

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.02.042

具有解析式位置正解的三平移并联机构设计与分析

沈惠平¹ 曾博雄¹ 尤晶晶² 李菊¹ 许正骁¹ 杨廷力¹

(1. 常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016; 2. 南京林业大学机械电子工程学院, 南京 210037)

摘要: 具有解析式位置正解且部分运动解耦的并联机构, 对后续的误差分析、运动轨迹规划与控制、动力学分析等十分有利。根据基于方位特征(POC)方程的并联机构拓扑设计理论和方法, 设计一种仅由移动副和转动副组成的三平移(3T)并联机构, 它具有解析式位置正解、部分运动解耦性、大的操作工作空间等优点。首先, 分析计算了该机构的方位特征集、自由度、耦合度3个主要拓扑特性; 由于三平移的特殊方位特征约束, 尽管耦合度为1, 仍可直接求得机构的解析式位置正解, 而不必用一维搜索法求数值解; 根据导出的位置反解, 进一步分析了该机构发生奇异位形的条件、机构位置工作空间及其奇异性特征, 并对机构速度和加速度进行了计算及仿真分析。结果表明: 仿真曲线变化平稳、连续, 具有较好的动态特性。

关键词: 三平移; 位置正解; 运动解耦; 耦合度; 奇异位形; 工作空间

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2020)02-0383-09

OSID:



Topology Design and Analysis of Three-translation Parallel Mechanism with Analytical Direct Position Solutions

SHEN Huiping¹ ZENG Boxiong¹ YOU Jingjing² LI Ju¹ XU Zhengxiao¹ YANG Tingli¹

(1. Research Center of Modern Mechanism, Changzhou University, Changzhou 213016, China

2. College of Mechanical and Electromechanical Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

Abstract: The parallel mechanisms with analytical direct position solutions and partial motion decoupling are of great benefits to subsequent research such as error analysis, motion trajectory planning and control, dynamic performance analysis. According to the topological design theory and method of parallel mechanism (PM) based on position and orientation characteristic (POC) equations, a novel three-translation (3T) PM was designed, which consisted of prismatic joints and revolute joints, and had the advantages of analytical direct position solutions and partial motion decoupling property and larger workspace. Firstly, the main topological characteristics such as the POC, degree of freedom and coupling degree were calculated. Due to the special constraint feature of the three-translation, the analytical direct position solutions of the PM can be directly obtained without needing to use one-dimensional search method although its coupling degree equaled to one. Furthermore, the conditions of the singular configuration of the PM, and the singularity location in the workspace were analyzed according to the inverse kinematics, as well as the velocity and acceleration of the PM were calculated and simulated. The results showed that the simulation curve was changed smoothly and continuously, and it had good dynamic performance.

Key words: three-translation; direct position solutions; motion decoupling; coupling degree; singular configuration; workspace

0 引言

三自由度的三平移(3T)并联机器人机构驱动元件少、结构紧凑、设计制造及控制成本较低, 在工

程应用中得到了广泛应用。CLAVEL^[1]于1988年发明Delta 3-DOF 平移并联机构, 之后一些学者对Delta的衍生操作手进行了研究^[2-4]; TSAI等^[5-6]提出一种移动副驱动、支链含4R平行四边形机构的

收稿日期: 2019-07-09 修回日期: 2019-08-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(51975062, 51475050)和江苏省重点研发计划项目(BK20161192)

作者简介: 沈惠平(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事机器人机构学研究, E-mail: shp65@126.com

n ——支链条数

M_{Pa} ——机构动平台的 POC 集

取动平台 1 上的任一点为基点 O' , 则由式(1)

可得

$$M_{\text{HSOC}_1} =$$

$$\left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_{12}) \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_3) \\ r^1(\parallel R_3) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^2(\parallel (R_{12}, R_3)) \end{array} \right]$$

$$M_{\text{HSOC}_2} = \left[\begin{array}{c} t^1(\parallel P_3) \\ r^0 \end{array} \right] \cup_{i=1}^2 \left[\begin{array}{c} t^1(\parallel (R_{ai}R_{bi}R_{ci}R_{di})) \\ r^0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right]$$

由式(2)可确定动平台 POC 集为

$$M_{Pa} = M_{\text{HSOC}_1} \cap M_{\text{HSOC}_2} = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right]$$

由此表明: 动平台 1 上任一点的 POC 集为三平移零转动; 即机构中的混合支链 II 本身已实现三平移的设计要求, 是它约束了混合支链 I 末端构件的 2 个转动输出, 从而使得动平台仅产生三平移输出。

1.2.2 机构自由度计算

并联机构的全周 DOF 公式^[15-16]为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \quad (3)$$

$$\text{其中 } \xi_{L_j} = \dim. \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i} \right) \cup M_{b_{(j+1)}} \right\} \quad (4)$$

$$v = m - n + 1$$

式中 F ——机构自由度

f_i ——第 i 个运动副的自由度

v ——独立回路数

ξ_{L_j} ——第 j 个独立回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}$ ——前 j 条支链组成的子并联机构 POC 集

$M_{b_{(j+1)}}$ ——第 $j+1$ 条支链末端构件 POC 集

该机构包含两个独立回路, 具体为:

①混合支链 I 中 2P4R 平面机构为第 1 个独立回路, 即 $\text{LOOP}_1 \{ - (P_1^{2P4R}, P_2^{2P4R}) \perp R^{(2P4R)} - \}$ 。

显然, 其独立位移方程数 $\xi_{L_1} = 3$ 。

② $(R_3 \parallel R_4$ 和混合支链 II)与上述 2P4R 平面机构组成第 2 个独立回路, 即

$$\text{LOOP}_2 \{ - R_3 \parallel R_4 - P^{(4R)} - P^{(4R)} - P_3 - \}$$

由式(4)可得

$$\xi_{L_2} = \dim. \left\{ \left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_{12}) \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_3) \end{array} \right] \right\} =$$

$$\dim. \left\{ \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^2(\parallel (R_{12}, R_3)) \end{array} \right] \right\} = 5$$

由式(3)可得机构的自由度 F 为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{L_j} = (6 + 5) - (3 + 5) = 3$$

