (Bezout 及 Sylvester 结式消元法), 对约束方程组(9)、(12)进

行消元化简可求解得到该机构的位置分析的数字——符号解。对比文献[6]给出的输入、输出方程的封闭式符号解, 对约束方程组运用半角公式

$$S_i = 2x_i / (1 + x_i^2) \quad C_i = (1 - x_i^2) / (1 + x_i^2)$$

对变量  $\theta_i (i = 1, 2, 5, 6)$  进行化简, 文献[6]的约束方程组的最高次项为  $x_1^4 x_2^4 x_6^4$ , 而本文所建立的约束方程组的最高次项为  $x_1^2 x_2^2 x_6^2$ 。由此可见, 本文方法比文献[6]建立约束方程组消元求解更简单、容易, 减少了增根的产生。

(2) 双四杆回路球面机构

图3所示为文献[7]中的双回路机构(四杆+四杆)。该机构可以划分为四杆回路  $ABCD$  与单开链  $EF$ , 通过  $\Delta CDF$  耦合得到。

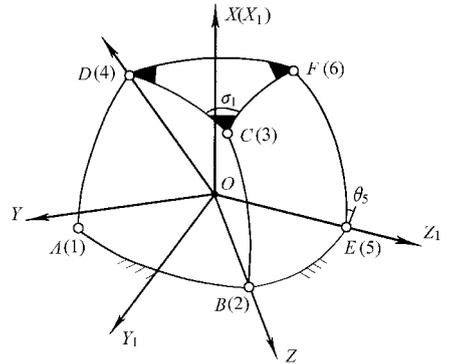


图3 双回路球面机构

Fig.3 Double-loop spherical four-bar mechanism

建立如图3所示的坐标系, 其中基础坐标系  $OXYZ$  的建立同单回路四杆球面机构, 分支坐标系  $OX_1Y_1Z_1$  的  $X_1$  轴垂直于  $(O, \alpha_{12})$  平面,  $Z_1$  轴与轴  $OE$  重合,  $Y_1$  按右手定则确定。

基础坐标系  $OXYZ$  到分支坐标系  $OX_1Y_1Z_1$  的坐标变换为绕  $X$  轴逆时针旋转  $\alpha_{25}$ , 其变换矩阵为

$$R(X, \alpha_{25}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{25} & -S_{25} \\ 0 & S_{25} & C_{25} \end{bmatrix}$$

在基础坐标系  $OXYZ$  中向量  $S_6$  表示为

$$S_6 = R(X, \alpha_{25}) R(Z, \theta_5) R(X, \alpha_{56}) [0 \ 0 \ 1]^T \quad (13)$$

在基础坐标系  $OXYZ$  中向量  $S_1, S_2, S_3, S_4$  由式(1)~(4)给出。

四杆回路分支约束方程为

$$S_3 S_4 = C_{34} \quad (14)$$

三角平台  $\Delta CDF$  的约束为

$$\begin{cases} S_3 S_6 = C_{36} \\ S_4 S_6 = C_{34} C_{36} - S_{34} S_{36} \cos \sigma_1 \end{cases} \quad (15)$$

式(14)、(15)共同构成机构的约束方程组。

将该约束方程组通过半角变换得到未知变量最

高次皆为 2 次的约束方程组, 而文献 [7] 所获得的 2 个约束方程组的最高次皆为 4 次。

### 4 三回路球面机构

#### (1) 四杆回路 + 二杆组 + 单开链球面机构

如图 4 所示, 这 2 个三回路机构均可以拆分为一个四杆回路  $ABCD$  与一个二杆组  $GHI$  和一个单开链  $EF$  的组合。

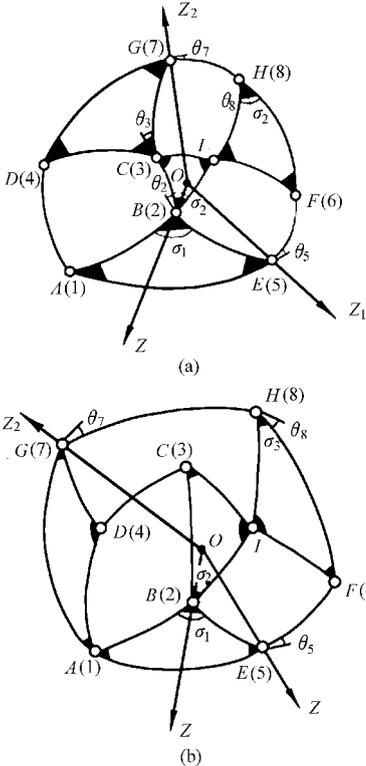


图 4 四杆回路 + 二杆组 + 单开链球面机构  
Fig. 4 Spherical mechanism with four-bar loop, two-bar and SOC

