

机器人末端运动特征几何化描述与分析方法

叶梅燕^{1,2} 石志新¹ 罗玉峰^{1,3}

(1. 南昌大学机电工程学院, 南昌 330031; 2. 南昌大学理学院, 南昌 330031;
3. 华东交通大学机电与车辆工程学院, 南昌 330013)

摘要: 针对现有运动特征信息不完整以及代数分析方法较为抽象的现状,提出了基于高斯几何学的机器人末端运动特征几何化描述与分析方法。首先,基于高斯几何学将直线、曲线、平面以及曲面等均视作可描述末端运动特征的独立空间,进而建立了基于高斯几何学的运动特征描述模型;然后,基于该描述模型制定了末端运动特征的求并和求交运算规则,并提出了机器人末端运动特征的分析方法;最后,结合实例验证了上述几何化描述与分析方法的有效性。

关键词: 机器人; 运动特征; 几何化方法

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2019)03-0388-08

Geometric Description and Analysis Method for Motion Characteristics of Robot End-effector

YE Meiyang^{1,2} SHI Zhixin¹ LUO Yufeng^{1,3}

(1. School of Mechanical and Electronic Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China
2. School of Science, Nanchang University, Nanchang 330031, China
3. School of Mechatronics and Vehicle Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Topological structure is the most original part of mechanical system design. The premise of structure synthesis depends on complete description and accurate analysis of the motion characteristics. And the motion characteristic is not only the design objective of type synthesis, but also the judgment whether the obtained mechanism meets the requirements. The existing indexes of motion characteristics only contain three kinds of information: motion type (translation and rotation), motion direction and the dimension of motion space, but they lack the overall geometric shape of motion space, which will lead to insufficient information of motion characteristics and incomplete type expressions. To solve this problem, a geometric description and analysis method for the motion characteristics of robot end-effector was proposed based on Gaussian geometry. Firstly, a geometric description model of motion characteristics was established, which included overall geometric shape of motion space. Secondly, the relevant operation rules of motion characteristics were formulated, which made the intersection of all limbs' motion characteristics for parallel mechanism relatively straightforward and simple. And a geometric analysis method for the motion characteristics of robot end-effector was presented. Finally, the validity of the geometric description and analysis method was verified by some concrete examples. Compared with the algebraic method, the geometric analysis method for the motion characteristics of the robot end-effector was much simpler and more intuitive, which had obvious advantages especially for mechanisms with bending motion characteristics.

Key words: robot; motion characteristic; geometric method

收稿日期: 2018-09-13 修回日期: 2018-10-24
基金项目: 国家自然科学基金项目(51365036)
作者简介: 叶梅燕(1978—),女,博士生,讲师,主要从事机器人机构学研究,E-mail: yemeiyan@ncu.edu.cn
通信作者: 石志新(1979—),男,副教授,博士,主要从事机器人机构学研究,E-mail: shizhixin@ncu.edu.cn

0 引言

构型综合的前提和关键在于对末端构件运动特征的完整描述和准确分析。末端运动特征既是构型综合的设计目标,又是分析判定所得机构是否符合要求的依据,因此其表达类型的完整性直接决定综合结果的完备性,其分析方法的准确性与难易程度直接关系到综合方法的有效性。

目前已形成 4 种理论方法:螺旋理论方法^[1-6]、位移子群/流形方法^[7-11]、方位特征集方法^[12-19]和 G_r 集理论方法^[20-23]。上述理论方法推动了机器人机构学的迅猛发展,然而仍然存在一些问题:①运动特征信息不完整,机构类型表达不全面。现有运动特征指标中仅含运动类型、运动方向和运动空间维数这 3 类信息,缺少运动空间整体形态信息。②现有理论方法大多依赖现代代数工具。这些代数方法较为抽象,不易理解,且难以确定运动空间的整体形态,因此有必要提出简单、直观的几何化方法。③矢量线性运算规则不适用于弯曲平移运动特征。方位特征集理论采用矢量描述构件的运动方向,并且利用矢量线性相关性制定了各种运算规则。对于具有弯曲平移特征的机构而言,其移动方向时刻变化,难以采用矢量进行描述,因此相应的矢量线性运算规则不再适用。

本文提出基于高斯几何学的几何化描述与分析方法。首先借鉴高斯几何学将直线、曲线、平面以及曲面等均视作可描述末端运动特征的独立空间,进而建立基于高斯几何学的运动特征描述模型;然后基于该描述模型制定末端运动特征的求并和求交运算规则;最后结合实例提出机器人末端运动特征的分析方法。

1 末端构件运动特征的描述方法

机器人末端构件的运动属于刚体运动,它包括平移运动(简称移动)和旋转运动(简称转动)2 种运动类型。因此机器人末端构件的运动特征应由转动特征和移动特征共同组成,即

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} T_c \\ R_c \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ ——末端构件运动特征集
 T_c ——末端构件移动特征
 R_c ——末端构件转动特征

1.1 移动特征

为了清晰描述机器人末端构件的移动特征,给出如下定义:

定义 1:末端构件作平移运动(姿态保持不变)

时,构件上任意一点的轨迹均相同,该轨迹称为末端构件的移动空间(记为 T)。

值得注意的是,移动空间包括平直空间(即轨迹为直线或平面)和弯曲空间(即轨迹为曲线或曲面)2 种情况。如平行四边形机构中连杆作圆周曲线平移运动,连杆上任意一点的轨迹均为圆周曲线,因此其移动空间为弯曲空间。