因此, 该机构自由度为 3, 当取静平台 0 上的移动副 P_1, P_2, P_3 为驱动副时, 动平台 1 可实现 3 个平移的运动输出。

1.2.3 机构耦合度 κ 计算

由基于序单开链 (SOC) 单元的机构组成原理^[15-16]知, 一个机构可以分解为若干个最小子运动链 (Sub-kinematic chain, SKC), 每个 SKC 仅包含一个基本运动链 BKC, 所谓 BKC 是指 DOF 为零且其任意一个子运动链 DOF 大于零的最小运动链; 而一个 SKC 又可分解为若干个单开链, 第 j 个单开链 SOC_j 的约束度定义为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3, \dots \end{cases} \quad (5)$$

式中 m_j ——第 j 个 SOC_j 的运动副数量

f_i ——第 i 个运动副的自由度

I_j ——第 j 个 SOC_j 的运动副数量

对一个 SKC 而言, 需满足

$$\sum_{j=1}^v \Delta_j = 0$$

因此, 其耦合度

$$\kappa = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (6)$$

κ 揭示了机构回路运动变量之间的关联、依赖程度; κ 越大, 机构的耦合性越强, 运动学、动力学分析复杂度越高。

1.2.2 节已计算出上述两个回路的独立位移方程数, 分别为 $\xi_{L_1} = 3, \xi_{L_2} = 5$; 因此, 两个回路的约束度由式(5)分别计算得

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L_1} = 6 - 2 - 3 = 1$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L_2} = 5 - 1 - 5 = -1$$

于是, 由式(6)得

$$\kappa = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = \frac{1}{2} (|1| + |-1|) = 1$$

这样, 该机构只包含一个 SKC, 且该 SKC 的 $\kappa = 1$; 一般情况下, 求解这类机构位置正解时, 仅需在约束度为正值 ($\Delta_j > 0$) 的回路上设定一个虚拟变量; 然后, 在约束度为负值 ($\Delta_j < 0$) 的回路上建立一个含这个虚拟变量的位置约束方程, 再通过一维搜索法可求出该虚拟变量的真实值, 从而求得该机构的位置正解。

但由于此机构特殊的三平移方位特征约束, 可直接通过约束度为负值 ($\Delta_j < 0$) 的回路作用于约束

度为正值($\Delta_j > 0$)的回路的几何约束(即:杆11的运动始终平行于静平台),求出该虚拟变量,从而直接求得机构的解析式位置正解。

2 机构位置分析

2.1 基于 SKC-SOC 的机构位置正解求解原理

由式(5)可知,每个 SKC 可分解为一系列约束度为正值、零、负值的回路,因此,机构位置正解的求解,可转换为该 SKC 内回路的位置求解,而3种回路的约束特性及其建模方法分别为:

(1)约束度为正值 SOC(Δ_j^+),会使机构自由度增加 Δ_j^+ ,为确定机构的运动,需在约束度为正值 SOC(Δ_j^+)上设定 Δ_j^+ 个虚拟变量($\Delta_j^+ = 1$),即可转换为约束度为零的 SOC(Δ_j^0),其运动具有确定性,其位置可求出。

(2)约束度为负值的 SOC(Δ_j^-),使机构自由度减少 $|\Delta_j^-|$,即对机构建立 $|\Delta_j^-|$ 个约束方程($|\Delta_j^-| = 1$)。

(3)因 SOC(Δ_j^+)中的虚拟变量数目 Δ_j^+ 恰等于约束方程数目 $|\Delta_j^-|$,且 $\Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = 1$,可用一维搜索法求得。但本例机构动平台1具有特殊的三平移方位特征,且使构件11的运动具有始终平行于静平台0的几何约束特征,因此,可直接求解出该虚拟变量,而不需要通过一维搜索法求解,这样简化了位置正解的求解过程;已证明,这种由特殊几何约束直接求解虚拟变量位置正解的方法,具有一般性^[24]。

2.2 坐标系的建立及参数标注

该机构的运动学建模如图2所示,设静平台0为长、宽分别为 $2a$ 、 $2b$ 的矩形,以静平台0的几何中心为原点,建立笛卡尔静坐标系 $OXYZ$, X 、 Y 轴分别垂直、平行于 A_1A_2 连线, Z 轴由右手法则确定;动坐标系 $O'X'Y'Z'$ 原点位于动平台1的中心, X' 、 Y' 轴分别重合、垂直于 D_2F_3 连线, Z' 轴由右手法则确定。

设3个驱动杆 F_3 的长度为 l_1 ,混合支链 I 上连杆9、10的长度为 l_2 ,中间杆11、12的长度分别为 l_3 、 l_4 。

混合支链 II 上平行四边形短杆3、6的长度为 l_5 ,长杆4、7的长度为 l_6 ;平行四边形之间的连接杆5的长度为 l_7 ,连接杆8的长度为 l_8 ;动平台1上 D_2F_3 连线的长度为 $2d$ 。

设 B_1C_1 与 Y 轴正向的夹角 γ 为虚拟变量; D_1D_2 、 D_3E_3 与 X 轴正向的夹角分别为 α 、 β 。

2.3 位置正解分析

该机构的位置正解求解归结为:已知静平台0上3个点 A_i ($i=1,2,3$) 移动位置 y_{A_1} 、 y_{A_2} 、 y_{A_3} ,求动

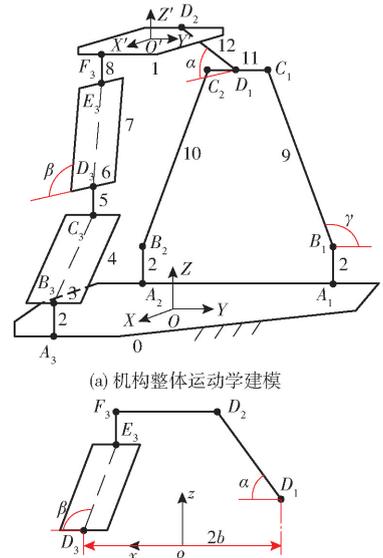


图2 3T机构的运动学建模

Fig. 2 Kinematic modeling of 3T PM

平台1上 O' 点的坐标 (x, y, z) 。

(1)约束度为正的 第1回路 (LOOP₁) 的求解

$$\text{LOOP}_1: A_1 - B_1 - C_1 - C_2 - B_2 - A_2$$

在静坐标系 $OXYZ$ 中,易知点 A_i 、 B_i ($i=1,2,3$) 的坐标分别为 $A_1 = (-b, y_{A_1}, 0)$ 、 $A_2 = (-b, y_{A_2}, 0)$ 、 $A_3 = (b, y_{A_3}, 0)$; $B_1 = (-b, y_{A_1}, l_1)$ 、 $B_2 = (-b, y_{A_2}, l_1)$ 、 $B_3 = (b, y_{A_3}, l_1)$ 。

