doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.07.050

具有 2T1R 与 2R1T 运动模式 3 自由度并联机构型综合

刘　伟[1,2]　刘宏昭[1]

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048; 2. 西安工程大学机电工程学院, 西安 710048)

摘要: 使用位移流形理论综合了具有 2T1R 与 2R1T 两种运动模式的并联机构。选取一种具有此类运动模式变换的机构,分析了其自由度变换时的位形特征,使用螺旋理论分析了其在不同运动模式下的自由度特征,分析了支链驱动副选取的可行性。结果表明,该并联机构具有 2T1R 与 2R1T 两种运动模式。在两种运动模式的一般位形下,使用 3 个驱动副可以实现对机构的控制;在两种运动模式的变换位形下,支链 2 连接动平台和定平台的 2 个转轴共线,机构自由度为 4。在支链 1 中增加辅助驱动副,此驱动副只在机构运动模式变换时工作,可以实现并联机构在 2T1R 与 2R1T 两种运动模式之间变换。

关键词: 并联机构; 型综合; 运动模式

中图分类号: TH112　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2018)07-0401-09

Type Synthesis of 3-DOF Parallel Mechanism with 2T1R and 2R1T Motion Mode

LIU Wei[1,2]　LIU Hongzhao[1]

(1. *Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an* 710048, *China*
2. *School of Electrical and Mechanical Engineering, Xi'an Polytechnic University, Xi'an* 710048, *China*)

Abstract: The parallel mechanisms have both 2T1R and 2R1T motion mode were synthesized by using the theory of displacement manifold. The characteristic of a typical variable freedom kinematic chain was analyzed. The structure of the mechanism was constituted with three legs. Two of them were kinematic chain with four and six degrees freedom, respectively. And the other one leg was a variable freedom kinematic chain. A mechanism had both 2T1R and 2R1T motion mode was given for an example. The freedom of the mechanism in different motion mode was verified. The transform configuration of the mechanism between different motion modes was verified feasible by using screw theory. The results showed that the new parallel mechanism had two modes: 2T1R and 2R1T. At the general configuration of the two motion modes of the mechanism, the new type of mechanism can be controlled by using three active joints. At the transformation configuration of two modes of motion of the mechanism, two revolute joints of leg 2 that were connected with moving platform and fix ground respectively were collinear, the degree of freedom of the mechanism was 4 at that configuration. The auxiliary active joint was added in the branch 1, which was only applied when the mechanism motion mode was transformed, and then the motion mode of the parallel mechanism can be transformed between 2T1R and 2R1T.

Key words: parallel mechanism; type synthesis; motion mode

0　引言

近些年关于并联机构的型综合研究主要集中在通过并联机构型综合,降低机构的耦合来提升并联机构运动性能和可控性[1],增大机构的耦合来提升机构刚度[2],提升并联机构的可重构性以适应不同的工作需要[3]。

具有 2T1R 运动模式的并联机构在工业装配机器人、姿态调节器、并联机床、工作台等领域应用比较广泛[4-5]。具有 2R1T 运动模式的并联机构,适

收稿日期: 2018-01-05　修回日期: 2018-02-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(51275404)

作者简介: 刘伟(1985—),男,博士生,西安工程大学讲师,主要从事并联机构综合研究,E-mail: liuweilw@xpu.edu.cn

通信作者: 刘宏昭(1954—),男,教授,主要从事机械动力学和机构学研究,E-mail: liu-hongzhao@163.com

合应用于在曲面上工作的操作手,具有刚度高、精确度高、灵巧性强等特点[6]。文献[7]对 2R 并联机构进行了运动解耦方面的设计。文献[8]对 2R2T 完全解耦的并联机构进行了综合。具有多种运动模式的并联机构使用较少的驱动可实现多种运动模式,以较少的成本可以提升机器适应实际工业生产中多样的需求。具有多种运动模式的并联机构,也称为具有多种操作模式、位移子群可变、具有运动分岔或者可重构并联机构。其特征为:较少的驱动副可以实现多种运动模式;运动模式变换时不需要对机构进行重新组装,因而可以快速实现机构重构;一些此类并联机构在进行运动模式变换时,需要通过机构的奇异位形[9]。DYMO 并联机构具有 4 种不同的 3 自由度运动模式[10]。文献[11]使用虚拟运动链,先对不同运动模式的并联机构支链进行型综合,选择两种运动模式共有的支链结构作为可选支链,再结合不同运动模式支链装配的几何条件,综合了具有多种运动模式的并联机构。文献[12]使用具有多种运动模式的单环机构综合了可实现 3R2T 与 2R3T[13]两种运动模式相互转变的并联机构。文献[14]综合了实现 3T、3R、2R1T、2T1R 三自由度运动模式相互转换的并联机构。这些并联机构可以实现多种运动模式变换,绝大多数需要使用含有多个驱动副的单环机构。文献[15]基于方位特征集,使用可变自由度支链、定自由度支链、六自由度支链综合了具有两转两平移和一转三平移的并联机构[16]。

