

一种 3(Ra)PS 变胞并联机构构型与运动学分析

贾 璞¹ 李端玲¹ 雷志强² 张元开¹ 杨 超¹

(1. 北京邮电大学自动化学院, 北京 100876; 2. 陕西科技大学机电工程学院, 西安 710021)

摘要: 研究一种基于变胞铰链 Ra (Reconfigurable axis) 的新型 3(Ra)PS 变胞并联机构的可重构特性和统一运动学分析方法。根据约束螺旋系统表明, 在一个构态下, (Ra)PS 支链对平台没有约束, 而在另一个构态下, 通过改变可重构铰链 Ra 铰内轴线的位置, 可以提供一个约束力。支链的两个构态使 3(Ra)PS 变胞并联机构具有 4 种构型, 其中包括 2R1T(2 个旋转 1 个平移)、3R1T(3 个旋转 1 个平移)、3R2T(3 个旋转 2 个平移) 和 6 DOF (Degree of freedom) 构型。根据支链两构态的差异, 提出以一个支链构态作为另一个支链构态特例的统一运动学建模方法。在此基础上, 建立 3(Ra)PS 变胞并联机构的驱动选择方案和可以包含 4 种构型的统一运动学模型。对逆运动学和正运动学进行求解, 数值算例验证了理论结果的正确性。这种特殊类型的并联机构为特殊变胞机构的工作空间、路径规划和控制奠定了基础。

关键词: 变胞并联机构; 可重构铰链; 约束螺旋; 构型分析; 运动学分析

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2022)02-0443-08

OSID:



Configuration and Kinematics Analysis of a 3(Ra)PS Metamorphic Parallel Mechanism

JIA Pu¹ LI Duanling¹ LEI Zhiqiang² ZHANG Yuankai¹ YANG Chao¹

(1. College of Automation, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China)

Abstract: The reconfigurability and unified analytical kinematics analysis of a type of 3(Ra)PS metamorphic parallel mechanism were studied. According to the constraint screw system, in one configuration, the (Ra)PS chain had no constraint on the platform, while in another configuration, it can provide a constraint by changing the position of the inner axis of the Ra joint. The two configurations of the limb made the 3(Ra)PS metamorphic parallel mechanism have four kinds of topological structures, which had the ability to move between 2R1T (two rotations and one translation), 3R1T (three rotations and one translation), 3R2T and 6 DOF. The basic principles of metamorphic of such reconfigurable axis joint were revealed by investigating the correlation of the corresponding screw systems consisted of line vectors. A limb that can be used to construct a type of parallel mechanism was proposed. The sub-phases of the limb that accompanied the phase change of a specific reconfigurable axis joint were enumerated and the constraints corresponding to each phase were analyzed based on the reciprocity of the screw. Based on the analysis of the driving scheme, a unified kinematic modelling method with one configuration as a special case of the other was proposed through the difference between the two configurations of the limb. Four kinds of driving schemes and four kinds of unified kinematic models covering 3(Ra)PS metamorphic parallel mechanism were established. The drive selection scheme of 3(Ra)PS metamorphic parallel mechanism and the unified kinematic model covering four configurations were established. The inverse kinematics and forward kinematics were solved analytically, and the theoretical results were verified by numerical examples. The proposed metamorphic parallel mechanism laid a foundation for the workspace, path planning and control of the metamorphic mechanism.

Key words: metamorphic parallel mechanism; reconfigurable joint; constraint screw; configuration analysis; kinematics analysis

收稿日期: 2021-02-24 修回日期: 2021-04-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(51775052, 52175019)和北京市自然科学基金项目(3212009)

作者简介: 贾璞(1990—), 男, 博士生, 主要从事机器人学及机构学研究, E-mail: jiapu1990@163.com

通信作者: 李端玲(1974—), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事机器人学及机构学研究, E-mail: liduanling@163.com

0 引言

传统的并联机构具有恒定的拓扑结构和固定的自由度^[1],这限制它们的多功能性和适应性。随着工业快速定制和环境变化的要求,可以适应不同场景的可重构并联机构成为近年来机构研究的热点。近年来学者们进行许多可重构并联机构(RPM)的研究。在此基础上,也产生了一类具有自适应性和可重构特性的变胞并联机构(MPMS)^[2]。DAI等^[3]提出用于装饰性纸箱折叠和可重构包装研究的变胞机构。YAN等^[4-5]研究运动关节的可变构型,给出变胞关节的构型表示。KONG^[6-7]使用基于螺旋理论构造出具有多种操作模式的RPM。现有可实现RPM具有可重构特性的方法主要包括引入变几何约束或可锁定的铰链^[8-10],以及在运动支链中集成一些可重构连杆机构^[11]。LI等^[12]使用基于位移子群的方法提出一类带有Schoenflies运动分支的RPM。GAN等^[13-15]发明变胞rT铰链和rR铰链,并提出使用这些铰链构造RPM的方法。ZHANG等^[16]提出vA(可变轴线)铰链,其灵感来自于折纸,并已将其集成到多个RPM中。CARBONARI等^[17]通过引入特殊的可锁定万向节设计一类RPM。这些变胞或可锁定铰链的构态变化会导致RPM的自由度发生变化。文献[18-19]通过整合运动支链中的可重构连杆,提出几种RPM,并对含有vA铰的并联机构建立涵盖所有构型的运动学模型。胡旭宇等^[20-21]提出一系列含恰约束支链的并联机构和球面变胞仿生机构。畅博彦等^[22]研究了一种变胞机构运动参数输入与输出之间的映射关系。沈惠平等^[23]通过拓扑降耦设计一种实现一平移两转动的并联机构,并推导出其符号正反解。温如凤等^[24]提出具有耦合分支的两转两移型并联机构,并对其刚度、工作空间等性能进行对比分析。