由1.2.1节可知,由于动平台1三平移的特殊方位约束,机构运动过程中,2P4R平面机构的中间构件11始终平行于静平台0,即 $C_1C_2 \parallel A_1A_2$,则有

$$z_{C_1} = z_{C_2} \quad (7)$$

因此,点 C_1 、 C_2 的坐标分别为

$$C_1 = (-b, y_{A_1} + l_2 \cos \gamma, l_1 + l_2 \sin \gamma)$$

$$C_2 = (-b, y_{A_1} + l_2 \cos \gamma - l_3, l_1 + l_2 \sin \gamma)$$

由几何约束 $B_2C_2 = l_2$,并整理、简化有

$$AB \cos \gamma + B^2 = 0$$

当 $B=0$ 时,无法求出虚拟变量 γ 的值,此时,机构发生输出奇异,机构在运动过程中应当避免这种情况发生。

当 $B \neq 0$ 时,可求出虚拟变量 γ 的值,此时有

$$\gamma = \arccos \frac{\pm B}{A} \quad (8)$$

其中 $A = 2l_2$ $B = y_{A_1} - l_3 - y_{A_2}$

这样,约束度为负的第2回路作用于约束度为正的 第1回路上的特殊几何约束方程式(7),是直接求出虚拟变量 γ 解析解的关键,这是本机构拓扑结构具有的求出位置解析解的一个特点。 γ 求出后,机构第2回路上其余运动副的位置可容易求解。

(2) 约束度为负的第2回路(LOOP₂)的求解

LOOP₂: $D_1 - D_2 - F_3 - E_3 - D_3 - C_3 - B_3 - A_3$

由点 C_1, C_2 求出点 D_1, D_2 的坐标分别为

$$D_1 = (-b, y_{A_1} + l_2 \cos \gamma - l_3/2, l_1 + l_2 \sin \gamma)$$

$$D_2 = (-b + l_4 \cos \alpha, y_{A_1} + l_2 \cos \gamma - l_3/2, l_1 + l_2 \sin \gamma + l_4 \sin \alpha)$$

同时,可计算得 O' 点的坐标为

$$O' = (x, y, z) = (-b + l_4 \cos \alpha + d, y_{A_1} + l_2 \cos \gamma - l_3/2, l_1 + l_2 \sin \gamma + l_4 \sin \alpha) \quad (9)$$

进一步,点 F_3, E_3, D_3, C_3 的坐标用 O' 点的坐标分别表示为

$$\begin{cases} F_3 = (x + d, y, z) \\ E_3 = (x + d, y, z - l_8) \\ D_3 = (b, y, z - l_8 - l_6 \sin \beta) \\ C_3 = (b, y, z - l_8 - l_6 \sin \beta - l_7) \end{cases} \quad (10)$$

由几何约束 $B_3 C_3 = l_6$, 并令

$$l_4 \sin \alpha - l_6 \sin \beta = t \quad (11)$$

则有 $(H_1 + t)^2 - H_2 = 0$

解得 $t = -H_1 \pm \sqrt{H_2}$ (12)

其中 $H_1 = l_2 \sin \gamma - l_8 - l_7$ $H_2 = l_6^2 - (y_{C_3} - y_{B_3})^2$

由于机构运动时 2P4R 平面机构与平行四边形

①的运动平面始终平行,因此,恒有

$$y_{D_1} = y_{D_3} \quad (13)$$

$$l_4 \cos \alpha + 2d - l_6 \cos \beta = 2b \quad (14)$$

再从式(11)、(14)中消除 β , 则有

$$J_1 \sin \alpha + J_2 \cos \alpha + J_3 = 0$$

令 $k_1 = \tan \frac{\alpha}{2}$

解得 $\alpha = 2 \arctan \frac{J_1 \pm \sqrt{J_1^2 + J_2^2 - J_3^2}}{J_2 - J_3}$ (15)

其中 $J_1 = 2l_4 t$ $J_2 = 4l_4(b - d)$

$$J_3 = l_6^2 - l_4^2 - t^2 - 4(b - d)^2$$

最后,将式(8)、(15)所求得 γ, α 代入式(9),

即可得动平台1上 O' 点的坐标 (x, y, z) 。

由式(8)知

$$\gamma = f_1(y_{A_1}, y_{A_2})$$

由式(15)知

$$\alpha = f_2(y_{A_1}, y_{A_2}, y_{A_3})$$

因此,由式(9)知

$$\begin{cases} x = f'_1(y_{A_1}, y_{A_2}, y_{A_3}) \\ y = f'_2(y_{A_1}, y_{A_2}) \\ z = f'_3(y_{A_1}, y_{A_2}, y_{A_3}) \end{cases}$$

即该机构具有部分输入-输出运动解耦性,这对动平台的轨迹规划和运动控制是有利的。

为理解方便,上述计算过程描述如图3所示。

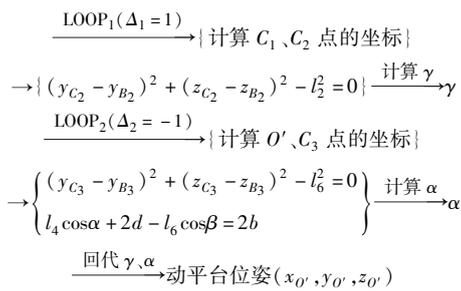


图3 机构位置正解流程图

Fig. 3 Flow chart of direct position solutions

由此可知,几何约束方程式(7),以及式(13)、(14)分别是求出本机构第1、2回路位置方程解析式的关键。

2.4 位置反解分析

该机构反解求解可归结为:已知动平台1上 O' 点的坐标 (x, y, z) , 求静平台0上3个点 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 移动位置 $y_{A_1}, y_{A_2}, y_{A_3}$ 。