对于平直空间而言,其维数和基向量可直接反映独立移动数目及方向。然而由于弯曲空间不存在基向量,因此除了维数外,还应给出其整体形态和生成方式等信息。考虑到平直空间属于弯曲空间的特例,采用统一模型来描述移动特征,其形式为

$$T_c = t^p(T) = t^p(w, N) \tag{2}$$

式中 t ——移动
 p ——移动空间维数
 w ——移动空间整体形态
 N ——移动空间生成方式

值得注意的是:①基于高斯几何学的基本思想,直线和曲线被视为 1 维独立空间,平面和曲面被视为 2 维独立空间。②0 维和 3 维移动空间无需记录整体形态和生成方式,因此其移动特征可分别表示为 t^0 和 t^3 。

1.2 转动特征

旋转运动可利用旋转轴进行刻画,因此旋转轴的数目和方向可反映机器人末端构件的转动特征。为了清晰描述转动特征,给出如下定义:

定义 2:末端构件所有允许的旋转方向单位矢量的集合称为转动特征集(记为 S)。

根据定义 2 不难发现,转动特征集中向量的个数和向量的方向可直接分别反映旋转轴的数目和方向。因此转动特征可表示为

$$R_c = r^q(S) \tag{3}$$

式中 r ——转动
 S ——转动特征集
 q ——转动特征集维数

转动特征集表示方法包括:①0 维转动特征集表示末端构件不存在任何方向的旋转运动,故转动特征可表示为 r^0 。②1 维转动特征集可表示为 $r^1(I)$,其中 I 为 1 维转动轴线方向单位矢量。③2 维转动特征集可表示为 $r^2(I_1, I_2)$,其中 I_1 和 I_2 为转动轴线方向单位矢量。④3 维转动特征集表示末端构件可绕任意方向作旋转运动,因此转动特征可表示为 r^3 。

2 串联机构末端构件的运动特征

由于串联机构是由若干个运动副依次串联而

成,因此串联机构末端构件的运动特征集是各运动副运动输出特征的并集,即可表示为

$$M_s = \bigcup_{i=1} M_i \tag{4}$$

式中 M_s ——串联机构的运动特征集
 M_i ——第 i 个运动副的输出特征

2.1 单个运动副的运动输出特征

机器人机构的运动副类型较多,常见运动副包括:转动副、移动副、球副、胡克铰、圆柱副等。为了分析方便,可采运动副等效替换的方法将它们简化为只含转动副和移动副 2 种。例如,球副等效为 3 个轴线汇交于 1 点的转动副,胡克铰等效为 2 个轴线垂直正交的转动副,圆柱副等效为共轴的转动副和移动副。

(1)移动副(P 副)的运动输出特征。由于 P 副仅产生直线平移运动,其移动空间整体形态为直线,并且该移动空间由 P 副生成,因此根据式(2)可知,移动副的运动输出特征可表示为 $t^1(\text{直线}, P)$,其中 P 为 P 副的方向矢量。

(2)转动副(R 副)的运动输出特征。转动副不仅能产生绕其轴线的运动,而且可衍生出垂直于轴线方向的圆周曲线平移运动,即其运动特征具有二重性。可按如下规则选取:①优先取旋转运动作为运动输出特征,记为 $r^1(R)$,其中 R 为 R 副轴线方向矢量。②若已有运动副产生了与该转动副旋转方向相同的旋转运动,则该转动副将会衍生圆周曲线平移(图 1),此时应取衍生圆周曲线平移作为其运动输出特征,记为 $t^1(\text{圆}, R)$ 。

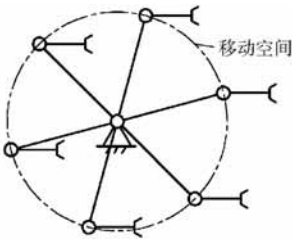


图 1 R || R 机构的移动空间

Fig. 1 Structure diagrams of R || R mechanism

2.2 运动特征求并运算规则

2.2.1 转动特征的求并运算规则

根据定义 1 可知,转动特征是方向矢量的集合,因此转动特征 R_c 可利用矢量线性相关性进行分析确定,具体运算规则如下。

(1) r^0 与 r^1 的求并运算规则

$$r^0 \cup r^1(R) = r^1(R)$$

(2) r^1 与 r^1 的求并运算规则

当 $R_1 \parallel R_2$ 时, $r^1(R_1) \cup r^1(R_2) = r^1(R_1)$, 否则求并结果为 $r^2(R_1, R_2)$ 。

(3) r^2 与 r^1 的求并运算规则

当 R_3 可由向量组 (R_1, R_2) 线性表示时, $r^2(R_1, R_2) \cup r^1(R_3) = r^2(R_1, R_2)$, 否则求并结果为 r^3 。

(4) r^3 与 r^1 的求并运算规则

$$r^3 \cup r^1(R) = r^3$$

2.2.2 移动特征的求并运算规则

移动特征求并运算共存在如下 4 条规则:

(1) t^0 与 t^1 的求并运算规则

$$t^0 \cup t^1(w, N) = t^1(w, N)$$

(2) t^1 与 t^1 的求并运算规则

按移动空间类型划分,存在如下 3 种情况:

① $t^1(\text{直线}, P_1) \cup t^1(\text{直线}, P_2)$ 。若 $P_1 \parallel P_2$ 则 $T_c = t^1(\text{直线}, P_1)$, 否则 $T_c = t^2(\text{平面}, n)$, 其中 n 为该平面的法向量。

② $t^1(\text{直线}, P) \cup t^1(\text{圆}, R)$ 。考虑直线和圆所在平面全部可能的方位关系及布置顺序,其移动特征 T_c 存在 3 种情况,具体包括: $t^2(\text{平面}, R)$ 、 $t^2(\text{圆柱面}, P + R)$ 和 $t^2(\text{圆锥面}, P + R)$, 其中 $P + R$ 表示该移动空间由 P 副和 R 副产生的平移经运动合成而成(下同)。其详细求并结果和相应示例如表 1 所示。