然而,目前实现 2T1R 与 2R1T 运动模式转变的并联机构较少,本文使用位移流形理论对此类型的并联机构进行综合。

1 分支运动链综合

使用 $Oxyz$ 表示笛卡尔坐标系,其原点为 O,正交基为(x,y,z)。使用(A,z)表示通过空间中一点 A,方向平行于 z 的直线,结合运动副类型表示运动副的方向和运动副轴线上的点。平行于 z 轴过点 N 的转动副对应的位移子群用$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},z)\}$表示。平行于轴线 z 的转动副表示为$^{z}\mathbf{R}$。一条串联运动链由构件 1,2,…,$i-1$,i 组成。构件 i 的可允许的位移可以表示为运动链中运动副所表示的位移子群的乘积。一个构件通过$^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}$运动链与定平台相连,这个运动链产生一个平面 3 维位移子群$\{\boldsymbol{G}(z)\}$。如果运动链产生的相对于定平台的运动不具有群的结构,就称其产生一个位移流形。

$\{\boldsymbol{G}(z)\}$表示平面位移子群,z 表示平面位移运动所在平面的法线方向。$\{\boldsymbol{G}(z)\}$可以被分解成为 7 种乘积形式[17],即

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{G}(z)\}&=\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},z)\}=\\&\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}=\\&\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}=\\&\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}=\\&\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}=\\&\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}=\\&\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},z)\}\end{aligned}\tag{1}$$

$\{\boldsymbol{G}(z)\}$具有 7 种等效运动链。它们是$^{x}\mathbf{P}^{y}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{P}^{y}\mathbf{P}$、$^{x}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}^{y}\mathbf{P}$、$^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{P}$、$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}$、$^{x}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}$和$^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}$。

1.1 构造定自由度运动链

HERVE[18]给出了位移子群两两求交以及乘法运算的运算结果,并指出位移子群求交集的运算满足一般集合论中的求交法则。而在更多情况下由运动链(多个运动副组合而成)生成的刚体运动并不能满足位移群的代数结构,而只是其中的位移子流形。

运动副和运动链可直接作为位移子群或位移子流形的生成元(或生成算子);相应地,运动链末端相对于固定端的任一运动,无论其多么复杂,都可以表示成若干位移子群或位移子流形以及它们之间的乘积形式。通常情况下,运动链末端的运动可由运动链中所有低副生成的位移子群的乘积来决定。这些位移子群的乘积可能仍然是位移子群,但在大多数情况下这个乘积不具有群的代数结构,只是一个位移子流形。

$M=M_1\parallel\cdots M_k$表示由 k 条串联的运动链 M_1,M_2,…,M_k组成的并联机构,它们都与共同的动平台和定平台相连接。用符号 C 表示机构末端的运动,则并联机构动平台的运动可表示为

$$C_M:=C_{M_1}\cap C_{M_2}\cap\cdots\cap C_{M_k}\tag{2}$$

由式(2)可知,动平台的运动应该是并联机构支链运动的交集。

定理 1:任意位移子群的乘积运动 $A\cdot B$ 可能构成位移子群,也可能不具有群的代数结构,只是一个位移子流形。一般情况下不满足交换律,即 $A\cdot B\neq B\cdot A$。但是如果满足交换律 $A\cdot B=B\cdot A$,则 $A\cdot B$ 也是位移子群[19]。

由于并联机构的动平台运动模式需从 2T1R 向 2R1T 转变,根据式(2)的求交运算可知,并联机构的分支运动链,应至少可以实现 2R2T 的运动。2T1R 是平面位移子群$\{\boldsymbol{G}(z)\}$。$\{\boldsymbol{R}(x)\}$是一维转动子群。2R2T 不属于 HERVE[18]枚举出的刚体运动中存在的全部 12 种位移子群。因而,根据定理 1 可知 2R2T 是位移流形。具有 2R2T 位移流形的支链,可以通过对具有 2T1R 平面位移子群的支链进行等效替代得到:$^{x}\mathbf{P}^{y}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{P}^{y}\mathbf{P}^{x}\mathbf{R}$、$^{x}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}^{y}\mathbf{P}^{x}\mathbf{R}$、

$^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{P}^{x}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}$、$^{x}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}$。

由于 6 自由度支链不给动平台施加约束，因而也可用来实现 2R1T 运动模式向 2T1R 运动模式转变的并联机构的构造。GOGU[20] 使用进化形态理论，对 6 自由度分支运动链进行了综合，具体运动链结构如表 1 所示，表 1 中 22～24 号支链中存在局部自由度，表 1 中其他的运动链中不存在局部自由度。除了表 1 中的运动链以外，还有一些运动链中含有与 2 个以上构件相连的构件，即复杂运动链，也具有 6 自由度。

表 1　6 自由度支链等效运动链

Tab. 1　Equivalent kinematic chain of fixed six degrees of freedom branches kinematic chain

序号	运动链	序号	运动链
1	P∥R⊥P∥R⊥P∥R	13	R⊥P∥R－S
2	P⊥P⊥P－S	14	R∥P∥R－S
3	P⊥P⊥R－S	15	R∥P⊥R－S
4	P⊥P∥R－S	16	R⊥R⊥P－S
5	P∥R⊥P－S	17	R∥R∥P－S
6	P∥R⊥P－S	18	R⊥R∥P－S
7	P⊥R⊥R－S	19	R⊥R∥R－S
8	P∥R⊥R－S	20	R∥R⊥R－S
9	P∥R∥R－S	21	R⊥R⊥R－S
10	R⊥P⊥∥P－S	22	P－S－S
11	R∥P⊥P－S	23	R－S－S
12	R⊥P⊥⊥R－S	24	S－P－S