由式(9)可求出 α 为

$$\alpha = \arccos \frac{x + b - d}{l_4} \quad (16)$$

再由式(14)可求出 β 为

$$\beta = \arccos \frac{x + d - b}{l_6} \quad (17)$$

进一步,求出点 C_1, C_2 的坐标分别为

$$C_1 = (-b, y + l_3/2, z - l_4 \sin \alpha)$$

$$C_2 = (-b, y - l_3/2, z - l_4 \sin \alpha)$$

另外,点 C_3 的坐标已由式(10)给出,因此,由杆长约束条件,建立位置约束方程

$$\begin{cases} (x_{C_1} - x_{B_1})^2 + (y_{C_1} - y_{B_1})^2 + (z_{C_1} - z_{B_1})^2 = l_2^2 \\ (x_{C_2} - x_{B_2})^2 + (y_{C_2} - y_{B_2})^2 + (z_{C_2} - z_{B_2})^2 = l_2^2 \\ (x_{C_3} - x_{B_3})^2 + (y_{C_3} - y_{B_3})^2 + (z_{C_3} - z_{B_3})^2 = l_6^2 \end{cases} \quad (18)$$

即可求解 $y_{A_i} (i = 1, 2, 3)$ 为

$$y_{A_i} = y_{C_i} \pm \sqrt{M_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19)$$

其中 $M_1 = l_2^2 - (z_{C_1} - l_1)^2$ $M_2 = l_2^2 - (z_{C_2} - l_1)^2$

$$M_3 = l_6^2 - (z_{C_3} - l_1)^2$$

综上所述,当动平台1上 O' 点的坐标 (x, y, z) 已知时,静平台0上3个点 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 移动位置 $y_{A_1}, y_{A_2}, y_{A_3}$ 各有两组解。故逆解数为 $2 \times 2 \times 2 = 8$, 因此,该机构有8种构型。

2.5 位置正解实例验算

2.5.1 正解算例

设该并联机构结构参数为: $a = 350$ mm, $b = 150$ mm, $d = 50$ mm, $l_1 = 30$ mm, $l_2 = 280$ mm, $l_3 = 140$ mm, $l_4 = 180$ mm, $l_5 = 90$ mm, $l_6 = 230$ mm。

设平行四边形①与②之间连接杆5的长度 $l_5 =$

0, 四边形②与动平台1之间的连接杆8的长度 $l_8 = 0$ 。此时, 机构的CAD三维模型如图4所示。

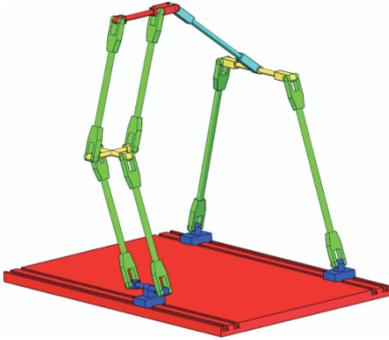


图4 3T机构三维模型

Fig. 4 3D CAD design of 3T PM

取静平台0上3个点 A_i ($i=1, 2, 3$)的位置为 $y_{A_1} = 154.6774$ mm, $y_{A_2} = -193.6707$ mm, $y_{A_3} = 31.0611$ mm。

由Matlab计算该机构位置正解, 如表1所示。

表1 机构的位置正解数值

Tab. 1 Values of direct position solutions mm

序号	x	y	z
1	28.5026	188.8515	415.9435
2	-112.9211	188.8515	110.3639
3*	-19.4981	-19.4967	450.8947
4	-79.8668	-19.4967	111.0290

2.5.2 逆解算例

将表1中第3组正解数值代入式(19), 可得 y_{A_i} ($i=1, 2, 3$)的8组逆解数值, 如表2所示。

表2 机构的位置逆解数值

Tab. 2 Values of inverse position solutions mm

序号	y_{A_1}	y_{A_2}	y_{A_3}
1	154.6774	14.6774	31.0612
2	154.6774	14.6774	-70.0546
3*	154.6774	-193.6708	31.0612
4	154.6774	-193.6708	-70.0546
5	-53.6708	14.6774	31.0612
6	-53.6708	14.6774	-70.0546
7	-53.6708	-193.6708	31.0612
8	-53.6708	-193.6708	-70.0546

可见, 表2中第3组的逆解数据和正解求解时给定的3个输入位置 y_{A_i} ($i=1, 2, 3$)一致, 从而验证了其正逆解的正确性。

3 并联机构奇异位形分析

3.1 奇异位形分析方法

采用Jacobian法分析该机构的奇异位形。对式(16)、(17)的两边同时对时间 t 求一阶导数, 得

$$\dot{\alpha} = -\frac{\dot{x}}{l_4 \sin \alpha} \quad (20)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\dot{x}}{l_6 \sin \beta} \quad (21)$$

再将式(18)的两边对时间 t 求一阶导数, 并将式(20)、(21)代入求导后的等式, 得

$$f_{i1} \dot{x} + f_{i2} \dot{y} + f_{i3} \dot{z} - u_{ii} \dot{y}_{A_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (22)$$

其中

$$u_{11} = y_{C_1} - y_{B_1} \quad u_{22} = y_{C_2} - y_{B_2}$$

$$u_{33} = y_{C_3} - y_{B_3} \quad f_{11} = \cot \alpha (z_{C_1} - z_{B_1})$$

$$f_{12} = y_{C_1} - y_{B_1} \quad f_{13} = z_{C_1} - z_{B_1}$$

$$f_{21} = \cot \alpha (z_{C_2} - z_{B_2}) \quad f_{22} = y_{C_2} - y_{B_2}$$

$$f_{23} = z_{C_2} - z_{B_2} \quad f_{31} = \cot \beta (z_{C_3} - z_{B_3})$$

$$f_{32} = y_{C_3} - y_{B_3} \quad f_{33} = z_{C_3} - z_{B_3}$$

因此, 该机构动平台末端执行器的输出速度 v_1 和 A_i ($i=1, 2, 3$)输入移动速度 v_2 的关系为

$$J_p v_1 = J_q v_2 \quad (23)$$

其中

$$v_1 = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T \quad v_2 = [\dot{y}_{A_1} \quad \dot{y}_{A_2} \quad \dot{y}_{A_3}]^T$$

$$J_p = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad J_q = \begin{bmatrix} u_{11} & & \\ & u_{22} & \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$$