③ $t^1(\text{圆}, R_1) \cup t^1(\text{圆}, R_2)$ 。考虑两圆所在平面的全部可能方位关系,其移动特征 T_c 存在 3 种情况,具体包括: $t^2(\text{平面}, R_1)$ 、 $t^2(\text{环面}, R_1 + R_2)$ 和 $t^2(\text{球面}, R_1 + R_2)$ 。其详细求并结果和相应示例如表 2 所示。

表 1 和表 2 中部分示例机构的移动空间如图 2 所示。

(3) t^2 与 t^1 的求并运算规则

一般而言, t^2 与 t^1 的求并结果为 t^3 , 但存在 3 种特殊情况:

① $t^2(\text{平面}, n) \cup t^1(\text{直线}, P)$ 。若 $P \perp n$ 则移动特征 $T_c = t^2(\text{平面}, n)$, 否则 $T_c = t^3$ 。

② $t^2(\text{平面}, n) \cup t^1(\text{圆}, R)$ 。若 $R \parallel n$ 则移动特征 $T_c = t^2(\text{平面}, n)$, 否则 $T_c = t^3$ 。

③ $t^2(\text{圆柱面}, P_1 + R) \cup t^1(\text{直线}, P_2)$ 。若 $P_1 \parallel P_2$ 则 $T_c = t^2(\text{圆柱面}, P_1 + R)$, 否则 $T_c = t^3$ 。

(4) t^3 与 t^1 的求并运算规则

$$t^3 \cup t^1(w, N) = t^3$$

2.3 串联机构运动特征分析方法及实例

2.3.1 串联机构运动特征分析方法

串联机构运动特征分析方法和步骤如下:

(1)赋初值。将转动特征集和移动特征集的初值均赋为空集,即 $R_c = r^0, T_c = t^0$ 。

(2)确定运动副的运动输出特征。①当第 i 个

表 1 直线平移和圆周平移的求并运算规则

Tab.1 Union operation rules of line translation and circular translation

	方位关系			
	直线与圆所在的平面平行		直线与圆所在的平面垂直	
			直线与圆所在的平面斜交	
			P副位于两R副边上	P副位于两R副中间
	R(⊥P)R机构		P'R'R机构	R'(P)R机构
示例				
移动空间	平面		斜圆柱面	圆锥面
整体形态				
移动特征	$t^1(\text{平面}, R)$		$t^1(\text{圆柱面}, P+R)$	$t^1(\text{圆锥面}, P+R)$

表 2 两圆周平移经求并运算后的移动特征
Tab.2 Union operation rules of two circular translation

	方位关系		
	两圆所在的平面平行		两圆所在的平面相交
			两圆心不重合
	R R R机构	R R ₁ ⊥R' R ₂ 机构	R R ₁ R ₂ 机构
示例			
移动空间	平面	环面	4R ₁ 为平行四边形机构 球面
整体形态			
移动特征	$t^1(\text{平面}, R)$	$t^1(\text{环面}, R_1+R_2)$	$t^1(\text{球面}, R_1+R_2)$

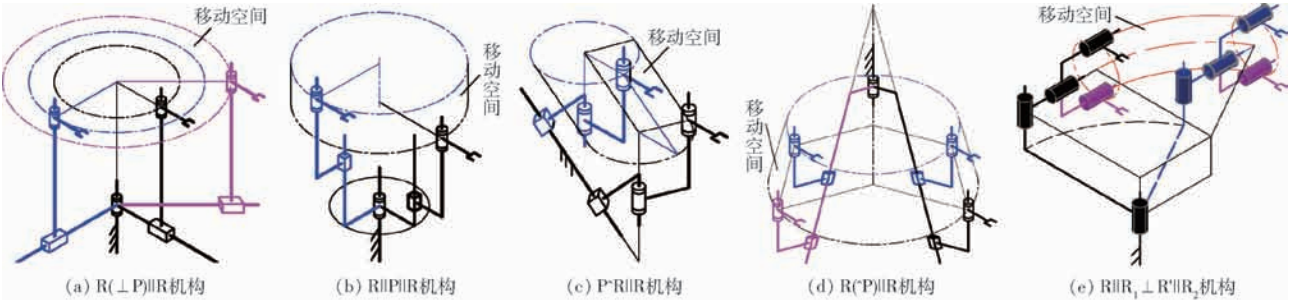


图 2 表 1 和表 2 中部分机构的移动空间

Fig.2 Translation spaces of some mechanisms in Tab.1 and Tab.2

T_c , 得到末端构件运动特征集 M 。

2.3.2 实例分析

例 1: 利用上述运动特征分析方法, 分析图 3 串联机构末端构件的运动特征。

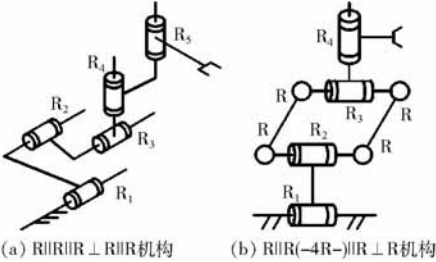


图 3 机构简图(例 1)

Fig.3 Structure diagrams of example 1

运动副为移动副 P_i 时, 其运动输出特征唯一, 并且运动输出特征为 $t^1(\text{直线}, P_i)$ 。②当第 i 个运动副为转动副 R_i 时, 优先取其旋转运动作为运动输出特征, 判断矢量 R_i 能否由转动特征集 S 中的向量线性表示, 若否, 则取其运动输出特征为 $r^1(R_i)$; 若是, 则取其衍生平移运动 $t^1(\text{圆}, R_i)$ 作为运动输出特征。