1.2　基于位移流形理论选取变自由度分支运动链

一般情况下，并联机构支链结构可以根据位移子群或位移流形的生成元得到。定自由度支链位移流形为

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\} \tag{3}$$

根据动平台具有的运动模式，构造变自由度运动链生成元为

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\}\cap(\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}\cup\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}) \tag{4}$$

由于$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{O},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}$、$\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},x)\}$平面位移子群在位移流形求交时，转动副 R 所过的点在 *xoy*、*yoz* 平面可任意选取，得到

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\}\cap\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}\cup(\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\}\cap\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\} \tag{5}$$

由于$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\}$与$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}$的交集中必定不含有$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},y)\}$，得到

$$(\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\}\cap\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\})\cup\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\} \tag{6}$$

由于$\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}$构成位移子群，得到

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}=\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\} \tag{7}$$

$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}$构成平面位移子群，得到

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\} \tag{8}$$

将式(8)代入式(6)得到

$$(\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\}\cap\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\})\cup\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\} \tag{9}$$

根据式(9)得到

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\cup\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N},x)\} \tag{10}$$

从式(4)、(10)可知，能用来实现 2R1T 运动模式向 2T1R 转变的位移流形生成元应具有的形式为

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(x)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},y)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\}\cup\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\} \tag{11}$$

根据式(11)中生成元对应的运动链为$^{z}\mathbf{R}^{y}\mathbf{P}^{z}\mathbf{P}^{x}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{z}\mathbf{P}^{y}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{y}\mathbf{P}^{x}\mathbf{R}^{z}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{z}\mathbf{P}^{z}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{y}\mathbf{P}^{x}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{y}\mathbf{P}^{x}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}$、$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}$。

1.3　变自由度支链位形变换分析

以$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}$分支为例，如图 1a 支链$^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}$中2 个相邻的转轴通过一点时，可形成万向铰，可得到支链$^{zx}\mathbf{U}^{x}\mathbf{R}^{xz}\mathbf{U}$。2 个$^{z}\mathbf{R}$转轴共线时，支链末端的位移流形可表示为

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\} \tag{12}$$

此时支链存在一个绕 *z* 轴的局部转动自由度。当支链末端沿 *y* 轴移动有限位移，得到如图 1b 支链位形，此时支链末端的位移流形可表示为

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B},z)\} \tag{13}$$

当支链位形如图 1b 所示，支链末端绕 *x* 轴做有限转动，得到图 1c 所示位形，此时支链末端的位移流形可表示为

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},z)\}\{\boldsymbol{T}_1(y)\}\{\boldsymbol{T}_1(z)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},x)\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{D},\boldsymbol{u})\} \tag{14}$$

式(14)中 1 维转动流形$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{D},\boldsymbol{u})\}$中的转轴 $\boldsymbol{u}$ 表示支链末端转轴绕 *x* 轴转动后得到的新的转动轴

线。当支链处于位形图 1a,支链末端位置姿态保持不变,支链存在 1 个绕 z 轴的局部转动自由度,装配在定平台上沿 z 轴转动后得到支链位形如图 1d所示,此时支链末端的位移流形可表示为

$$\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{z})\}\{\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{y})\}\{\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{z})\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{y})\}\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{z})\} \tag{15}$$

同理支链末端在进行有限位移后,得到支链位形如图 1e、1f 所示,从而支链末端的位移流形发生相应的变化。

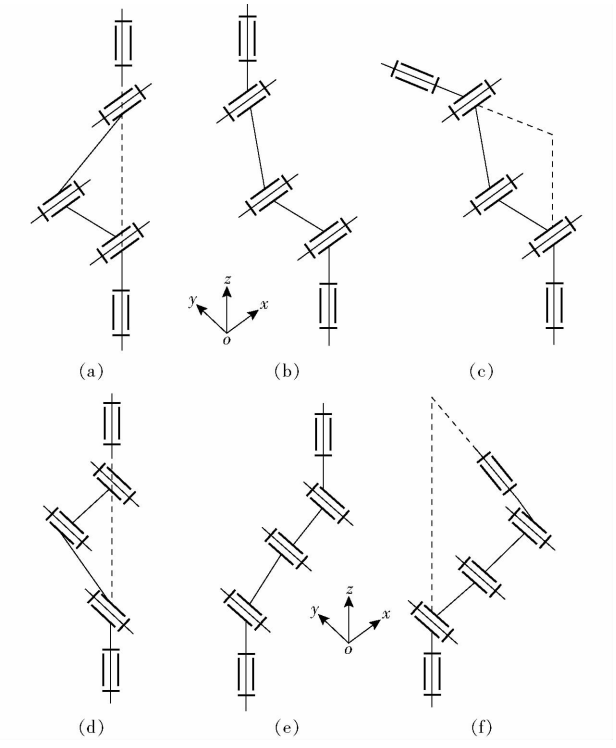

图 1 变自由度支链变换位形

Fig. 1 Transform configuration of branched chain with variable degrees of freedom