依据 J_p 、 J_q 是否奇异, 将机构的奇异位形分为如下3类: ①当 $\det(J_q) = 0$ 时, 机构发生输入奇异。②当 $\det(J_p) = 0$ 时, 机构发生输出奇异。③当 $\det(J_q) = \det(J_p) = 0$ 时, 机构发生综合奇异。

3.2 奇异位形分析

3.2.1 输入奇异

当机构发生输入奇异, 意味着每条支链靠近驱动杆的两根杆处于折叠在一起或完全展开状态。这时, 动平台自由度减少。此时 $\det(J_q) = 0$, 方程解的集合 W 为

$$W = \{W_1 \cup W_2 \cup W_3\} \quad (24)$$

其中

$$W_1 = \{y_{C_1} - y_{B_1} = 0\} \text{ (} A_1, B_1, C_1 \text{三点共线)}$$

$$W_2 = \{y_{C_2} - y_{B_2} = 0\} \text{ (} A_2, B_2, C_2 \text{三点共线)}$$

$$W_3 = \{y_{C_3} - y_{B_3} = 0\} \text{ (} A_3, B_3, C_3 \text{三点共线)}$$

满足 W_3 的三维构型如图5所示。

3.2.2 输出奇异

当机构发生输出奇异, 意味着每条支链靠近动平台的杆处于折叠在一起或完全展开的状态, 此时的动平台自由度数增多, 即使锁住输入, 动平台也可能存在自由度输出。设

$$[f_{i1} \quad f_{i2} \quad f_{i3}] = e_i \quad (i=1, 2, 3)$$

若 $\det(J_p) = 0$, 则向量 e_1 、 e_2 、 e_3 有如下两种情况:

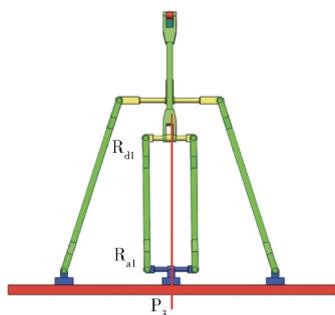


图5 输入奇异形示例

Fig. 5 Example of input singular configuration

(1) 存在两个向量线性相关

若 $e_1 = ke_2$, 即满足 $(f_{11}, f_{12}, f_{13}) = k(f_{21}, f_{22}, f_{23})$, 其三维构型为向量 $l_{B_1C_1}$ 、 $l_{B_2C_2}$ 在空间内平行, 如图6所示。

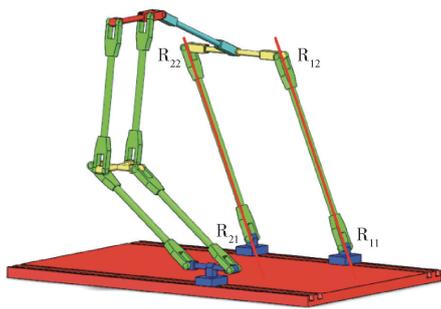


图6 输出奇异形示例

Fig. 6 Example of output singular configuration

若 $e_1 = ke_3$, 即满足 $(f_{11}, f_{12}, f_{13}) = k(f_{31}, f_{32}, f_{33})$, 此时有 $\cot\alpha(z_{C_1} - z_{B_1}) = k \cot\beta(z_{C_3} - z_{B_3})$, $z_{C_1} - z_{B_1} = k(z_{C_3} - z_{B_3})$ 。则有 $\cot\alpha = \cot\beta$ 。

因本机构设定的杆长尺寸在机构运动过程中, 恒有 $\alpha \neq \beta$, 即 $\cot\alpha \neq \cot\beta$; 则 $e_1 \neq ke_3$, 同理可知 $e_2 \neq ke_3$ 。

(2) 3个向量线性相关

设 $e_2 = k_1 e_1 + k_2 e_3$ ($k_1 k_2 \neq 0$), 此时有

$$(f_{21}, f_{22}, f_{23}) = k_1 (f_{11}, f_{12}, f_{13}) + k_2 (f_{31}, f_{32}, f_{33})$$

通过 Matlab 计算表明, 该种情况下 k_1 、 k_2 的解无法解出, 因此, 此种情况不存在。

3.2.3 综合奇异

此时 $\det(J_q) = \det(J_p) = 0$, 即输入奇异和输出奇异同时发生。在此位形下, 机构的驱动关节和末端执行器都存在着瞬时互不影响的非零输入和输出, 对应的位姿就是第3类奇异, 处于该类奇异时, 机构将失去自由度, 在机构设计阶段应予以避免。

上述奇异位置的求得, 对样机调试时的轨迹规划与运动控制, 具有参考价值。

4 机构工作空间分析

并联机构的可达工作空间, 是指在考虑运动副

的转角范围、杆长不干涉的情况下, 末端执行器的工作区域是衡量并联机构性能的一个重要指标。本文采用极限边界搜索法分析该并联机构的工作空间, 即首先根据杆长来设定工作空间的搜索范围; 然后, 基于位置反解, 搜索所有满足约束条件的点, 由这些点组成的三维图即为该并联机构的工作空间。

确定空间三维搜索范围为: $-135 \text{ mm} \leq x \leq 85 \text{ mm}$, $-300 \text{ mm} \leq y \leq 300 \text{ mm}$, $180 \text{ mm} \leq z \leq 480 \text{ mm}$, 通过 Matlab 编程, 得到该并联机构的三维工作空间, 根据第①类奇异判别式 $\det(J_q) = 0$ 可得到输入奇异轨迹, 由第②类奇异判别式 $\det(J_p) = 0$ 可得到输出奇异轨迹, 如图7所示, 其中, 绿色部分为无奇异的工作空间, 蓝色部分为输入奇异区域, 红色部分为输出奇异区域, 表明该工作空间内部存在较大的无奇异工作空间。