建立与前述单回路四杆球面机构相同的基础坐标系  $OXYZ$ , 单开链  $EF$  分支坐标系为  $OX_1Y_1Z_1$ , 二杆组  $GHI$  分支坐标系为  $OX_2Y_2Z_2$ 。

基础坐标系  $OXYZ$  到分支坐标系  $OX_1Y_1Z_1$  的坐标变换为绕  $X$  轴逆时针旋转  $\alpha_{25}$ , 其变换矩阵为

$$R(X, \alpha_{25}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{25} & -S_{25} \\ 0 & S_{25} & C_{25} \end{bmatrix}$$

基础坐标系  $OXYZ$  到分支坐标系  $OX_2Y_2Z_2$  的变换矩阵为

$$R_2^0 = R(Z, -\theta_2)R(X, \alpha_{23})R(Z, -\theta_3)R(X, \alpha_{37})$$

在坐标系  $OXYZ$  中向量  $S_1, S_2, S_3, S_4$  由式 (1) ~ (4) 给出。

四杆回路分支约束方程为

$$S_3S_4 = C_{34} \quad (16)$$

对于单开链  $EF$ , 在坐标系  $OXYZ$  中向量  $S_6$  表

示为

$$S_6 = R(X, \alpha_{25})R(Z, \theta_5)R(X, \alpha_{56})[0 \ 0 \ 1]^T \quad (17)$$

对于二杆组  $GHI$ , 在坐标系  $OXYZ$  中向量  $S_9$  表示为

$$S_9 = R_2^0R(Z, -\theta_7)R(X, -\alpha_{78}) \cdot R(Z, -\theta_8)R(X, -\alpha_{89})[0 \ 0 \ 1]^T \quad (18)$$

机构通过三角形约束进行耦合:

对  $\triangle ABE$ , 其约束方程组为

$$\begin{cases} S_2S_5 = C_{25} \\ S_1S_5 = C_{12}C_{25} - S_{12}S_{25}\cos\sigma_1 \end{cases} \quad (19)$$

对  $\triangle BCI$ , 其约束方程组为

$$\begin{cases} S_2S_9 = C_{29} \\ S_3S_9 = C_{23}C_{29} - S_{23}S_{29}\cos\sigma_2 \end{cases} \quad (20)$$

对  $\triangle FHI$ , 其约束方程组为

$$\begin{cases} S_6S_8 = C_{68} \\ S_6S_9 = C_{89}C_{68} - S_{89}S_{68}\cos\sigma_3 \end{cases} \quad (21)$$

式 (16)、(19)、(20) 和 (21) 共同构成机构的约束方程组。这一约束方程组可经非线性方程组的结式消元算法 (Bezout 及 Sylvester 结式消元法) 进行求解。

#### (2) 双四杆回路 + 单开链球面机构

对于图 5 所示的三回路球面机构, 可以将其拆分为: 四杆回路  $ABCD$ 、四杆回路  $EFGH$  和单开链  $CI$ 。

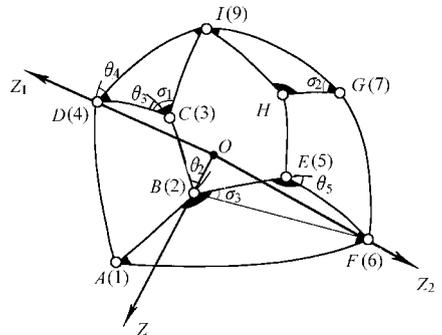


图 5 双四杆回路 + 单开链球面机构  
Fig. 5 Spherical mechanism with double four-bar loop and SOC

机构基础坐标系  $OXYZ$  与四杆回路  $ABCD$  分支坐标系重合, 建立方法同单回路四杆球面机构。单开链  $CI$  分支坐标系为  $OX_1Y_1Z_1$ , 四杆回路  $EFGH$  分支坐标系为  $OX_2Y_2Z_2$ 。基础坐标系  $OXYZ$  到分支坐标系  $OX_1Y_1Z_1$  的变换矩阵为

$$R_1^0 = R(Z, \theta_2)R(X, \alpha_{23})R(Z, \theta_3)R(X, \alpha_{34})$$

基础坐标系  $OXYZ$  到分支坐标系  $OX_2Y_2Z_2$  的变换矩阵为

$$R_2^0 = R(X, \alpha_{25})R(Z, -\theta_5)R(X, \alpha_{56})$$

对于单开链  $CI$ , 向量  $S_9$  在基础坐标系  $OXYZ$  中

可表示为

$$S_9 = R_1^0 R(Z, -\theta_4) R(X, \alpha_{49}) [0 \ 0 \ 1]^T \quad (22)$$

四杆回路  $ABCD$  的约束方程为

$$S_3 S_4 = C_{34} \quad (23)$$

式(23)中的  $S_3$ 、 $S_4$  由式(1)、(2)给出。

四杆回路  $EFGH$  的约束方程为

$$S_7 S_8 = C_{78} \quad (24)$$

式(24)中的  $S_7$ 、 $S_8$  由四杆回路  $EFGH$  的分支坐标系建立,并将其用变换矩阵  $R_2^0$  转换到基础坐标系  $OXYZ$ 。