1.4 综合出的机构数目

分别从 1.1 节中具有 2R2T 位移流形的支链选取 1 条支链作为支链 1,式(11)生成元对应的支链选取 1 条支链作为支链 2,表 1 中的 6 自由度支链选取 1 条支链作为支链 3,总共 3 条支链,连接动、静平台。第 1 支链,有 7 种支链结构;第 2 支链,有 24 种支链结构;第 3 支链,有 7 种支链结构。如果不考虑相邻两个单自由度运动副组合成多自由度运动副,也不考虑复杂运动链,则可得到 $7\times24\times7=1\,176$ 种机构构型。

2 并联机构运动模式 2T1R 向 2R1T 转变的自由度分析

2.1 2T1R 运动模式自由度分析

现选取定自由度分支,即第 1 条支链 B_1A_1,其结构为$^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}^{z}\mathbf{R}^{x}\mathbf{R}$。选取变自由度分支,即第 2 条支链 B_2A_2,其结构为$^{zy}\mathbf{U}^{y}\mathbf{R}^{yz}\mathbf{U}$。选取第 3 条支链 B_3A_3,其结构为 **SPS**。把 3 个支链与动平台、定平台组装后得到图 2 中的机构位形。

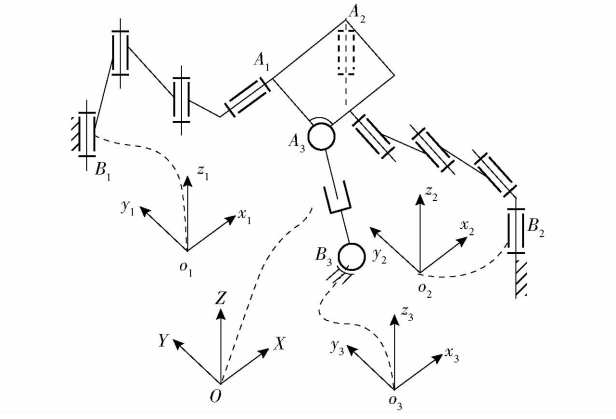

图 2 具有 2T1R 运动模式的并联机构简图

Fig. 2 Schematic diagram of parallel mechanism with 2T1R motion mode

在 B_i 点建立坐标系 $B_ix_iy_iz_i$,图 2 中的第 1 支链在坐标系 $B_1x_1y_1z_1$下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases}\$_{11}=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)\\ \$_{12}=(0\ 0\ 1;a_1\ b_1\ 0)\\ \$_{13}=(0\ 0\ 1;c_1\ d_1\ 0)\\ \$_{14}=(1\ 0\ 0;0\ e_1\ f_1)\end{cases} \tag{16}$$

式(16)中螺旋 $\$_{ij}$ 表示支链 i 连接在定平台上的第 j 个运动副。在支链 1 的一般位形下,式(16)中的 4 个运动螺旋线性无关,支链 1 在坐标系 $B_1x_1y_1z_1$下的约束反螺旋为

$$\begin{cases}\$^{r}_{11}=(0\ 0\ 1;\ -f_1\ g_1\ 0)\\ \$^{r}_{12}=(0\ 0\ 0;0\ 1\ 0)\end{cases} \tag{17}$$

图 2 中的第 2 支链在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases}\$_{21}=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)\\ \$_{22}=(0\ 1\ 0;a_2\ 0\ 0)\\ \$_{23}=(0\ 1\ 0;b_2\ 0\ c_2)\\ \$_{24}=(0\ 1\ 0;d_2\ 0\ e_2)\\ \$_{25}=(0\ 0\ 1;0\ f_2\ 0)\end{cases} \tag{18}$$

式(18)中的 5 个运动螺旋线性无关,支链 2 在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$下的约束反螺旋为

$$\$^{r}_{21}=(0\ 0\ 0;1\ 0\ 0) \tag{19}$$

由于支链 3 不对定平台施加约束,因而动平台上施加的约束如式(17)、(19)所示,图 2 中动平台上所施加的 1 个力螺旋和 2 个力偶线性无关,分别限制了动平台沿定坐标 Z 轴的移动和沿平行于定坐标系 X、Y 轴的转动。动平台上施加的约束系不存在冗余约束,即 $\boldsymbol{v}=0$。

采用修正的 Kutzbach - Grübler 公式计算机构

自由度

$$M=6(n-g-1)+\sum f_i+\upsilon \tag{20}$$

式中　M——机构自由度

n——机构构件总数

g——机构的运动副数

f_i——第 i 个运动副的自由度数

υ——冗余约束数

根据式(20)，可计算得到图 2 所示机构位形下，机构自由度为

$$M=6\times(11-12-1)+16+0=4 \tag{21}$$

由于支链 3 中存在绕 B_3A_3 转动 1 个局部转动自由度，因而图 2 中的动平台具有 3 个自由度，结合式(17)、(19)可知，动平台具有沿定坐标系 X、Y 轴的 2 个移动自由度和绕平行与定坐标 Z 轴的 1 个转动自由度，即具有 2T1R 运动模式。