(3) 运动特征集的更新。根据 2.2 节介绍的求并运算规则, 更新运动特征集。

(4) 循环。从 $i=1$ 开始, 重复步骤 (2) 和 (3), 直到 $i=n$ 终止, 其中 n 为经运动副等效替换后机构所有运动副数目之和。

(5) 结束。输出最终的转动特征 R_c 和移动特征

根据上述串联机构运动特征分析方法, 图 3a 机构运动特征分析步骤及结果如下:

(1) 赋初值

$$R_c = r^0 \quad T_c = t^0$$

(2) 确定运动副的运动输出特征

当 $i=1$ 时, 第 1 个运动副为转动副 R_1 , 此时转动特征集 $R_c = r^0$, 转动特征集 S 为空集, 故方向矢量 R_1 不能被 S 中的向量线性表示, 因此转动副 R_1 的运动输出特征为 $r^1(R_1)$ 。

(3) 运动特征集的更新

由转动特征求并运算规则 (1) 可知, 转动特征集 $R_c = r^0 \cup r^1(R_1) = r^1(R_1)$, 移动特征集 T_c 保持上

步结果 t^0 不变。

(4) 循环(重复步骤(2)和(3))

当 $i=2$ 时,第 2 个运动副为 R_2 ,由于 $R_2 \parallel R_1$,故 R_2 能被 R_1 线性表示,因此 R_2 的运动输出特征取为衍生平移运动 $t^1(\text{圆}, R_2)$ 。由移动特征求并运算规则(1)可知: $T_c = t^0 \cup t^1(\text{圆}, R_2) = t^1(\text{圆}, R_2)$ 。 R_c 保持上步结果 $r^1(R_1)$ 不变。

当 $i=3$ 时,第 3 个运动副为 R_3 ,由于 $R_3 \parallel R_1$,故其运动输出特征取为 $t^1(\text{圆}, R_3)$ 。由于 $R_2 \parallel R_3$,根据移动特征求并运算规则(2)中的情况③可知: $T_c = t^1(\text{圆}, R_2) \cup t^1(\text{圆}, R_3) = t^2(\text{平面}, R_2)$ 。 R_c 保持上步结果 $r^1(R_1)$ 不变。

当 $i=4$ 时,第 4 个运动副为转动副 R_4 。由于 R_4 与 R_1 不平行, R_4 不能被 R_1 线性表示,故其运动输出特征取为 $r^1(R_4)$,因此根据转动特征求并运算规则(2)可知 $R_c = r^1(R_1) \cup r^1(R_4) = r^2(R_1, R_4)$ 。 T_c 保持上步结果 $t^2(\text{平面}, R_2)$ 不变。

当 $i=5$ 时,第 5 个运动副为转动副 R_5 。由于 $R_5 \parallel R_4$,故 R_5 能被向量组 (R_1, R_4) 线性表示,因此其运动输出特征取为 $t^1(\text{圆}, R_5)$ 。由于 R_2 与 R_5 不平行,依移动特征求并运算规则(3)中的情况②可知: $T_c = t^2(\text{平面}, R_2) \cup t^1(\text{圆}, R_5) = t^3$ 。 R_c 保持上步结果 $r^2(R_1, R_4)$ 不变。

(5) 输出末端构件运动特征集 M

$$M = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2(R_1, R_4) \end{matrix} \right] \tag{5}$$

图 3b 机构运动特征主要分析步骤及结果如下:首先,容易分析得到 $R_1 \parallel R_2 \parallel R_3$ 的转动特征和移动特征分别为 $r^1(R_1)$ 和 $t^2(\text{平面}, R_2)$ 。其次,不难判定平行四边形机构(4R)和运动副 R_4 的运动输出特征分别为 $t^1(\text{圆}, R)$ 和 $r^1(R_4)$ 。最后,依求并运算规则可知:该机构移动特征集为 $T_c = t^2(\text{平面}, R_2) \cup t^1(\text{圆}, R) = t^3$,转动特征集为 $R_c = r^1(R_1) \cup r^1(R_4) = r^2(R_1, R_4)$ 。因此该机构末端构件运动特征集亦为式(5)。

3 并联机构动平台的运动特征

3.1 并联机构动平台运动特征的分析方法

由于动平台是在各支链共同作用下进行运动,因此并联机器人机构动平台的运动特征是各支链末端运动特征的交集。

3.1.1 动平台转动特征的分析方法

根据定义 2 可知,转动特征集是转动轴线方向单位向量的集合,因此分析并联机构动平台转动特征的问题,可转化为确定各支链转动特征集的公共

向量问题,具体分析如下:

设并联机构有 m 条支链组成,各支链转动特征集及其维数分别记为 S_j 和 q_j ,其中 $j=1, 2, \dots, m$,则并联机构动平台的转动特征 R_c 可表示为

$$R_c = \bigcap_{j=1}^m r^{q_j}(S_j) \tag{6}$$

由于式(6)中 m 个转动特征集均为单位向量的集合,因此由线性代数知识不难确定它们的公共向量(记为 S),进而得公共向量 S 的维数 q ,从而得到并联机构动平台的转动特征。

3.1.2 各支链末端移动特征的求交运算规则

根据定义 1 可知,移动空间不属于线性空间,不能利用线性相关性得到求交运算结果。由于各支链移动空间的整体形态特征已知,因此可采用几何方法分析确定出求交运算结果。

(1) t^0 与其他移动特征的求交运算规则

$$t^0 \cap t^p(w, N) = t^0$$

(2) t^1 与 t^1 的求交运算规则

按移动空间类型划分,存在如下 3 种情况:

① $t^1(\text{直线}, P_1) \cap t^1(\text{直线}, P_2)$ 。空间两直线的位置关系存在平行、相交和交叉 3 种情况。当且仅当两直线相互平行时,二者交集为一段连续的位移空间,故 $P_1 \parallel P_2$ 时 $T_c = t^1(\text{直线}, P_1)$,否则 $T_c = t^0$ 。

② $t^1(\text{直线}, P) \cap t^1(\text{圆}, R)$ 。由于直线和圆的交集不是一段连续的位移空间,因此 $T_c = t^0$ 。

③ $t^1(\text{圆}, R_1) \cap t^1(\text{圆}, R_2)$ 。如表 3 所示,二者的求交结果一般为 t^0 ,但存在如下特殊情况:当两圆所在平面平行,两圆大小相等,且机构末端构件分别联接在两圆的对应位置点上时,二者的求交结果为 $T_c = t^1(\text{圆}, R_1)$ 。

表 3 两圆周平移的求交运算规则

Tab.3 Intersection operation rules of two circular translation

序号	实例	移动特征
1		t^0
2		t^0
3		$t^1(\text{圆}, R_1)$

值得注意的是,两圆大小相等需要由构件的尺寸保证,但在进行机构拓扑结构分析与综合时,一般不考虑构件的具体尺寸,因此本文后续求交运算规则中均不考虑构件尺寸对机构末端运动特征的影响,即默认各支链移动空间的大小不相等。

(3) t^1 与 t^2 的求交运算规则

按移动空间类型划分,存在如下 7 种情况:

① $t^1(\text{直线}, \boldsymbol{P}) \cap t^2(\text{平面}, \boldsymbol{n})$ 。当且仅当直线和平面平行(即 $\boldsymbol{P} \perp \boldsymbol{n}$)时,二者交集为一段连续的位移空间,求交结果为 $T_c = t^1(\text{直线}, \boldsymbol{P})$,否则 $T_c = t^0$ 。

② $t^1(\text{直线}, \boldsymbol{P}_1) \cap t^2(\text{圆柱面}, \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{R})$ 。当且仅当直线和圆柱面的素线平行(即 $\boldsymbol{P}_1 \parallel \boldsymbol{P}_2$)时,求交结果为 $T_c = t^1(\text{直线}, \boldsymbol{P}_1)$,否则 $T_c = t^0$ 。

③ $t^1(\text{直线}, \boldsymbol{P}_1) \cap t^2(\text{圆锥面}, \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{R})$ 。当且仅当直线和圆锥面的素线平行(即 $\boldsymbol{P}_1 \parallel \boldsymbol{P}_2$)时,二者交集 $T_c = t^1(\text{直线}, \boldsymbol{P}_1)$,否则 $T_c = t^0$ 。

④ $t^1(\text{直线}, \boldsymbol{P}) \cap t^2(\text{环面}, \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2)$ 。由几何知识可知直线和环面的交集不是一段连续的位移空间,因此二者求交结果为 $T_c = t^0$ 。

⑤ $t^1(\text{直线}, \boldsymbol{P}) \cap t^2(\text{球面}, \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2)$ 。由于直线和球面的交集不是一段连续的位移空间,因此二者求交结果为 $T_c = t^0$ 。

⑥ $t^1(\text{圆}, \boldsymbol{R}) \cap t^2(\text{平面}, \boldsymbol{n})$ 。当且仅当圆周所在平面和平面平行(即 $\boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{n}$)时,二者交集为一段连续的位移空间,求交结果为 $T_c = t^1(\text{圆}, \boldsymbol{R})$,否则 $T_c = t^0$ 。

⑦ 不考虑构件的具体尺寸,即默认各支链移动空间的大小不相等时,圆周与圆柱面、圆锥面、环面以及球面的交集都不是一段连续的位移空间,因此 $t^1(\text{圆}, \boldsymbol{R})$ 与 $t^2(\text{圆柱面}, \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R})$, $t^2(\text{圆锥面}, \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R})$, $t^2(\text{环面}, \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2)$ 以及 $t^2(\text{球面}, \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2)$ 的求交结果均为 $T_c = t^0$ 。

(4) t^2 与 t^2 的求交运算规则

由于 2 维移动空间的整体形态包括平面和曲面(圆柱面、圆锥面、环面、球面)2 种类型,因此存在如下 3 种情况:

① $t^2(\text{平面}, \boldsymbol{n}_1) \cap t^2(\text{平面}, \boldsymbol{n}_2)$ 。当 $\boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2$ 时二者求交结果为 $T_c = t^2(\text{平面}, \boldsymbol{n}_1)$;否则求交结果为 $T_c = t^1(\text{直线}, \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2)$ 。

② 平面和曲面求交。可知,平面和曲面的交集为截交线。截交线形状包括椭圆、圆、抛物线、双曲线等,但它们均为平面曲线。因此这类移动空间均为 1 维平面曲线,其整体形态均可称为截交线。例如,2 维移动特征 $t^2(\text{平面}, \boldsymbol{n})$ 与 $t^2(\text{圆柱面}, \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R})$ 的求交结果可表示为 $T_c = t^1(\text{截交线}, \boldsymbol{n})$ 。