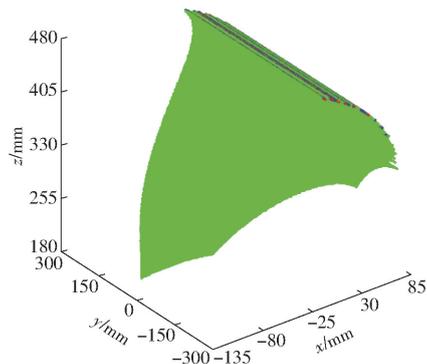


图7 工作空间及其奇异情况

Fig. 7 Workspace and singularity situation

本文所设定的杆长参数之一是: $2a = 2l_2 + l_3$, 在这个设定条件下, 若考虑3个驱动副的移动范围, 即随着3个驱动副的同速度移动, 则图7所示的机构工作空间相应地可沿Y方向延伸, 具有与2PPPaR并联机构所述的倒置型长方形柱的工作空间^[25], 适合于长度方向较大尺寸工件的机加工、喷涂、铆接等操作工艺。

图8为工作空间在XOY、XOZ和YOZ平面上的投影图。

图9为工作空间内Z方向上的4个X-Y截面图, 表明: $z \geq 300 \text{ mm}$ 时, 随着z的增大, X轴方向上的移动距离逐渐减少, Y轴方向上的移动距离逐渐增加。

5 速度与加速度分析

5.1 速度公式

当机构处于非奇异位置时, 矩阵 J_p 可逆, 由式(23)可得

$$v_1 = J_p^{-1} J_q v_2 \quad (25)$$

式(25)即为动平台O'点的输出速度。

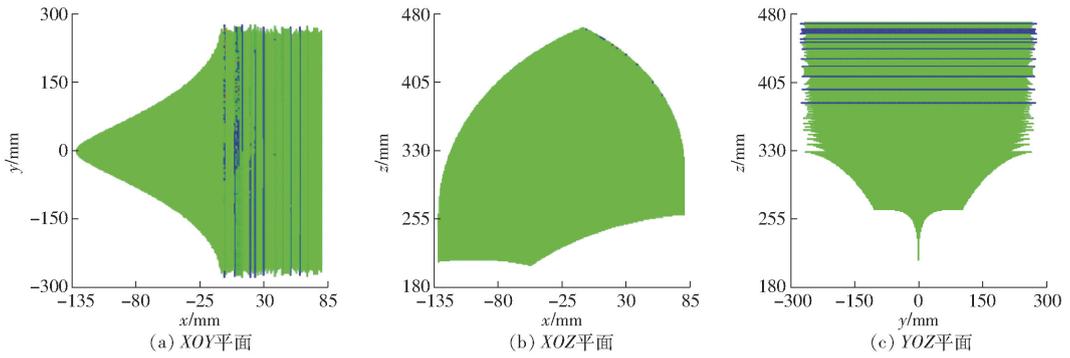


图8 工作空间在 XOY、XOZ 和 YOZ 平面上的投影

Fig. 8 Projection views of workspace on plane XOY, XOZ and YOZ

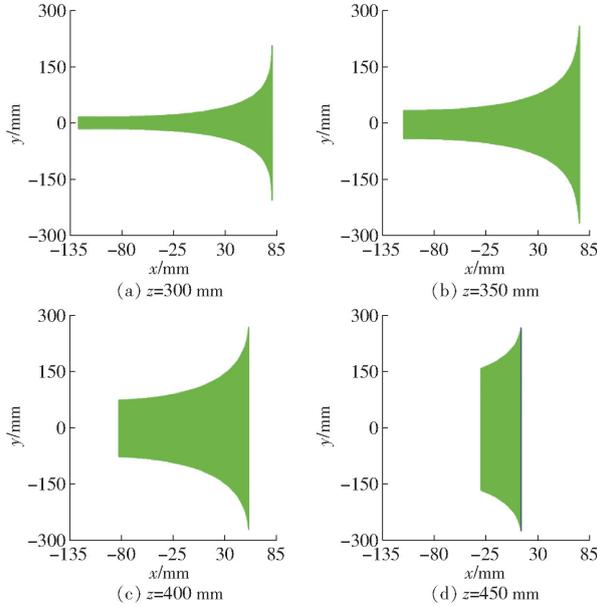


图9 工作空间内不同的 X-Y 截面图

Fig. 9 Different X-Y cross-sections in workspace

5.2 加速度公式

对式(23)的两边同时对时间 t 求一阶导数,得

$$J_p \dot{v}_1 - J_q \dot{v}_2 + K = 0 \quad (26)$$

其中

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]^T$$

$$K_1 = \frac{df_{11}}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{df_{12}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{df_{13}}{dt} \frac{dz}{dt} - \frac{du_{11}}{dt} \frac{dy_{A_1}}{dt}$$

$$K_2 = \frac{df_{21}}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{df_{22}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{df_{23}}{dt} \frac{dz}{dt} - \frac{du_{22}}{dt} \frac{dy_{A_2}}{dt}$$

$$K_3 = \frac{df_{31}}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{df_{32}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{df_{33}}{dt} \frac{dz}{dt} - \frac{du_{33}}{dt} \frac{dy_{A_3}}{dt}$$

$$\frac{df_{i1}}{dt} = \frac{\partial f_{i1}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_{i1}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{df_{i2}}{dt} = \frac{\partial f_{i2}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_{i2}}{\partial y_{A_i}} \frac{dy_{A_i}}{dt}$$

$$\frac{df_{i3}}{dt} = \frac{\partial f_{i3}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_{i3}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{du_{ii}}{dt} = \frac{\partial u_{ii}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_{ii}}{\partial y_{A_i}} \frac{dy_{A_i}}{dt}$$

当机构处于非奇异位置时,矩阵 J_p 可逆,由

式(26)可得

$$\dot{v}_1 = J_p^{-1} J_q \dot{v}_2 - J_p^{-1} K \quad (27)$$

式(27)即为动平台 O' 点的输出加速度。

5.3 速度、加速度算例验算

取3个驱动副的输入移动运动规律分别为:

$y_{A_1} = 154.6774 - 50\sin t$, $y_{A_2} = -193.6707 - 50\sin t$,
 $y_{A_3} = 31.0611 + 50\sin t$ 。则其输入移动速度、加速度的变化规律分别为

$$v_2 = [-50\cos t \quad -50\cos t \quad 50\cos t]^T$$

$$\dot{v}_2 = [50\sin t \quad 50\sin t \quad -50\sin t]^T$$

将式(25)、(27)导入 Matlab 软件编程计算动平台 O' 点的速度与加速度,分别得到速度、加速度曲线;同时,将该并联机构的三维模型,通过 SolidWorks 导入 ADAMS 软件中进行仿真,设置仿真时间为 10 s,仿真步长为 0.1 s,得到 101 个时间点 3 个方向的速度与加速度后,将其导入 Matlab 软件得速度与加速度如图 10、11 所示。

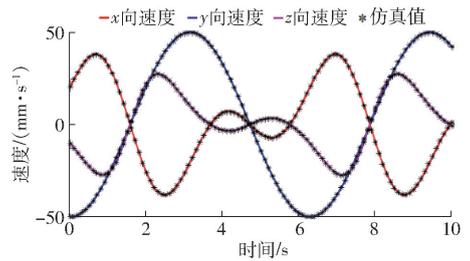


图10 动平台速度曲线

Fig. 10 Velocity curves of moving platform

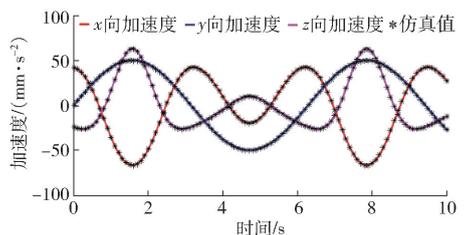


图11 动平台加速度曲线

Fig. 11 Acceleration curves of moving platform

对比图 10 和图 11 可以发现:①运用 Matlab 对式(25)、(27)进行编程得到的速度与加速度曲线与

运用 ADAMS 仿真得到的曲线完全吻合,从而验证了所推导的速度与加速度公式的正确性。②在给定本文所设定的驱动副的输入运动规律情况下,该机构动平台的速度、加速度曲线变化连续平稳、无突变峰值,表明该机构具有较好的运动平稳性。

6 结论

(1)设计的三平移(3T)并联机构具有4个优点:仅由移动副和转动副组成,制造简单、安装方便;具有解析式位置正解,这对误差分析、尺度综合、刚度分析及动力学研究带来较大的方便;具有部分输入-输出运动解耦性,这对机构的轨迹规划及运动控

制十分有利;具有大的操作工作空间,适合于长度方向较大尺寸工件的机加工、喷涂、铆接等操作工艺。

(2)该机构通过第1回路输出构件始终保持水平位置这一特殊的几何约束条件(该条件由约束度为负的第2回路提供),直接求得整个机构位置正解解析解,这是本机构拓扑结构不同于其他机构的优点所在。

(3)基于位置反解,得到了该机构三类奇异位形发生的条件及其位置,给出了机构的工作空间大小及其奇异区域。

(4)机构速度与加速度仿真曲线变化较平稳、连续,具有较好的动态特性。

参 考 文 献

- [1] CLAVEL R. A fast robot with parallel geometry [C]//Proceeding of the 18th Int. Symposium on Industrial Robots, 1988:91-100.
- [2] STOCK M, MILLER K. Optimal kinematic design of spatial parallel manipulators: application to linear delta robot [J]. Journal of Mechanical Design, 2003, 125(2):292-301.
- [3] BOURI M, CLAVEL R. The linear delta: developments and applications [C]//Robotics. VDE, 2010:1-8.
- [4] KELALIAIA R, COMPANY O, ZAATRI A. Multiobjective optimization of a linear delta parallel robot [J]. Mechanism & Machine Theory, 2012, 50(2):159-178.
- [5] TSAI L W, WALSH G C, STAMPER R E. Kinematics of a novel three dof translational platform [C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, 1996:3446-3451.
- [6] TSAI L W, JOSHI S. Kinematics and optimization of a spatial 3-UPU parallel manipulator ASME[J]. Mech. Des., 2000, 122:439-446.
- [7] 赵铁石,黄真.一种三维移动并联平台机构的运动学分析[J].中国机械工程,2001,12(6):612-616.
ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. Kinematics analysis of a three dimensional mobile parallel platform mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2001, 12(6): 612-616. (in Chinese)
- [8] 尹小琴,马履中.三平移并联机构3-RRC的工作空间分析[J].中国机械工程,2003,14(18):1531-1533.
YIN Xiaoqin, MA Lüzhong. Workspace analysis of 3-DOF translational 3-RRC parallel mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(18): 1531-1533. (in Chinese)
- [9] KONG X, GOSSELIN C M. Kinematics and singularity analysis of a novel type of 3-CRR 3-DOF translational parallel manipulator [J]. Int. J. Robot. Res., 2002, 21:791-798.
- [10] LI S, HUANG Z, ZUO R. Kinematics of a special 3-DOF 3-UPU parallel manipulator [C]//ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2002:1035-1040.
- [11] LI S, HUANG Z. Kinematic characteristics of a special 3-UPU parallel platform manipulator [J]. China Mechanical Engineering, 2005, 18(3):376-381.
- [12] 于靖军,赵铁石,毕树生,等.三维平动并联机构型综合研究[J].自然科学进展,2003,13(8):843-849.
YU Jingjun, ZHAO Tieshi, BI Shusheng, et al. Comprehensive research on 3-DOF translational parallel mechanism [J]. Progress in Natural Science, 2003, 13(8): 843-849. (in Chinese)
- [13] 陆晶,高国琴,朱彩红,等.新型三平移并联机构的运动分析和工作空间分析[J].机械设计与制造,2007,11(11):163-165.
LU Jing, GAO Guoqin, ZHU Caihong, et al. Motion and workspace analysis of a novel 3-translational parallel mechanism [J]. Machinery Design & Manufacture, 2007, 11(11): 163-165. (in Chinese)
- [14] 杨廷力.机器人机构拓扑结构学[M].北京:机械工业出版社,2004.
- [15] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等.机器人机构拓扑结构设计[M].北京:科学出版社,2012.
- [16] YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topology design of robot mechanism [M]. Springer, 2018.
- [17] ZHAO Y. Dimensional synthesis of a three translational degrees of freedom parallel robot while considering kinematic anisotropic property [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2013, 29(1):169-179.
- [18] ZENG Q, EHMANN K F, CAO J. Tri-pyramid robot: design and kinematic analysis of a 3-DOF translational parallel manipulator [M]. Pergamon Press, Inc. 2014.
- [19] ZENG Q, EHMANN K F, JIAN C. Tri-pyramid robot: stiffness modeling of a 3-DOF translational parallel manipulator [J]. Robotica, 2016, 34(2):383-402.
- [20] LEE S, ZENG Q, EHMANN K F. Error modeling for sensitivity analysis and calibration of the Tri-pyramid parallel robot [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017(5):1-14.