2.2　运动模式变换过程中机构自由度分析

2.2.1　支链 2 转轴共线位形下机构自由度分析

图 2 所示机构位形下，动平台沿平行于定坐标系 XOY 平面做有限位移后，支链 2 中的 2 个 ${}^{z}\mathbf{R}$ 共轴，机构位形如图 3 所示。此时支链 2 具有 1 个过 B_2 绕平行于 z_2 轴的转轴转动的局部转动自由度。

支链 3 对动平台不施加约束。图 3 中的第 2 支链在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases}\$_{21}=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)\\ \$_{22}=(0\ 1\ 0;a_2\ 0\ 0)\\ \$_{23}=(0\ 1\ 0;b_2\ 0\ c_2)\\ \$_{24}=(0\ 1\ 0;d_2\ 0\ 0)\\ \$_{25}=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)\end{cases} \tag{22}$$

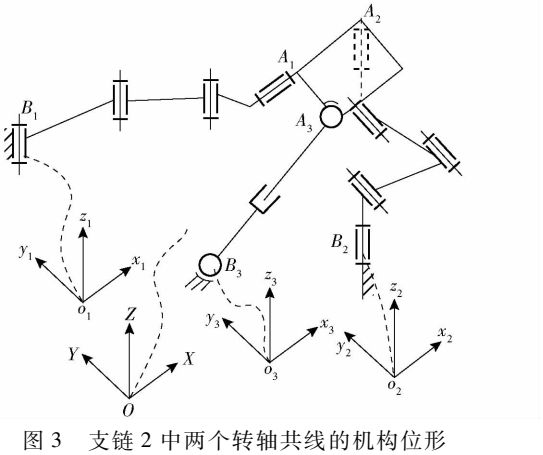

图 3　支链 2 中两个转轴共线的机构位形

Fig. 3　Mechanism configuration of two rotational axes collinear in branch 2

在图 3 所示支链 2 的位形下，式(22)中的 5 个运动螺旋线性相关，支链 2 在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的约束反螺旋为

$$\begin{cases}\$^{r}_{21}=(0\ 1\ 0;e_2\ 0\ 0)\\ \$^{r}_{22}=(0\ 0\ 0;1\ 0\ 0)\end{cases} \tag{23}$$

由于支链 1 对定平台施加的约束类型没有发生改变，并且支链 3 不对定平台施加约束，因而动平台上施加的约束如式(17)、(23)所示，图 3 中动平台上所施加的 2 个力螺旋和 2 个力偶线性无关，分别限制了动平台沿定坐标系 Y、Z 轴的移动和沿平行于定坐标系 X、Y 轴的转动。动平台上施加的约束系不存在冗余约束，即 $\upsilon=0$。根据式(20)，可计算得到图 3 所示机构位形下，机构自由度为

$$M=6\times(11-12-1)+16+0=4 \tag{24}$$

由于支链 3 中存在绕 B_3A_3 转动的 1 个局部转动自由度，支链 2 中存在绕 B_2A_2 转动的 1 个局部转动自由度。因而图 3 中的动平台具有 2 个自由度，结合式(17)、(23)可知，图 3 所示机构位形下，动平台具有沿定坐标系 X 轴的 1 个移动自由度和绕平行于定坐标系 Z 轴的 1 个转动自由度。当动平台沿定坐标系 X 轴做有限位移后，动平台又处于图 2 所示机构运动模式，因而图 3 所示机构所具有的运动模式是瞬时的。在图 3 所示位形下，动平台保持位姿不变，支链 2 过点 B_2 绕平行于 z_2 轴的转轴转动 90°后，支链 2 中的平面位移子群运动链 ${}^{y}\mathbf{R}{}^{y}\mathbf{R}{}^{y}\mathbf{R}$ 可变换为 ${}^{x}\mathbf{R}{}^{x}\mathbf{R}{}^{x}\mathbf{R}$，得到图 4 中的机构位形。

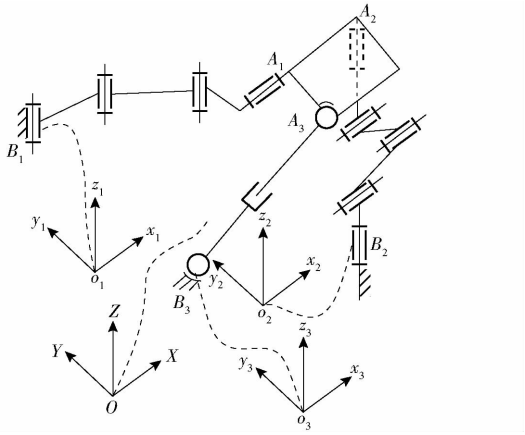

图 4　机构运动模式变换位形

Fig. 4　Motion pattern transform configuration of parallel mechanism

2.2.2　运动模式变换位形机构自由度分析

图 4 中的第 2 支链在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases}\$_{21}=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)\\ \$_{22}=(1\ 0\ 0;0\ a_2\ 0)\\ \$_{23}=(1\ 0\ 0;0\ b_2\ c_2)\\ \$_{24}=(1\ 0\ 0;0\ d_2\ 0)\\ \$_{25}=(0\ 0\ 1;0\ 0\ 0)\end{cases} \tag{25}$$