本文研究一种由新型变胞铰链Ra铰组建而成的3(Ra)PS变胞并联机构。重点分析3(Ra)PS并联机构的构型,针对不同构型使用螺旋理论验证构型的自由度变化特点。根据Sylvester结式消去法,利用Mathematica符号工具对3(Ra)PS变胞并联机构的所有构型进行正、逆运动学分析求解和数值验证。以为变胞并联机构的设计提供思路,为多构型并联机构的运动学建模提供新的方法。

1 可重构(Ra)PS支链

可重构(Ra)PS支链由Ra铰链、P副(移动副)和S副(球副)组成。该支链的可重构特性来源于Ra铰链的结构变化。如图1所示,Ra铰具有3个旋转自由度(DOFs),这3个自由度分别来自于3个

垂直交叉的旋转轴(外轴、内轴和垂直轴)。Ra铰的外轴为一个方向固定的轴,内轴可在开槽环内旋转,改变自身在开环槽中的位置。此外,垂直轴用于为内轴位置的位置变化提供旋转。开槽环用于固定内轴线两端的滑块,并通过滑块沿开槽环的内槽自由旋转和固定,使其具有改变内轴位置方向的能力。

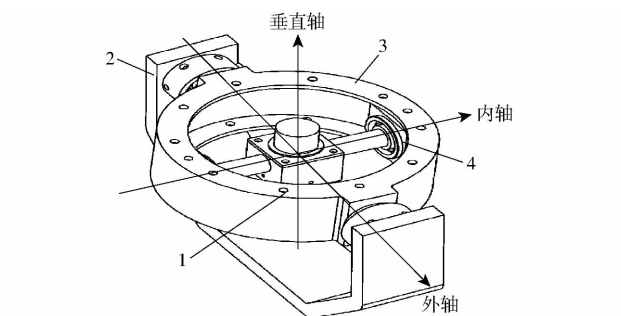


图1 Ra铰三维模型

Fig. 1 Structural diagram of Ra joint

1. 定位孔 2. 保持架 3. 开槽环 4. 滑块

如图2所示,内轴位置的变化可使Ra铰链的自由度发生改变,从而导致(Ra)PS支链具有2个不同的构态。在图2a中,内轴与外轴垂直,此时支链等效为SPS支链,为(Ra-1)PS支链,在图2b中,内轴与外轴共线,支链等效为UPS支链,为(Ra-2)PS支链。

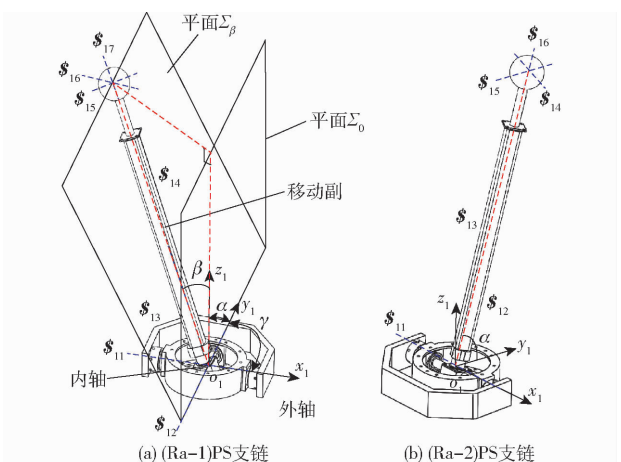


图2 (Ra)PS支链的两种构型

Fig. 2 Two configurations of (Ra)PS limb

如图2a所示,在Ra铰链中心处设置一个支链坐标系 $o_1x_1y_1z_1$, x_1 轴与外轴共线, y_1 轴位于保持架平面内并垂直于外轴, z_1 轴的建立符合右手准则。(Ra-1)PS支链的运动螺旋系统为

$$\{S_i\} = \begin{cases} \$_{11} = [1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \$_{12} = [0 \ c\alpha \ s\alpha; \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \$_{13} = [s\beta \ -s\alpha s\beta \ c\alpha c\beta; \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \$_{14} = [0 \ 0 \ 0; \ s\beta \ -s\alpha s\beta \ c\alpha c\beta]^T \\ \$_{15} = [1 \ 0 \ 0; \ 0 \ -lc\alpha\beta \ lc\alpha s\beta]^T \\ \$_{16} = [0 \ c\alpha \ s\alpha; \ -lc\beta \ -ls\alpha s\beta \ lc\alpha s\beta]^T \\ \$_{17} = [s\beta \ -s\alpha s\beta \ c\alpha c\beta; \ 0 \ 0 \ 0]^T \end{cases} \quad (1)$$

式中 β ——支链($\$_{13}$)与平面 $y_1o_1z_1$ 之间的夹角
 α ——支链 $\$_{13}$ 与平面 $x_1o_1y_1$ 的夹角
 l ——Ra 铰链中心和球铰中心之间的距离

符号 $c\alpha$ 和 $s\alpha$ 分别表示 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 。当 Ra 铰处于 (Ra-1) 构型时, β, γ (γ 为内轴线与外轴线的夹角) 都不为零, 当 Ra 铰处于 (Ra-2) 构型时, β 和 γ 为零但 α 不为零, 在旋量符号 $\$_{ij}$ 中, 下标 i 表示支链编号, 下标 j 表示支链内的运动副编号。式(1)中的 7 个螺旋形成一个六阶系统, 这表明 (Ra-1) PS 支链具有 6 个自由度 (DOFs), 并且对与其连接的动平台不提供任何约束。

对如图 2b 所示的 (Ra-2) PS 支链建立的运动旋量系统为

$$\{S_2\} = \begin{cases} \$_{11} = [1 & 0 & 0; & 0 & 0 & 0]^T \\ \$_{12} = [0 & c\alpha & s\alpha; & 0 & 0 & 0]^T \\ \$_{13} = [0 & 0 & 0; & 0 & c\alpha & s\alpha]^T \\ \$_{14} = [1 & 0 & 0; & 0 & ls\alpha & -lc\alpha]^T \\ \$_{15} = [0 & -s\alpha & c\alpha; & l & 0 & 0]^T \\ \$_{16} = [0 & c\alpha & s\alpha; & 0 & 0 & 0]^T \end{cases} \quad (2)$$