③ 曲面和曲面求交。可知,曲面和曲面的交集为相贯线。相贯线属于空间曲线。因此这类移动空间为 1 维空间曲线,其整体形态可统称为相贯线。例如,2 维移动特征 $t^2(\text{圆柱面}, \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{R}_1)$ 与 $t^2(\text{圆锥面}, \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{R}_2)$ 的求交结果可表示为 $T_c = t^1(\text{相贯线}, (\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{R}_1) \cap (\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{R}_2))$ 。

(5) t^3 与其他移动特征的求交运算规则

$$t^3 \cap t^p(w, N) = t^p(w, N)$$

3.2 实例分析

例 2:分析确定图 4a^[15] 和图 4b^[17] 并联机构的动平台运动特征集。

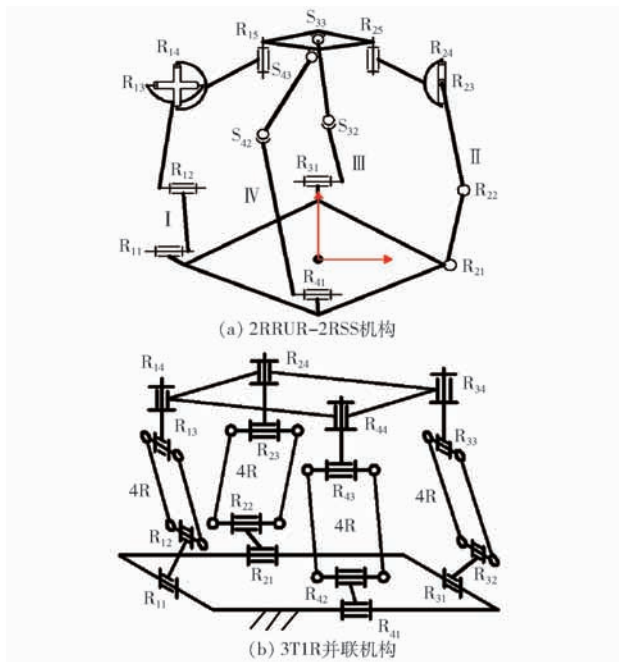


图 4 机构简图(例 2)

Fig. 4 Structure diagrams of example 2

图 4a 所示机构由 4 条支链组成,并且支链 I 和 II 的结构特征均为 $\boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{R} \perp \boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{R}$;支链 III 和 IV 的结构特征均为 $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}$ 。联接在静平台上的 4 个转动副方位特征为 $\boldsymbol{R}_{11} \parallel \boldsymbol{R}_{31} \parallel \boldsymbol{R}_{41} \perp \boldsymbol{R}_{21}$;联接在动平台上的 2 个转动副方位特征为 $\boldsymbol{R}_{15} \parallel \boldsymbol{R}_{25}$ 。该机构动平台运动特征分析步骤及结果如下:

由例 1 可知,支链 I 和 II 的移动特征均为 t^3 ;转动特征分别为 $r^2(\boldsymbol{R}_{11}, \boldsymbol{R}_{14})$ 和 $r^2(\boldsymbol{R}_{21}, \boldsymbol{R}_{24})$ 。将支链 III 和 IV 中的球副等效为轴线汇交于 1 点的 3 个转动副后,利用上述串联机构运动特征分析方法不难发现,二者的移动特征和转动特征分别为 t^3 和 r^3 。

根据 3.1 节介绍的运动特征求交运算规则,动平台的移动特征为 $T_c = t^3 \cap t^3 \cap t^3 \cap t^3 = t^3$ 。由于 $\boldsymbol{R}_{14} \parallel \boldsymbol{R}_{15} \parallel \boldsymbol{R}_{25} \parallel \boldsymbol{R}_{24}$ 但 $\boldsymbol{R}_{11} \perp \boldsymbol{R}_{21}$,故向量组 $(\boldsymbol{R}_{11}, \boldsymbol{R}_{14})$ 和 $(\boldsymbol{R}_{21}, \boldsymbol{R}_{24})$ 的公共向量为 $\boldsymbol{R}_{14}$,因此转动特征为 $R_c = r^2(\boldsymbol{R}_{11}, \boldsymbol{R}_{14}) \cap r^2(\boldsymbol{R}_{21}, \boldsymbol{R}_{24}) \cap r^3 \cap r^3 = r^1(\boldsymbol{R}_{14})$ 。图 4a 所示机构的动平台运动特征集 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\boldsymbol{R}_{14}) \end{array} \right] \quad (7)$$

式(7)表明,该机构的动平台具有在3维平移以及绕 $\boldsymbol{R}_{14}$ 方向旋转的运动输出能力。这与文献[15]分析结果一致。

图4b所示机构由4条相同支链组成,其结构特征均为 $\boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{R}(-4\boldsymbol{R}-) \parallel \boldsymbol{R} \perp \boldsymbol{R}$ 。联接在静平台上的4个转动副的方位特征为 $\boldsymbol{R}_{11} \parallel \boldsymbol{R}_{31} \perp \boldsymbol{R}_{21} \parallel \boldsymbol{R}_{41}$;联接在动平台上的4个转动副的方位特征为 $\boldsymbol{R}_{14} \parallel \boldsymbol{R}_{24} \parallel \boldsymbol{R}_{34} \parallel \boldsymbol{R}_{44}$ 。该机构动平台运动特征分析步骤及结果如下:

由例1可知,4条支链的移动特征均为 t^3 ,转动特征为 $r^2(\boldsymbol{R}_{i1}, \boldsymbol{R}_{i4}), i=1,2,3,4$ 。