式(25)中的 5 个运动螺旋线性相关，支链 2 在

坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的约束反螺旋为

$$\begin{cases} \$_{21}^{r} = (1\ 0\ 0;0\ e_2\ 0) \\ \$_{22}^{r} = (0\ 0\ 0;0\ 1\ 0) \end{cases} \tag{26}$$

动平台上施加的约束如式(17)、(26)所示,容易发现图 4 动平台所受到的 2 个力螺旋和 2 个力偶线性相关,分别限制了动平台沿定坐标系 X、Z 轴的移动和沿平行于定坐标系 Y 轴的转动。动平台上施加的约束系存在 1 个冗余约束,即 $v=1$。根据式(20),可计算得到图 4 所示机构位形下,机构自由度为

$$M = 6\times(11-12-1)+16+1 = 5 \tag{27}$$

由于支链 3 中存在绕 B_3A_3 转动的 1 个局部转动自由度,且支链 2 中存在绕 B_2A_2 即平行于 z_2 轴转动的 1 个局部转动自由度。在图 4 所示机构位形下,当动平台沿定坐标系 Y 轴做有限移动后,支链 2 末端会增加一个移动自由度,此时动平台具有 2R2T 运动模式;当动平台绕平行于定坐标系 X 轴的转轴转动后,动平台具有 2R1T 运动模式。因而,图 4 所示机构位形下的运动模式具有瞬时性。

2.3 2R1T 运动模式自由度分析

当动平台在图 4 所示位形下,沿平行于定坐标系 X 轴的轴线做有限转动后,机构处于图 5 所示位形。

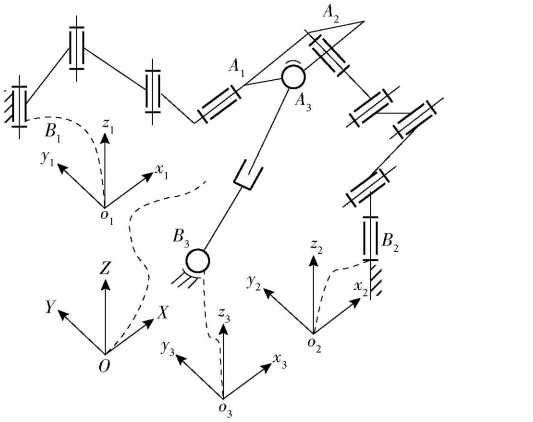

图 5 2R1T 运动模式的机构简图

Fig. 5 Schematic diagram of parallel mechanism with 2R1T motion mode

图 5 中的第 2 支链在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases} \$_{21} = (0\ 0\ 1;0\ 0\ 0) \\ \$_{22} = (1\ 0\ 0;0\ a_2\ 0) \\ \$_{23} = (1\ 0\ 0;0\ b_2\ c_2) \\ \$_{24} = (1\ 0\ 0;0\ d_2\ e_2) \\ \$_{25} = (0\ l_2\ m_2;f_2\ 0\ 0) \end{cases} \tag{28}$$

式(28)中的 5 个运动螺旋线性无关,支链 2 在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的约束反螺旋为

$$\$_{21}^{r} = (1\ 0\ 0;0\ -f_2/l_2\ 0) \tag{29}$$

结合式(17)、(29)发现图 5 中动平台上所受到的 2 个力螺旋和 1 个力偶线性无关,分别限制了动平台沿 X、Z 轴的移动和沿平行于 Y 轴的转动。动平台上施加的约束系不存在冗余约束,即 $v=0$。可计算得到图 5 所示机构位形下,机构自由度为

$$M = 6\times(11-12-1)+16+0 = 4 \tag{30}$$

由于支链 3 中存在绕 B_3A_3 转动的 1 个局部转动自由度,因而图 5 中的动平台具有 3 个自由度,结合式(17)、(29)可知,动平台具有沿定坐标系 Y 轴的 1 个移动自由度和绕平行于定坐标 X、Z 轴的 2 个转动自由度。即动平台在机构处于图 5 所示位形时,具有 2R1T 运动模式。

3 支链中驱动副的选取

一般情况下驱动副应布置在定平台上,或与定平台尽可能靠近。因而,可选取支链 1 和支链 2 中与定平台直接连接的'**R** 转动副为驱动副,支链 3 中选取连接两个球副的移动副为驱动副。并联机构驱动副选取是否合理,可以通过计算锁定支链中驱动副后机构的自由度来验证。当锁定支链中驱动副后机构自由度为零,则说明驱动副选取正确。否则说明驱动副选取错误。