从式(2)可以看出, 旋量 $\$_{12}$ 和 $\$_{16}$ 相同, 并且 6 个旋量形成一个五阶螺旋系统。因此, 对支链的运动螺旋系统中求反螺旋可以得到 (Ra-2) PS 支链

的约束螺旋为

$$S'_1 = [1 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad ls\alpha \quad -lc\alpha]^T \quad (3)$$

从式(3)可知, 这个支链提供一个作用于球铰中心且平行于支链 Ra 铰外轴线的约束力, 导致球铰中心 A_i 被约束在垂直于外轴线的平面 $y_1o_1z_1$ 内, 除此之外支链位于该平面内。因此球铰中心 A_i 只能在平面上移动。因此, (Ra-2) PS 支链有 5 个自由度, 比 (Ra-1) PS 构型少 1 个自由度。

2 3(Ra)PS 并联机构构型分析

如图 3 所示, 将 3 个 (Ra) PS 支链分别与动平台和底座连接, 三支链对称布置, 此时可以获得 4 种不同构型的并联机构。

其中点 A_i 为球形铰链的中心点, 点 B_i 为支链 i 的 Ra 铰链中心, 在等边三角形 $B_1B_2B_3$ 的几何中心 O 处建立定位坐标系 $OXYZ$, 其中 X 轴平行于 B_2B_3 , Y 轴穿过 B_1 并垂直于 B_2B_3 , Z 轴垂直于底座。如图 3a 所示, 将 3 个 (Ra-2) PS 支链与底座和动平台连接可组成 3(Ra-2)PS 变胞并联机构, 根据式(2)中的几何约束可知, 当支链为 (Ra-2) PS 时, 球铰中心 A_i 被约束在平面 Σ_0 上。

根据上述描述, 点 A_i 和 B_i 在全局坐标系中的位置矢量可表示为

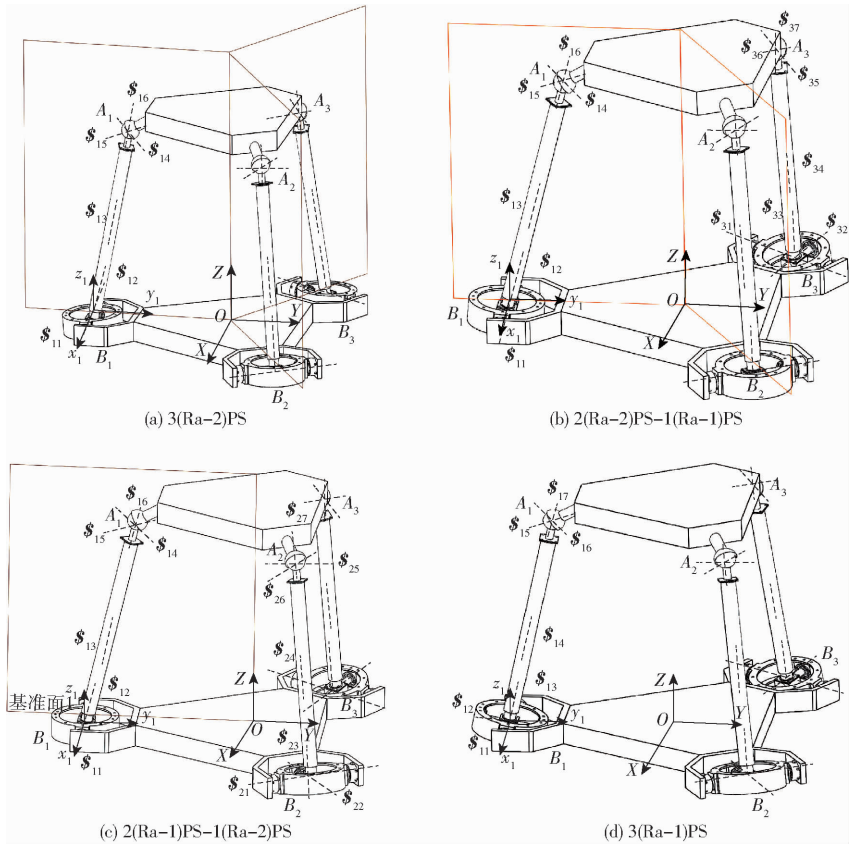


图 3 3(Ra)PS 变胞并联机构的 4 种构型

Fig. 3 Four configurations of 3(Ra)PS metamorphic parallel mechanism

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = (0, -r_b, 0) \\ \mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 + l_1(0, c\alpha_1, s\alpha_1) \\ \mathbf{b}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_b, \frac{1}{2}r_b, 0\right) \\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 + l_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c\alpha_2, -\frac{1}{2}c\alpha_2, s\alpha_2\right) \\ \mathbf{b}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_b, \frac{1}{2}r_b, 0\right) \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3 + l_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\alpha_3, -\frac{1}{2}c\alpha_3, s\alpha_3\right) \end{cases} \quad (4)$$

式中支链*i*和矢量*OB_i*之间的夹角为α_{*i*},定坐标系中的点*A_i*和*B_i*的位置矢量分别为 $\mathbf{a}_i$ 、 $\mathbf{b}_i$,球铰链中心*A_i*与*Ra*铰链中心之间的距离为*l_i*。*r_b*为底座外接圆半径。