由于 $\boldsymbol{R}_{14} \parallel \boldsymbol{R}_{15} \parallel \boldsymbol{R}_{25} \parallel \boldsymbol{R}_{24}$ 但 $\boldsymbol{R}_{11} \parallel \boldsymbol{R}_{31} \perp \boldsymbol{R}_{21} \parallel \boldsymbol{R}_{41}$,故向量组 $(\boldsymbol{R}_{11}, \boldsymbol{R}_{14})、(\boldsymbol{R}_{21}, \boldsymbol{R}_{24})、(\boldsymbol{R}_{31}, \boldsymbol{R}_{34})、(\boldsymbol{R}_{41}, \boldsymbol{R}_{44})$ 的公共向量为 $\boldsymbol{R}_{14}$ 。根据3.1节介绍的运动特征求交运算规则,该机构动平台的移动特征 T_c 和转动特征 R_c 为

$$\begin{cases} T_c = t^3 \cap t^3 \cap t^3 \cap t^3 = t^3 \\ R_c = \bigcap_{i=1}^4 r^2(\boldsymbol{R}_{i1}, \boldsymbol{R}_{i4}) = r^1(\boldsymbol{R}_{14}) \end{cases} \quad (8)$$

式(8)表明,该机构动平台具有在3维平移以及绕 $\boldsymbol{R}_{14}$ 方向旋转的运动输出能力。这与文献[17]分析结果一致。

例3:分析确定图5所示并联机器人机构动平台的运动特征。

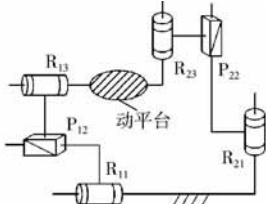


Fig. 5 Structure diagram of example 3

图5所示机构由2条支链组成,支链1的结构特征为 $\boldsymbol{R}_{11} \parallel \boldsymbol{P}_{12} \parallel \boldsymbol{R}_{13}$,支链2的结构特征为 $\boldsymbol{R}_{21} \parallel \boldsymbol{P}_{22} \parallel \boldsymbol{R}_{23}$ 。

利用串联机构运动特征分析方法可得:支链1的转动特征和移动特征分别为 $r^1(\boldsymbol{R}_{11})$ 和 t^2 (圆柱面, $\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{R}_{13}$);支链2的转动特征和移动特征分别为 $r^1(\boldsymbol{R}_{21})$ 和 t^2 (圆柱面, $\boldsymbol{P}_{22} + \boldsymbol{R}_{23}$)。

由3.1节的支链运动特征求交运算规则可得:由于 $\boldsymbol{R}_{11}$ 和 $\boldsymbol{R}_{21}$ 不平行,故动平台的转动特征 $R_c = r^1(\boldsymbol{R}_{11}) \cap r^1(\boldsymbol{R}_{21}) = r^0$,移动特征 T_c 为 t^1 (相贯线, $(\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{R}_{13}) \cap (\boldsymbol{P}_{22} + \boldsymbol{R}_{23})$)。因此图5所示机构动平台的运动特征集 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{c} t^1(\text{相贯线}, (\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{R}_{13}) \cap (\boldsymbol{P}_{22} + \boldsymbol{R}_{23})) \\ r^0 \end{array} \right] \quad (9)$$

式(9)表明,该机构的动平台仅能沿两圆柱面的相贯线作平移运动。

例4:分析确定图6所示并联机器人机构动平台的运动特征。

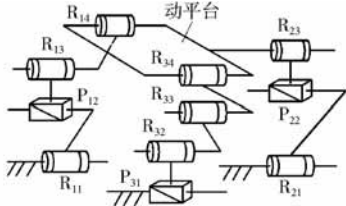


Fig. 6 Structure diagram of example 4

图6所示机构由3条支链组成。支链1的结构特征为 $\boldsymbol{R}_{11} \parallel \boldsymbol{P}_{12} \parallel \boldsymbol{R}_{13} \parallel \boldsymbol{R}_{14}$,支链2的结构特征为 $\boldsymbol{R}_{21} \parallel \boldsymbol{P}_{22} \parallel \boldsymbol{R}_{23}$,支链3由4个运动副依次串联,结构特征为 $\boldsymbol{P}_{31} \parallel \boldsymbol{R}_{32} \parallel \boldsymbol{R}_{33} \parallel \boldsymbol{R}_{34}$,并且各支链联接在机架上的3个运动副满足 $\boldsymbol{R}_{11} \parallel \boldsymbol{R}_{21} \parallel \boldsymbol{P}_{31}$ 。

利用串联机构运动特征分析方法可得:支链1的转动特征和移动特征分别为 $r^1(\boldsymbol{R}_{11})$ 和 t^3 ;支链2的转动特征和移动特征分别为 $r^1(\boldsymbol{R}_{21})$ 和 t^2 (圆柱面, $\boldsymbol{P}_{22} + \boldsymbol{R}_{23}$);支链3的转动特征和移动特征分别为 $r^1(\boldsymbol{R}_{32})$ 和 t^3 。

由于 $\boldsymbol{R}_{11} \parallel \boldsymbol{R}_{21} \parallel \boldsymbol{P}_{31} \parallel \boldsymbol{R}_{32}$,故其转动特征 R_c 为 $r^1(\boldsymbol{R}_{11}) \cap r^1(\boldsymbol{R}_{21}) \cap r^1(\boldsymbol{R}_{32}) = r^1(\boldsymbol{R}_{11})$,移动特征 T_c 为 $t^3 \cap t^2$ (圆柱面, $\boldsymbol{P}_{22} + \boldsymbol{R}_{23}$) $\cap t^3 = t^2$ (圆柱面, $\boldsymbol{P}_{22} + \boldsymbol{R}_{23}$)。图6所示机构动平台的运动特征集 $\boldsymbol{M}$ 为

$$\boldsymbol{M} = \left[\begin{array}{c} t^2(\text{圆柱面}, \boldsymbol{P}_{22} + \boldsymbol{R}_{23}) \\ r^1(\boldsymbol{R}_{11}) \end{array} \right] \quad (10)$$