3.1 2T1R 运动模式下驱动副合理性分析

锁定图 6 中虚线圆环所包含的支链 1、2、3 中的驱动副。

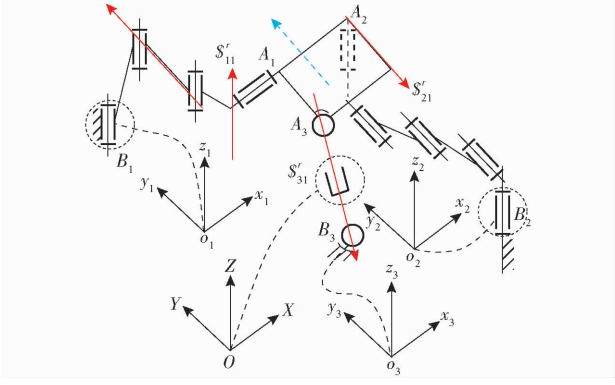

图 6 2T1R 运动模式下机构的驱动副布置示意图

Fig. 6 Schematic diagram of drive arrangement of mechanism in 2T1R motion mode

图 6 中的第 1 支链在坐标系 $B_1x_1y_1z_1$ 下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases} \$_{12} = (0\ 0\ 1;a_1\ b_1\ 0) \\ \$_{13} = (0\ 0\ 1;c_1\ d_1\ 0) \\ \$_{14} = (1\ 0\ 0;0\ e_1\ f_1) \end{cases} \tag{31}$$

在支链 1 的一般位形下,式(31)中的 3 个运动螺旋线性无关,支链 1 在坐标系 $B_1x_1y_1z_1$ 下的约束

反螺旋为

$$\begin{cases} \$_{11}^{r} = (0\ 0\ 1;\ -f_1\ g_1\ 0) \\ \$_{12}^{r} = (l_1\ m_1\ 0;n_1\ h_1\ i_1) \\ \$_{13}^{r} = (0\ 0\ 0;0\ 1\ 0) \end{cases} \tag{32}$$

式(32)中,需满足运动螺旋系与约束反螺旋互易积为零的条件,即

$$\begin{cases} l_1a_1 + m_1b_1 + i_1 = 0 \\ l_1c_1 + m_1d_1 + i_1 = 0 \\ m_1e_1 + n_1 = 0 \end{cases} \tag{33}$$

求解式(33)得到

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{-n_1}{e_1} \\ l_1 = \dfrac{n_1}{e_1}\dfrac{d_1 - b_1}{c_1 - a_1} \quad (e_1 \neq 0;c_1 \neq a_1) \end{cases} \tag{34}$$

图 6 中的第 2 支链在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases} \$_{22} = (0\ 1\ 0;a_2\ 0\ 0) \\ \$_{23} = (0\ 1\ 0;b_2\ 0\ c_2) \\ \$_{24} = (0\ 1\ 0;d_2\ 0\ e_2) \\ \$_{25} = (0\ 0\ 1;0\ f_2\ 0) \end{cases} \tag{35}$$

支链 2 在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的约束反螺旋为

$$\begin{cases} \$_{21}^{r} = (0\ 1\ 0;g_2\ 0\ -f_2) \\ \$_{22}^{r} = (0\ 0\ 0;1\ 0\ 0) \end{cases} \tag{36}$$

图 6 中的第 3 支链在坐标系 $B_3x_3y_3z_3$ 下的约束反螺旋为

$$\$_{31}^{r} = (l_3\ m_3\ n_3;0\ 0\ 0) \tag{37}$$

在机构的一般位形下,图 6 中动平台上所受到的 4 个力螺旋和 2 个力偶线性无关,分别限制了动平台沿定坐标系 X、Y、Z 轴的移动和沿平行于定坐标系 X、Y、Z 轴的转动。动平台上施加的约束系不存在冗余约束,即 $v=0$。根据式(20),可计算得到图 6 所示机构位形下,机构自由度为

$$M = 6\times(8-9-1)+13+0 = 1 \tag{38}$$

由于支链 3 中存在绕 B_3A_3 转动的 1 个局部转动自由度,图 6 中的动平台具有 0 个自由度。图 6 所示动平台在一般位形下,当支链 1、2、3 中驱动副锁定时,动平台不具有任何自由度,处于锁定状态。因而,在动平台具有 2T1R 运动模式时,驱动副的选择是合理的。

3.2　运动模式变换过程中驱动副合理性分析

3.2.1　机构支链 2 转轴共线位形下机构驱动合理性分析

从 2.2 节中可知,机构运动模式变换过程中,机构处于图 3 位形下时,机构动平台相较图 2 位形下减少 1 个自由度,然而支链 2 增加一个局部自由度。很明显,在图 3 位形下,所选驱动副可以实现对机构的控制。

3.2.2　运动模式变换位形机构驱动合理性分析

当驱动图 6 中的 3 个驱动副,使得机构处于图 7 所示运动模式变换位形时,锁定图 7 中虚线圆环所包含的支链 1、2、3 中的驱动副。

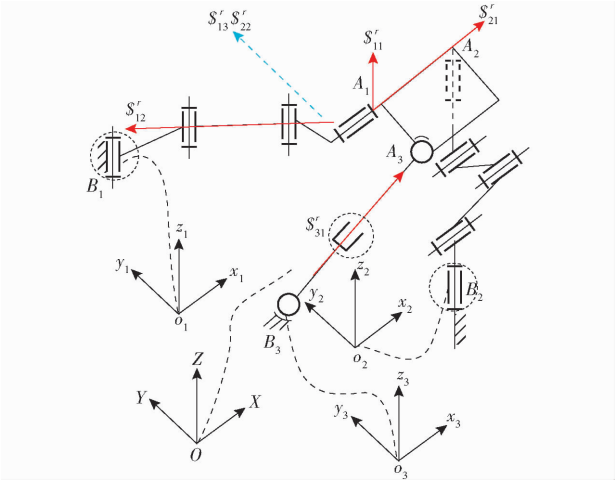

图 7　运动模式变换位形下机构的驱动副布置示意图

Fig. 7　Schematic diagram of drive arrangement of mechanism in transform motion mode