从式(4)可以看出,每一个(*Ra*−2)PS的支链对动平台提供一个过球副中心且平行于*Ra*铰外轴方向的约束力。因此,图3a中3(*Ra*−2)PS并联机构在全局坐标系下的约束螺旋系统可表示为

$$\begin{aligned} \{\mathbf{S}^r\} = \\ \begin{cases} \mathbf{S}_1^r = [1 \ 0 \ 0; \ 0 \ l\alpha \ r_b - l\alpha]^T \\ \mathbf{S}_2^r = [-1 \ \sqrt{3} \ 0; \ -\sqrt{3}l\alpha \ -l\alpha \ 2(r_b - l\alpha)]^T \\ \mathbf{S}_3^r = [-1 \ -\sqrt{3} \ 0; \ \sqrt{3}l\alpha \ -l\alpha \ 2(r_b - l\alpha)]^T \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

对式(5)求反螺旋,动平台的运动螺旋可表示为

$$\mathbf{S}_f = \begin{cases} \mathbf{S}_{f1} = [0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1]^T \\ \mathbf{S}_{f2} = [1 \ 0 \ 0; \ 0 \ l\alpha \ 0]^T \\ \mathbf{S}_{f3} = [0 \ 1 \ 0; \ -l\alpha \ 0 \ 0]^T \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)可知,支链对称分布的3(*Ra*−2)PS并联机构具有分别沿*X*、*Y*轴的2个旋转自由度和沿着*Z*轴的1个移动自由度。

将3(*Ra*−2)PS并联机构中的支链从(*Ra*−2)PS改为(*Ra*−1)PS后,将产生具有更多自由度的构型。将支链1的构态从*Ra*−2改变为*Ra*−1后,3(*Ra*−2)PS变为如图3b所示的2(*Ra*−2)PS−1(*Ra*−1)PS构型,其中在支链2和3分别具有一个平行于各自*Ra*铰外轴线的约束力。基于约束螺旋分析,2(*Ra*−2)PS−1(*Ra*−1)PS并联机构具有4个自由度,1个平移和3个旋转(3R1T)。

进一步改变支链的构态,如图3c所示的构型为2(*Ra*−1)PS−1(*Ra*−2)PS构型,此时只有支链3具有1个力约束,其余两个支链对平台没有约束。因此,该机构具有5个自由度,其中包括3个旋转和2个平移的自由度(3R2T)。

当将第3支链的构态都改变为(*Ra*−1)PS时,此时机构的构型为3(*Ra*−1)PS,如图3d所示,该构型3(*Ra*−1)PS对平台没有任何约束螺旋且并联机构具有6个自由度。

3 变胞并联机构的驱动方案

由第2节对变胞并联机构3(*Ra*)PS的构型分析可知,为使机构具有稳定可控的能力,合理的驱动选择必不可少。因此机构的驱动选择不仅要尽可能保持与底座的连接,还要考虑机构的运动是完全可控的。如果机构选择合理的驱动方案,在锁定所有驱动运动铰链后,并联机构的约束螺旋系统的阶数应为6,运动动平台将失去所有6个自由度。

为实现机构不同工作模式之间的灵活性和正常切换,保证机构的优良动态性能,在与底座直接连接的每个支链中的外轴、内轴、移动副可以作为驱动选择。

由于(*Ra*)PS支链两种构态的约束不同,因此对应的驱动选择也不完全相同。在(*Ra*−2)PS支链中,围绕外轴线的旋转或沿着移动副的平移可以用作驱动。根据图2b和对应的支链运动螺旋,分别锁定这两个输入可以形成驱动约束螺旋为

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{(Ra-2)o}^r = [0 \ -s\alpha \ c\alpha; \ l \ 0 \ 0] \\ \mathbf{S}_p^r = [0 \ c\alpha \ s\alpha; \ 0 \ 0 \ 0] \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{S}_{(Ra-2)o}^r$ 是一个通过球铰中心并垂直于支链和外轴线的约束力,该约束力是锁定外轴转动副后形成的驱动约束。 $\mathbf{S}_p^r$ 是一个沿支链方向的约束力,该约束力是锁定移动副后形成的驱动约束。

当改变(*Ra*−2)PS支链到(*Ra*−1)PS时,*Ra*铰的内轴转动副可以作为一个新的驱动选择。锁定该驱动产生的驱动约束力为

$$\mathbf{S}_{i(Ra-1)i}^r = [c\beta \ c\alpha s\beta \ s\alpha s\beta; \ 0 \ l\alpha \ -lc\beta] \quad (8)$$

式中 $\mathbf{S}_{i(Ra-1)i}^r$ 为一个球形铰链中心并垂直于内轴线和支链的平面的约束力,该约束力是锁定内轴转动副后形成的驱动约束。

通过上述分析可知,满足驱动方案的原则是,驱动约束螺旋与动平台约束螺旋系统形成一个六阶约束系统。在此基础上,对3(*Ra*)PS变胞并联机构的驱动方案总结如下:①当3(*Ra*)PS并联机构含有支链(*Ra*−2)PS时,外轴转动副和移动副可以作为驱动选择。②当3(*Ra*)PS并联机构含有支链(*Ra*−1)PS时,外轴转动副、移动副和内轴转动副中的任意两个可以作为驱动选择。

将图3b中的2(*Ra*−2)PS−1(*Ra*−1)PS并联

机构作为示例。根据第2节分析可知在该构型下机构具有4个自由度,其中每个(Ra-1)PS支链有3个选择,其中任意2个可以作为驱动,每个(Ra-2)PS支链有2个选择,其中任意一个可以作为驱动。现将(Ra-1)PS支链的移动副和内轴转动副和(Ra-2)PS支链的移动副作为驱动方案,2(Ra-2)PS-1(Ra-1)PS并联机构的驱动约束螺旋系统为

$$S_a^r = \begin{cases} \mathcal{S}_{1P}^r = [\mathbf{u}_1; \mathbf{b}_1 \times \mathbf{u}_1] \\ \mathcal{S}_{2P}^r = [\mathbf{u}_2; \mathbf{b}_2 \times \mathbf{u}_2] \\ \mathcal{S}_{3P}^r = [\mathbf{u}_3; \mathbf{b}_3 \times \mathbf{u}_3] \\ \mathcal{S}_{3(RA-12)}^r = [\mathbf{u}_{b3}; \mathbf{a}_3 \times \mathbf{u}_{b3}] \end{cases} \quad (9)$$