该球面机构的三角形约束为

对  $\Delta CDI$ ,其约束方程组为

$$\begin{cases} S_3 S_9 = C_{39} \\ S_4 S_9 = C_{34} C_{39} - S_{34} S_{39} \cos \sigma_1 \end{cases} \quad (25)$$

对  $\Delta GHI$ ,其约束方程组为

$$\begin{cases} S_7 S_9 = C_{79} \\ S_8 S_9 = C_{78} C_{79} - S_{78} S_{79} \cos \sigma_2 \end{cases} \quad (26)$$

对  $\Delta BEF$ ,其约束方程组为

$$\begin{cases} S_2 S_6 = C_{26} \\ S_5 S_6 = C_{25} C_{26} - S_{25} S_{26} \cos \sigma_3 \end{cases} \quad (27)$$

方程(组)(23)~(27)共同构成该三回路球面机构的约束方程组。对此方程组进行消元求解即可获得机构位置分析问题的解。

文献[7]将图4a机构划分为3个四杆回路,将图4b和图5机构划分为2个四杆回路和1个五杆回路,分别建立各个回路之间的IO约束方程,再通过三角平台耦合建立回路之间的耦合约束方程。通过IO回路建立机构的回路约束方程比本文通过开链建立机构约束方程的过程要复杂,尤其是建立四杆以上的回路的IO约束方程次数很高,增加了消元求解的复杂度,难以求解获得机构的位置分析符号解或者数字-符号解。

## 5 实例

以图2所示的 Stephenson-III 型球面机构为例。假定机构参数为:  $\alpha_{12} = 135^\circ$ 、 $\alpha_{23} = 85^\circ$ 、 $\alpha_{34} = 70^\circ$ 、 $\alpha_{41} = 85^\circ$ 、 $\alpha_{25} = 135^\circ$ 、 $\alpha_{56} = 85^\circ$ 、 $\alpha_{67} = 75^\circ$ 、 $\alpha_{73} = 90^\circ$ ,机构的输入参数为  $\theta_1 = 60^\circ$ 。

由方程(1)~(4)得到向量  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 、 $S_4$ ,并代入方程(9)、(11)、(12),利用三角函数半角公式变换,得到机构约束方程组为

$$\begin{cases} a_{11} t_6^2 + b_{11} t_6 + c_{11} = 0 \\ a_{22} t_6^2 + b_{22} t_6 + c_{22} = 0 \\ a_{33} t_2^2 + b_{33} t_2 + c_{33} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad a_{11} &= a_1 t_5^2 + a_2 t_5 + a_3 & b_{11} &= a_4 t_5^2 + a_5 t_5 + a_6 \\ c_{11} &= a_7 t_5^2 + a_8 t_5 + a_9 & a_{22} &= b_1 t_5^2 + b_2 t_5 + b_3 \\ b_{22} &= b_4 t_5^2 + b_5 t_5 + b_6 & c_{22} &= b_7 t_5^2 + b_8 t_5 + b_9 \\ t_i &= \tan(\theta_i/2) \quad (i=1,2,5,6) \end{aligned}$$

$a_i$ 、 $b_i$  ( $i=1,2,\dots,9$ ) 和  $a_{33}$ 、 $b_{33}$ 、 $c_{33}$  是包含机构结构参数和输入参数  $\theta_1$  的常量。

由方程组(28)经消元运算得到机构位置正解方程为

$$\begin{aligned} d_1 t_5^8 + d_2 t_5^7 + d_3 t_5^6 + d_4 t_5^5 + d_5 t_5^4 + \\ d_6 t_5^3 + d_7 t_5^2 + d_8 t_5 + d_9 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

其中,  $d_1, d_2, \dots, d_8$  仅是  $t_2$  的函数,且

$$t_2 = \frac{-b_{33} \pm \sqrt{b_{33}^2 - 4a_{33}c_{33}}}{2a_{33}} \quad (30)$$

将机构结构参数代入式(29),经计算得到机构位置正解分析  $t_5$  的8个实数解,再利用  $\tan(\theta_5/2) = t_5$  求出关节转角  $\theta_5$  的8个解:  $-61.9333^\circ$ 、 $33.0641^\circ$ 、 $83.8408^\circ$ 、 $175.218^\circ$ 、 $-143.514^\circ$ 、 $-61.8061^\circ$ 、 $65.4665^\circ$ 、 $85.5319^\circ$ 。