- [9] 陈元章, 陈晓东. 也谈喷嘴挡板伺服阀与射流管伺服阀的比较[J]. 液压与气动, 2012(11):103-109.
CHEN Yuanzhang, CHEN Xiaodong. Revisiting the comparison of servovalve between flapper-nozzle and jet pipe [J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2012(11):103-109. (in Chinese)
- [10] 阎耀保. 射流管伺服阀在飞机液压系统中的应用[J]. 液压气动与密封, 2012(7):8-12.
YIN Yaobao. Applications of jet pipe servovalve on airplane hydraulic system [J]. Hydraulics Pneumatics & Seals, 2012(7):8-12. (in Chinese)
- [11] 刘劲松, 周世民, 何学工, 等. 飞机刹车系统应用直接驱动伺服阀(DDV)的研究[J]. 航空精密制造技术, 2013, 49(2):48-51.
LIU Jinsong, ZHOU Shimin, HE Xuegong, et al. Research on aircraft braking system by using direct drive servo valve [J]. Aviation Precision Manufacturing Technology, 2013, 49(2):48-51. (in Chinese)
- [12] 姚建庚. 直接驱动式电液伺服阀[J]. 液压与气动, 1999(4):36-38.
YAO Jianguang. Direct drive electro-hydraulic servo valve [J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 1999(4):36-38. (in Chinese)
- [13] WU Shuai, JIAO Zongxia, YAN Liang. Development of a direct-drive servo valve with high-frequency voice coil motor and advanced digital controller [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2014, 19(3):932-942.
- [14] 钱占松. 旋转直接驱动电液压力伺服阀的设计研究[J]. 液压与气动, 2015(11):90-94.
QIAN Zhansong. Design and research of rotate direct drive pressure control servo valve [J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2015(11):90-94. (in Chinese)
- [15] 陆亮, 夏飞燕, 阎耀保, 等. 小球式旋转直驱压力伺服阀卡滞机理的研究[J]. 浙江大学学报(工学版), 2019, 53(7):1-9.
LU Liang, XIA Feiyan, YIN Yaobao, et al. Study on spool stuck mechanism of ball-type rotary direct drive pressure servo valve [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2019, 53(7):1-9. (in Chinese)
- [16] RUAN J, BURTON R, UKRAINETZ P. An investigation into the characteristics of a two dimensional "2D" flow control valve [J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 2002, 124(1):214-220.
- [17] 李胜, 阮健, 孟彬, 等. 2D 数字伺服阀频率特性研究[J]. 中国机械工程, 2011, 22(2):215-219.
LI Sheng, RUAN Jian, MENG Bin, et al. Study on frequency response for a 2D digital servo valve [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(2):215-219. (in Chinese)
- [18] 李胜. 2D 伺服阀数字控制的关键技术的研究[D]. 杭州:浙江工业大学, 2011:65-80.
- [19] 李胜, 阮健, 孟彬. 2D 数字阀滞环颤振补偿技术研究[J]. 农业机械学报, 2011, 42(3):212-218.
LI Sheng, RUAN Jian, MENG Bin. Dither compensation technology for hysteresis of 2D digital valve [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(3):212-218. (in Chinese)
- [20] 刘奎, 陈烜, 朱兆良, 等. 直驱式 2D 阀用湿式力矩马达的研究[J]. 液压气动与密封, 2019, 40(5):4-7.
LIU Kui, CHEN Xuan, ZHU Zhaoliang, et al. The research of wet-type torque motor for direct-acting 2D valve [J]. Hydraulics Pneumatics & Seals, 2019, 40(5):4-7. (in Chinese)
- [21] 何晋飞, 陈烜, 鲁鹏勇, 等. 插装式二维(2D)伺服阀的理论分析与实验研究[J]. 航空学报, 2019, 40(5):287-297.
HE Jinfei, CHEN Xuan, LU Pengyong, et al. Theoretical analysis and experimental study two-dimensional cartridge servo valve [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2019, 40(5):287-297. (in Chinese)
- [22] 易大义, 沈云宝, 李有法, 等. 计算方法[M]. 杭州:浙江大学出版社, 2002.

(上接第 391 页)

- [21] PRAUSE I, CHARAF E. Comparison of parallel kinematic machines with three translational degrees of freedom and linear actuation [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(4):841-850.
- [22] MAHMOOD M, MOSTAFA T. Kinematic analysis and design of a 3-DOF translational parallel robot [J]. International Journal of Automation and Computing, 2017, 14(4):432-441.
- [23] 沈惠平, 熊坤, 孟庆梅, 等. 并联机构运动解耦设计方法与应用研究[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(6):348-356.
SHEN Huiping, XIONG Kun, MENG Qingmei, et al. Kinematic decoupling design method and application of parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6):348-356. http://www.jcsam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20160646&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.06.046. (in Chinese)
- [24] 沈惠平, 李菊, 王振, 等. 基于结构降耦和运动解耦的并联机构拓扑结构优化及其性能改善[J]. 机械工程学报, 2017, 53(19):176-186.
SHEN Huiping, LI Ju, WANG Zhen, et al. Topology structure optimization and performance improvement for parallel mechanisms based on structure coupling-reducing and motion decoupling [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(19):176-186. (in Chinese)
- [25] 吴存存, 杨桂林, 陈庆盈, 等. 四自由度 2PPPaR 并联机构运动学及性能分析[J]. 机械工程学报, 2018, 54(3):36-45.
WU Cuncun, YANG Guilin, CHEN Qingying, et al. Kinematic and performance analysis of a 4-DOF 2PPPaP parallel manipulator [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(3):36-45. (in Chinese)