式中支链*i*的移动副作为驱动约束 $\mathcal{S}_{iP}^r$ 。将构态为(Ra-1)PS的支链*i*的内轴线作为驱动约束 $\mathcal{S}_{i(RA-12)}^r$, $\mathbf{u}_i$ 为沿支链*i*的单位向量, $\mathbf{u}_{b3}$ 为垂直于支链3和它的内轴线的单位矢量。

对上述驱动选择方案展开分析,拓展到变胞并联机构的所有构型,对应构型的驱动选择数目如表1所示。

表1 所有构型驱动选择数目

Tab.1 Drive options for all configurations

构型	驱动选择数目
3(Ra-2)PS	8
2(Ra-2)PS-1(Ra-1)PS	12
2(Ra-1)PS-1(Ra-2)PS	18
3(Ra-1)PS	27

4 运动学建模与位移分析

4.1 运动学建模

考虑到(Ra)PS支链的两个构态之间的差异,可以发现,引起两种构态变化的关键原因是内轴的旋转导致内外轴线共线,当内外轴线共线时,Ra铰等效为一个虎克铰,当内外轴线不共线时,Ra铰等效为一个球铰。

根据第3节中的驱动分析方案,将(Ra-1)PS支链的内轴的转动、外轴的转动和移动副作为驱动输入。因此,(Ra-2)PS可视为(Ra-1)PS支链的一种特殊构态,通过在 $\beta_i = 0$ 时锁定内轴驱动。支链的这种特性为3(Ra)PS变胞并联机构的统一几何和运动学建模提供可能,它可以覆盖3(Ra)PS变胞并联机构的所有构型。因此,在(Ra-2)PS支链中将移动副作为驱动选择,在(Ra-1)PS支链中,将内轴的旋转和移动副作为驱动选择。

在全局坐标系下,3(Ra)PS变胞并联机构的所有构型的约束关系可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 + l_1(-s\beta_1, c\beta_1 c\alpha_1, c\beta_1 s\alpha_1) \\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 + \mathbf{R}\left(z, \frac{2\pi}{3}\right) l_2(-s\beta_2, c\beta_2 c\alpha_2, c\beta_2 s\alpha_2) \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3 + \mathbf{R}\left(z, -\frac{2\pi}{3}\right) l_3(-s\beta_3, c\beta_3 c\alpha_3, c\beta_3 s\alpha_3) \end{cases} \quad (10)$$

当支链为(Ra-1)PS时, $\beta \neq 0$;支链为(Ra-2)PS时, $\beta = 0$ 。其中, l_i 是支链长度, $\mathbf{R}(k, g)$ 表示绕*k*轴旋转一定角度*g*。

在此基础上,将3(Ra)PS的几何约束分为两部分进行描述。第一部分支链长度的约束方程为

$$(\mathbf{Ra}'_i + \mathbf{P} - \mathbf{b}_i)^2 = l_i^2 \quad (i=1,2,3) \quad (11)$$

第二部分每个支链的移动副的方向与Ra铰的内轴轴线方向始终垂直,即

$$(\mathbf{Ra}'_i + \mathbf{P} - \mathbf{b}_i)^T \mathbf{s}_i = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (12)$$

式中动平台坐标系相对于全局坐标系的旋转矩阵为 $\mathbf{R}$,动平台原点在全局坐标系中的位置矢量为 $\mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z)$,球铰中心 A_i 在动平台坐标系下的位置矢量为 $\mathbf{a}'_i$,Ra铰内轴轴线的单位方向向量为 $\mathbf{s}_i$ 。

4.2 逆运动学分析

根据给定动平台的原点位置 $\mathbf{P}$ 和姿态 $\mathbf{R}$ 获得驱动参数(支链长度 l_i 、内轴旋转角 β_i)来分析3(Ra)PS变胞并联机构的逆运动学。如图4所示,将动平台坐标系*Puvw*的原点建立在动平台原点上,其中*v*穿过 A_3 并垂直于 A_1A_2 ,*w*轴垂直于动平台,*u*轴的建立符合右手准则。

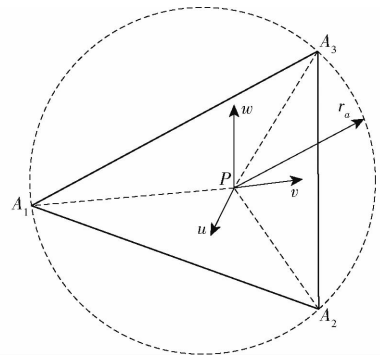


图4 动平台的局部坐标系

Fig.4 Local coordinate system of moving platform

当给出在全局坐标系下动平台的位置 $\mathbf{P}$ 和姿态矩阵 $\mathbf{R}$ 后,球形铰链的中心 A_i 的位置可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = \mathbf{P} + \mathbf{R}(0, -r_a, 0) \\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{P} + \mathbf{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_a, \frac{r_a}{2}, 0\right) \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{P} + \mathbf{R}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_a, \frac{r_a}{2}, 0\right) \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

式中 r_a ——动平台外接圆半径

在 4 种自由度的构型中,包含 (Ra-2) PS 支链的构型在求反解时平台的位置和姿态参数不能随意给定。它们应遵循方程(12)中的几何约束关系,基本规则是:当支链 i 处于 (Ra-2) PS 构型时,球铰原点 A_i 被约束在平面 Σ_0 内,因此 A_i 的位置矢量应与平面 Σ_0 的法向量垂直,可得关系式

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{14}$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = [1 & 0 & 0] \\ \mathbf{n}_2 = \left[-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \right] \\ \mathbf{n}_3 = \left[-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \right] \end{cases}$$