关节转角  $\theta_6$  为

$$\theta_6 = \frac{a_{22} c_{11} - a_{11} c_{22}}{a_{11} b_{22} - a_{22} b_{11}} \quad (31)$$

## 6 结论

(1)提出了对于含四杆闭链的球面机构的位置分析的一般方法。通过对机构进行结构单元拆分,将其划分为四杆闭链与球面单开链(SOC)基本单元,基于球面环路方程建立四杆闭链球面机构约束方程(组),基于坐标变换和方向余弦阵法建立球面单开链约束方程(组),基于球面三角学建立整个机构的耦合约束方程(组)。

(2)应用本文方法分别对单回路球面机构、双回路球面机构和三回路球面机构的位置分析问题建立了机构约束方程(组),阐述了基于四杆闭链+SOC单开链的含四杆闭链球面机构的位置分析方法。通过与文献[6~7]结果的对比,表明本文所提出的方法具有约束建立简便、消元求解容易、少增根的特点,有利于获得机构位置分析的符号解或数字-符号解。

## 参 考 文 献

- 1 Roques J Saltaren, Jose M Sabater, Eugenio Yime, et al. Performance evaluation of spherical parallel platforms for humanoid robots[J]. Robotica, 2007, 25(3): 257~267.
- 2 Boyang Hong, Arthur G Erdman. Spherical linkage apparatus: US,6355048[P]. 2002-03-12.

- 3 Gosselin C M, Caron F. Two degree of freedom spherical orienting device; US,596691[P]. 1999-10-19.
- 4 Robert Y Dien, Ethan C Luce. Spherical robotic wrist joint; US,4628765[P]. 1986-12-16.
- 5 JoeBen Bevirt. Method and apparatus for providing an interface mechanism for a computer simulation; US,6705871[P]. 2004-03-16.
- 6 Hernandez S, Bai S P, Angeles J. The design of a chain of spherical Stephenson mechanisms for a gearless robotic pitch-roll wrist [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2006, 128(2): 422 ~ 429.
- 7 Charles W Wampler. Displacement analysis of spherical mechanisms having three or fewer loops [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 126(1): 93 ~ 100.
- 8 Javad Enferadi, Alireza Akbarzadeh Tootoonchi. A novel approach for forward position analysis of a double-triangle spherical parallel manipulator [J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2010, 29(3): 348 ~ 355.
- 9 黄真. 空间机构学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1991.
- 10 Murray A P, Larochelle P M. A classification scheme for planar 4R, spherical 4R, and spatial RCCC linkages to facilitate computer animation [C] // *Proceedings of 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences, DETC98/MECH-5887*, 1998.
- 11 Ruth D A, McCarthy J M. The design of spherical 4R linkages for four specified orientations [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, 34(7): 677 ~ 692.
- 12 Rasim I Alizade, Ozgur Kilit. Analytical synthesis of function generating spherical four-bar mechanism for the five precision points [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2005, 40(7): 863 ~ 878.
- 13 Wen-Tzong Lee, Kevin Russell, Qiong Shen, et al. On adjustable spherical four-bar motion generation for expanded prescribed positions [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(1): 247 ~ 254.
- 14 Shaoping Bai, Michael R Hansen, Jorge Angeles. A robust forward-displacement analysis of spherical parallel robots [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(12): 2 204 ~ 2 216.
- 15 张启先. 空间机构的分析与综合: 上册 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1984.

~~~~~

(上接第 261 页)

- 11 陈修龙, 冯伟明, 赵永生. 五自由度并联机器人机构动力学 [J]. *农业机械学报*, 2013, 44(1): 236 ~ 243.  
Chen Xiulong, Feng Weiming, Zhao Yongsheng. Dynamics model of 5-DOF parallel robot mechanism [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2013, 44(1): 236 ~ 243. (in Chinese)
- 12 Kong Xianwen, Clément M Gosselin. Type synthesis of 5-DOF parallel manipulators based on screw theory [J]. *Journal of Robotic Systems*, 2005, 22(10): 535 ~ 547.
- 13 Piccin O, Bayle B, Maurin B, et al. Kinematic modeling of a 5-DOF parallel mechanism for semi-spherical workspace [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(8): 1 485 ~ 1 496.
- 14 陈修龙, 贾帅帅, 邓昱. 高速空间并联式坐标测量机动力学优化设计 [J]. *农业机械学报*, 2012, 43(3): 213 ~ 218.  
Chen Xiulong, Jia Shuaishuai, Deng Yu. Dynamics optimization design of high-speed spatial parallel coordinate measuring machine [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2012, 43(3): 213 ~ 218. (in Chinese)
- 15 Lu Yi, Hu Bo. Unification and simplification of velocity/acceleration of limited-DOF parallel manipulators with linear active legs [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2008, 43(9): 1 112 ~ 1 128.