式(10)表明,该机构的动平台具有在2维空间(整体形态为圆柱面)上平移以及绕 $\boldsymbol{R}_{11}$ 方向旋转的运动输出能力。

4 结论

- (1)提出的基于高斯几何学的描述方法可以准确、完整地描述机器人末端构件的运动特征。
- (2)运动空间整体形态是运动特征的重要信息之一,根据运动空间整体形态对机构类型作进一步细分,有利于丰富和完善现有机构类型库。
- (3)与代数方法相比,机器人末端运动特征几何化分析方法具有简单、直观等优点。对于具有弯曲移动特征的机构而言,该方法的优势更为显著。

参 考 文 献

- [1] SUN T, YANG S F, HUANG T, et al. A way of relating instantaneous and finite screws based on the screw triangle product [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 108: 75 – 82.
- [2] HUANG Z, LI Q C. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method [J]. International Journal of Robotics Research, 2003, 22(1): 59 – 79.
- [3] GUO S, FANG Y F, QU H B. Type synthesis of 4-DOF non-over-constrained parallel mechanisms based on screw theory [J]. Robotica, 2012, 30(1): 31 – 37.
- [4] ZENG D X, HUANG Z. Type synthesis of the rotational decoupled parallel mechanism based on screw theory [J]. Science China, 2011, 54(4): 998 – 1004.
- [5] KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of 3-DOF parallel manipulators based on screw theory [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2004, 20(2): 181 – 190.
- [6] 黄真,孔令富,方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京:机械工业出版社,1997.
- [7] HERVE J M. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design [J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34: 719 – 730.
- [8] MENG J, LIU G F, LI Z X. A geometric theory for analysis and synthesis of sub-6 DOF parallel manipulators [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2007, 23(4): 625 – 649.
- [9] LI Q C, HUANG Z, HERVE J M. Type synthesis of 3R2T 5-DOF parallel mechanisms using the Lie group of displacements [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2004, 20(2): 173 – 180.
- [10] LI Q C, HERVE J M. Type synthesis of 3-DOF RPR-equivalent parallel mechanisms [J/OL]. IEEE Transactions on Robotics, 2014, 30(6): 1333 – 1343.
- [11] 戴建生. 旋量代数与李群、李代数[M]. 北京:高等教育出版社,2014.
- [12] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012.
- [13] YANG T L, LIU A X, JIN Q, et al. Position and orientation characteristic equation for topological design of robot mechanisms [J]. Journal of Mechanical Design, 2009, 131(2): 0210011 – 0210011 – 7.
- [14] 石志新,叶梅燕,罗玉峰,等. 3T1R 并联机构结构设计与位置分析[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(8):364 – 369. SHI Zhixin, YE Meiyang, LUO Yufeng, et al. Structure design and displacement analysis of 3T1R parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(8): 364 – 369. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20160848&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.08.048. (in Chinese)
- [15] 朱小蓉,宋月月,孙晨,等. 2RRUR – 2RSS 并联机构结构特性与运动学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(12):408 – 415. ZHU Xiaorong, SONG Yueyue, SUN Chen, et al. Structural characteristics and kinematic analysis for novel 2RRUR – 2RSS parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016,47(12): 408 – 415. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20161252&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.12.052. (in Chinese)
- [16] 石志新,叶梅燕,罗玉峰,等. 四自由度两模式并联机构结构综合与位置分析[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(4):383 – 389. SHI Zhixin, YE Meiyang, LUO Yufeng, et al. Type synthesis and position analysis of 4-DOF parallel mechanisms with two operation modes[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(4): 383 – 389. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20170451&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.04.051. (in Chinese)
- [17] 李菊,曾氢菲,沈惠平,等. SCARA 并联机构拓扑分析与其低耦合度机型设计[J/OL]. 农业机械学报,2017,48(11): 405 – 416. LI Ju, ZENG Qingfei, SHEN Huiping, et al. Topological analysis for family of SCARA parallel mechanisms and their equivalent design with low coupling degree [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(11): 405 – 416. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20171150&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.11.050. (in Chinese)
- [18] SHEN C W, HANG L B, YANG T L. Position and orientation characteristics of robot mechanisms based on geometric algebra [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 108: 231 – 243.
- [19] 叶梅燕,石志新,罗玉峰,等. 机器人机构方位特征集自动生成算法[J/OL]. 农业机械学报, 2018, 49(1): 397 – 403. YE Meiyang, SHI Zhixin, LUO Yufeng, et al. Automatic generation algorithm of position and orientation characteristic set for robot mechanisms [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(1): 397 – 403. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20180150&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.01.050. (in Chinese)
- [20] GAO F, YANG J L, GE Q J. Type synthesis of parallel mechanisms having the second class GF sets and two dimensional rotations [J]. Journal of Mechanism and Robotics, 2011, 3(1): 011003.
- [21] YANG J L, GAO F, GE Q J, et al. Type synthesis of parallel mechanisms having the first class G(F) sets and one-dimensional rotation [J]. Robotica, 2011, 29(6): 895 – 902.
- [22] HE J, GAO F, MENG X D, et al. Type synthesis for 4-DOF parallel press mechanism using GF set theory [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(4): 851 – 859.
- [23] MENG X, GAO F. Basic problems and criteria for synthesis of robotics [J]. Internal Journal of Mechanisms and Robotics System, 2013, 1(1): 35 – 48.