将式(13)代入式(14)可以获得关系式为

$$\begin{cases} p_x = 2\sqrt{3}r_{11} \\ p_x + \sqrt{3}r_{11} + 3r_{12} = \sqrt{3}p_y + 3r_{21} + 3\sqrt{3}r_{22} \\ p_x + \sqrt{3}p_y + 3r_{12} + 3\sqrt{3}r_{22} = \sqrt{3}r_{11} + 3r_{21} \end{cases} \tag{15}$$

将式(13)代入式(11),可以对 3 (Ra) PS 机构的逆运动学进行求解,即

$$\begin{cases} l_1 = \sqrt{(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) \cdot (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1)} \\ l_2 = \sqrt{\left(\mathbf{R} \left(Z, \frac{2\pi}{3} \right) \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2) \right) \cdot \left(\mathbf{R} \left(Z, \frac{2\pi}{3} \right) \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2) \right)} \\ l_3 = \sqrt{\left(\mathbf{R} \left(Z, -\frac{2\pi}{3} \right) \cdot (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) \right) \cdot \left(\mathbf{R} \left(Z, -\frac{2\pi}{3} \right) \cdot (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) \right)} \end{cases} \tag{16}$$

由第 2 节分析可知,当支链为 (Ra-2) PS 时, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ 。然而当支链为 (Ra-1) PS 时有

$$\begin{cases} \beta_1 = \arcsin \frac{|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) \cdot (1, 0, 0)|}{|(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1)|} \\ \beta_2 = \arcsin \frac{\left| \left(\mathbf{R} \left(Z, \frac{2\pi}{3} \right) \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2) \right) \cdot (1, 0, 0) \right|}{\left| \left(\mathbf{R} \left(Z, \frac{2\pi}{3} \right) \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2) \right) \right|} \\ \beta_3 = \arcsin \frac{\left| \left(\mathbf{R} \left(Z, -\frac{2\pi}{3} \right) \cdot (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) \right) \cdot (1, 0, 0) \right|}{\left| \left(\mathbf{R} \left(Z, -\frac{2\pi}{3} \right) \cdot (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) \right) \right|} \end{cases} \tag{17}$$

4.3 正运动学分析

与逆运动学分析相反,正运动学分析是在给出每个构型对应的驱动参数(l_i, β_i)的前提下,求解平台位置 $\mathbf{P}$ 和姿态矩阵 $\mathbf{R}$ 。3 (Ra) PS 变胞并联机构的正运动学分析方法是利用支链参数表示球铰中心

矢量 $\mathbf{a}_i$,建立基于平台几何参数的约束方程。根据图 4,动平台几何约束可以描述为

$$\begin{cases} (\sqrt{3}r_a)^2 = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)^2 \\ (\sqrt{3}r_a)^2 = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)^2 \\ (\sqrt{3}r_a)^2 = (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1)^2 \end{cases} \tag{18}$$

将全局坐标中的每个向量 $\mathbf{a}_i$ 代入方程(18)并用 $\cos\alpha_i = (1 - t_i^2)/(1 + t_i^2)$ 、 $\sin\alpha_i = 2t_i/(1 + t_i^2)$ 进行替换,可得

$$\begin{cases} f_1(1, t_1^2, t_2^2, t_1 t_2, t_1^2 t_2^2) = 0 \\ f_2(1, t_1^2, t_3^2, t_1 t_3, t_1^2 t_3^2) = 0 \\ f_3(1, t_2^2, t_3^2, t_2 t_3, t_2^2 t_3^2) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

其中 $f_i(\cdot)$ 是关于 t_i 的线性函数,方程系数仅取决于已知的结构参数。对方程组(19)中的前 2 个方程,使用 Sylvester 结式消元法消去 t_1 ,可以得到一个只含有 t_2, t_3 的新方程

$$f_4(1, t_2^2, t_3^2, t_2 t_3, t_2^2 t_3^2, t_2^4 t_3^2, t_2^2 t_3^4, t_2^3 t_3^3, t_2^4 t_3^3, t_2^3 t_3^4, t_2^4 t_3^4) = 0 \tag{20}$$

对式(19)中的 f_3 和式(20)中的 f_4 使用相同的方法,可以获得一个只含有未知变量 t_3 的多项式为

$$\sum_{i=0}^{16} h_i t_3^i = 0 \tag{21}$$

其中系数 h_i 是一个只与输入参数有关的常数。表明方程(21)是一个只包含变量 t_3 的 16 阶的单变量方程。对式(21)进行求解就可得到 16 个 t_3 的解。通过将 t_3 的每一个解代入方程(19)中的第 3 个方程并选择满足的根来求解 t_2 。 t_1 可以通过将 t_2 和 t_3 的每一对解代入方程(19)中的第 1 个方程求得,并代入式(19)中的第 2 个方程来验证是否正确。在此基础上,将 t_1, t_2, t_3 的 16 对解代入几何约束方程 $\alpha_i = 2\arctan t_i$ 中,可以得到每个支链与底座平面的夹角。并通过方程(20)计算出球铰中心 A_i 的坐标。

如图 4 所示,动平台的位置和位姿可以使用 3 个球铰的中心坐标确定,即

$$\begin{cases} \mathbf{w} = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1) / \|(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1)\| \\ \mathbf{u} = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) / \|(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)\| \\ \mathbf{v} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \\ \mathbf{R} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{P} = \mathbf{a}_1 + r_a \mathbf{v} \end{cases} \tag{22}$$

将正解得到的 3 个 A_i 的坐标代入式(22)获得动平台坐标系中坐标轴的向量,获得动平台的位置坐标和姿态矩阵。

5 运动学分析的数值算例

图 3 所示的 3 (Ra) PS 变胞并联机构动平台和

底座的外接圆半径分别为： $r_a = 10\text{ cm}$ ， $r_b = 20\text{ cm}$ 。

通过数字实例验证逆运动学的准确性，根据第 4 节的运动学分析，3(Ra)PS 变胞并联机构的 4 种构型的逆运动学实例如表 1 所示。通过给出平台的姿态和位置参数，并通过式(16)、(17)得到的逆运动学结果如表 2 所示。

表 2 运动学反解结果			
Tab.2 Results of inverse kinematics			
构型	运动副类型	输入参数	输出参数
3(Ra-2)PS	2R1T	$\mathbf{R}_1, \mathbf{P}_1$	$L_1 = 23.834\text{ cm}, L_2 = 25.552\text{ cm},$ $L_3 = 32.473\text{ cm}$
2(Ra-2)PS-1(Ra-1)PS	3R1T	$\mathbf{R}_2, \mathbf{P}_2$	$L_1 = 26.374\text{ cm}, L_2 = 27.088\text{ cm},$ $L_3 = 28.959\text{ cm}, \beta_1 = -0.230\text{ rad}$ $L_1 = 25.739\text{ cm}, L_2 = 25.132\text{ cm},$ $L_3 = 31.163\text{ cm}, \beta_2 = 0.106\text{ rad},$ $\beta_3 = -0.077\text{ rad}$
2(Ra-1)PS-1(Ra-2)PS	3R2T	$\mathbf{R}_3, \mathbf{P}_3$	$L_1 = 26.850\text{ cm}, L_2 = 25.040\text{ cm},$ $L_3 = 30.772\text{ cm},$ $\beta_1 = -0.056\text{ rad}, \beta_2 = 0.177\text{ rad},$ $\beta_3 = -0.135\text{ rad}$
3(Ra-1)PS	3R3T	$\mathbf{R}_4, \mathbf{P}_4$	

由于不同的构型位置和姿态参数的关系也不相同。求反解时各构型对应的输入旋转矩阵和动平台位置坐标为

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}\left(x, \frac{\pi}{8}\right) \mathbf{R}\left(y, \frac{\pi}{8}\right) \mathbf{R}(z, 0.462) =$$
$$\begin{bmatrix} 0.827 & -0.411 & 0.383 \\ 0.543 & 0.762 & -0.354 \\ -0.146 & 0.500 & 0.854 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}\left(x, \frac{\pi}{8}\right) \mathbf{R}\left(y, \frac{\pi}{8}\right) \mathbf{R}\left(x, \frac{\pi}{8}\right) =$$
$$\begin{bmatrix} 0.854 & -0.354 & 0.383 \\ 0.489 & 0.798 & -0.354 \\ -0.180 & 0.489 & 0.854 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{P}_1 = (8.27, -4.20, 20) \quad \mathbf{P}_2 = (2.53, -1.54, 20)$$
$$\mathbf{P}_3 = (7.029, -1.513, 20) \quad \mathbf{P}_4 = (7.029, 0.487, 20)$$

在构型 3(Ra-2)PS 下，绕 $x、y、z$ 轴转动 $\pi/8$ 的旋转矩阵为 $\mathbf{R}_1$ ，并且动平台原点的位置坐标为 $\mathbf{P}_1$ ，根据式(15)的 3 个约束方程求出位姿参数。

在构型 2(Ra-2)PS-1(Ra-1)PS 下，绕 $x、y、z$ 轴转动 $\pi/8$ 的旋转矩阵为 $\mathbf{R}_2$ ，动平台原点的位置坐标为 $\mathbf{P}_2$ ，根据式(15)的后两个约束方程可求出位姿参数。

当构型自由度大于等于 4 时，并联机构的构型都具有绕 $x、y、z$ 轴的 3 个转动，因此选用的输入旋转矩阵 $\mathbf{R}_3、\mathbf{R}_4$ 与 $\mathbf{R}_2$ 相同。

动平台原点位置参数 $\mathbf{P}_3$ 可根据 $\mathbf{R}_3$ 和式(15)的

第 3 个方程获得。

由于构型 3(Ra-2)PS 自由度为 6，动平台没有约束，因此 $\mathbf{P}_4$ 只需在给定姿态动 $\mathbf{R}_4$ 后任意选取即可。

为验证统一运动学正解的分析方法，变胞并联机构 3(Ra)PS 的每一个构型都有 16 个解，表 3~6 分别列出每个构型的数值正解作为示例。

表 3 3(Ra-2)PS 正解实例				
Tab.3 Forward results of 3(Ra-2)PS rad				
输出参数	1	2	3	4
α_1	± 0.613	± 1.100	± 1.234	± 1.192
α_2	± 1.193	± 1.289	± 1.354	± 1.114
α_3	± 1.190	± 1.080	± 1.062	± 0.279

表 4 2(Ra-2)PS-1(Ra-1)PS 正解实例				
Tab.4 Forward results of 2(Ra-2)PS-1(Ra-1)PS rad				
输出参数	1	2	3	4
α_1	± 0.613	± 1.100	± 1.234	± 1.192
α_2	± 1.193	± 1.289	± 1.354	± 1.114
α_3	± 1.190	± 1.080	± 1.023	± 0.343

表 5 2(Ra-1)PS-1(Ra-2)PS 正解实例				
Tab.5 Forward results of 2(Ra-1)PS-1(Ra-2)PS rad				
输出参数	1	2	3	4
α_1	± 1.307	± 1.366	± 1.427	± 1.219
α_2	± 1.067	± 1.155	± 1.236	± 1.169
α_3	± 1.161	± 1.111	± 1.049	± 0.294

表 6 3(Ra-1)PS 正解实例				
Tab.6 Forward results of 3(Ra-1)PS rad				
输出参数	1	2	3	4
α_1	± 1.386	± 1.390	± 1.521	± 1.285
α_2	± 1.032	± 1.038	± 1.236	± 1.178
α_3	± 1.161	± 1.117	± 1.049	± 0.294

6 结论

(1) 阐述一种新型变胞铰链 Ra 铰，该铰链可以实现球铰与虎克铰两种构态的切换。通过改变(Ra)PS 支链的构型演示变胞并联机构 3(Ra)PS 的构型变化，说明该机构具有 4 种构型，在 2R1T、3R1T、3R2T 和 6 自由度之间具有可重构的能力。

(2) 根据驱动约束分析表明，对于不同的构型结构给出合理的驱动方案。选择绕内轴的旋转作为驱动，将一个构态作为另一个构态的特例，为(Ra)PS 支链的运动学建模提供可能，在此基础上，建立3(Ra)PS 变胞型并联机构的运动学模型，对并联机构进行正逆运动学分析。

(3) 通过数值实例证明机构构型分析与实际解相符，证明了理论结果的正确性。

参 考 文 献

- [1] TSAI L W, JOSHI S. Kinematic analysis of 3 - DOF position mechanisms for use in hybrid kinematic machines[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2):245 - 253.
- [2] GAN Dongming, DAI Jiansheng, LIAO Qizheng. Mobility change in two types of metamorphic parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2009, 1(4):041007.
- [3] DAI Jiansheng, JONES J R. Mobility in metamorphic mechanisms of foldable/erectable kinds[J]. Journal of Mechanical Design, 1999, 121(3):375 - 382.
- [4] YAN Hongsen, KUO C H. Topological representations and characteristics of variable kinematic joints[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2006, 128(2):384 - 391.
- [5] KUO C H, YAN Hongsen. On the mobility and configuration singularity of mechanisms with variable topologies[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2007, 129:617 - 624.
- [6] KONG Xianwen. Reconfiguration analysis of a 3 - DOF parallel mechanism using Euler parameter quaternions and algebraic geometry method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 74:188 - 201.
- [7] KONG Xianwen. Type synthesis of 3 - DOF parallel manipulators with both a planar operation mode and a spatial translational operation mode[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(4):041015.
- [8] ZHANG Ketao, DAI Jiansheng, FANG Yuefa. Topology and constraint analysis of phase change in the metamorphic chain and its evolved mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, 2010, 132(12):121001.
- [9] ALLAN D, FINISTAURI A D. Reconfiguration analysis of a fully reconfigurable parallel robot[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(4):041002.
- [10] YE Wei, FANG Yuefa, ZHANG Ketao. Mobility variation of a family of metamorphic parallel mechanisms with reconfigurable hybrid limbs[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2016, 41(10):145 - 162.
- [11] YE Wei, FANG Yuefa, ZHANG Ketao. A new family of reconfigurable parallel mechanisms with diamond kinematotropic chain [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 74:1 - 9.
- [12] LI Qinchuan, HERVE J M. Parallel mechanisms with bifurcation of schoenflies motion[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(1):158 - 164.
- [13] GAN Dongming, DAI Jiansheng, SENEVIRATNE L. Reconfigurability and unified kinematics modeling of a 3rTPS metamorphic parallel mechanism with perpendicular constraint screws[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2013, 29(4):121 - 128.
- [14] NURAHMI L, GAN Dongming. Reconfiguration of a 3 -(rR)PS metamorphic parallel mechanism based on complete workspace and operation mode analysis[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2019, 12(1):1 - 23.
- [15] GAN Dongming, DAI Jiansheng, SENEVIRATNE L. Unified kinematics and optimal design of a 3rRPS metamorphic parallel mechanism with a reconfigurable revolute joint[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 96:239 - 254.
- [16] ZHANG Ketao, DAI Jiansheng, FANG Yuefa. Geometric constraint and mobility variation of two 3svpsv metamorphic parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2013, 135(1):011001.
- [17] CARBONARI L, CORINALDI D, PALMIERI G. Kinematics of a novel 3 - URU reconfigurable parallel robot [C] // Proceedings of the International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots (ReMAR), IEEE, 2018:1 - 7.
- [18] YE Wei, CHAI Xinxue, ZHANG Ketao. Kinematic modeling and optimization of a new reconfigurable parallel mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 149(2):103850.
- [19] 叶伟,李秦川,张克涛. 一种运动部分解耦的 2R2T 并联机构运动学与性能分析[J]. 农业机械学报, 2019, 50(1):374 - 382.
YE Wei, LI Qinchuan, ZHANG Ketao. Kinematics and performance analysis of 2R2T parallel manipulator with partially decoupled motion[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(1):374 - 382. (in Chinese)
- [20] 胡旭宇,刘宏昭. 三构态驱动变胞并联球铰设计与分析[J]. 农业机械学报, 2019, 50(9):421 - 426.
HU Xuyu, LIU Hongzhao. Design and analysis of actuated metamorphic parallel spherical joint of three configurations[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(9):421 - 426. (in Chinese)
- [21] 胡旭宇,刘宏昭. 含恰约束支链的驱动变胞机构构型综合与分析[J]. 农业机械学报, 2020, 51(1):383 - 390.
HU Xuyu, LIU Hongzhao. Type synthesis and analysis of class of actuated metamorphic mechanisms with suitable constrained branch[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(1):383 - 390. (in Chinese)
- [22] 畅博彦,金国光,王艳. 并联式球面变胞机构及其完整雅可比矩阵[J]. 农业机械学报, 2013, 44(10):260 - 265.
CHANG Boyan, JIN Guoguang, WANG Yan. Parallel spherical metamorphic mechanism and its complete Jacobian matrix[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(10):260 - 265. (in Chinese)
- [23] 沈惠平,王达,李菊,等. 1T2R 并联机构拓扑降耦设计与运动性能分析[J]. 农业机械学报, 2021, 52(5):370 - 377, 426.
SHEN Huiping, WANG Da, LI Ju, et al. Topological coupling-reducing design and kinematic performance analysis for 1T2R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(5):370 - 377, 426. (in Chinese)
- [24] 温如凤,方跃法,叶伟. 具有耦合分支的两转动两移动并联机构分析与优化[J]. 农业机械学报, 2021, 52(7):402 - 410.
WEN Rufeng, FANG Yuefa, YE Wei. Analysis and optimization of 2R2T parallel mechanism with coupling kinematic chain [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(7):402 - 410. (in Chinese)