图 7 中的第 1、3 支链的运动螺旋和约束螺旋形式和图 6 中的第 1、3 支链的相似,可参见式(31)、(32)、(37)。图 7 中的第 2 支链在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases} \$_{22} = (1\ 0\ 0;0\ a_2\ 0) \\ \$_{23} = (1\ 0\ 0;0\ b_2\ c_2) \\ \$_{24} = (1\ 0\ 0;0\ d_2\ 0) \\ \$_{25} = (0\ 0\ 1;0\ 0\ 0) \end{cases} \tag{39}$$

支链 2 在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的约束反螺旋为

$$\begin{cases} \$_{21}^{r} = (1\ 0\ 0;0\ f_2\ 0) \\ \$_{22}^{r} = (0\ 0\ 0;0\ 1\ 0) \end{cases} \tag{40}$$

图 7 中动平台上所受到的 4 个力螺旋和 2 个力偶线性相关,力偶旋量 $\$_{22}^{r}$、$\$_{13}^{r}$ 都约束动平台绕平行于定坐标系 Y 轴的转动,因而动平台上施加的约束系存在 1 个冗余约束,即 $v=1$。根据式(20),可计算得到图 7 所示机构位形下,机构自由度为

$$M = 6\times(8-9-1)+13+1 = 2 \tag{41}$$

支链 3 中存在绕 B_3A_3 转动的 1 个局部转动自由度。支链 1、2、3 驱动副锁定后,机构自由度不为 1,所选驱动副不能实现对动平台运动的完全控制。

3.2.3　运动模式变换位形机构驱动副布置方法

并联机构在图 7 中运动模式变换的位形下,机构中支链 2 增加了一个局部转动自由度,而运动模式变换时,需要锁定支链 2 的驱动副。为了实现对机构的控制,可以增加一个辅助驱动副。在图 8 中

的支链1中,在与 B_1 处转轴相邻的转动副上布置驱动,使其在机构运动模式变换时工作。锁定图8中虚线圆环所包含的支链1、2、3中的驱动副、锁定红色圆环所包含的支链1中的辅助驱动副。

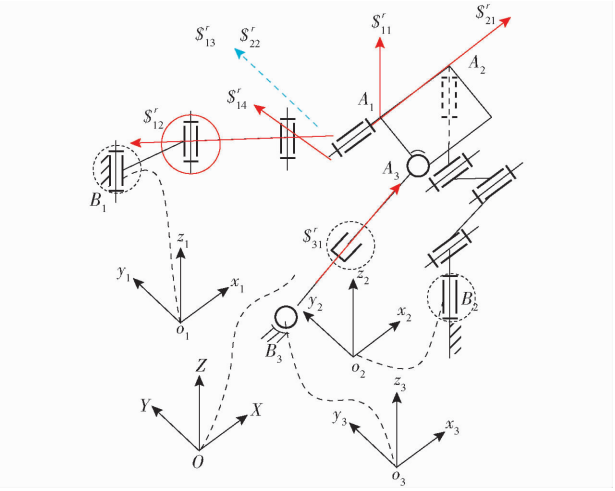

图8 支链1中增加1个驱动副的机构运动模式变换位形图

Fig. 8 Schematic diagram of drive arrangement of mechanism in transform motion mode with branch 1 had 2 drives

图8中的第1支链在坐标系 $B_1x_1y_1z_1$ 下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases} \$_{13}=(0\ 0\ 1;c_1\ d_1\ 0) \\ \$_{14}=(1\ 0\ 0;0\ e_1\ f_1) \end{cases} \tag{42}$$

支链1在坐标系 $B_1x_1y_1z_1$ 下的约束反螺旋为

$$\begin{cases} \$^r_{11}=(0\ 0\ 1;-f_1\ g_1\ 0) \\ \$^r_{12}=(l_1\ m_1\ 0;n_1\ h_1\ i_1) \\ \$^r_{13}=(0\ 0\ 0;0\ 1\ 0) \\ \$^r_{14}=(0\ 1\ 0;-e_1\ 0\ -d_1) \end{cases} \tag{43}$$

支链2在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的约束反螺旋为

$$\begin{cases} \$^r_{21}=(1\ 0\ 0;0\ f_2\ 0) \\ \$^r_{22}=(0\ 0\ 0;0\ 1\ 0) \end{cases} \tag{44}$$

图8中的第3支链在坐标系 $B_3x_3y_3z_3$ 下的约束反螺旋为

$$\$^r_{31}=(l_3\ m_3\ n_3;0\ 0\ 0) \tag{45}$$

在机构的一般位形下,图8中动平台上所受到的5个力螺旋和2个力偶线性相关,分别限制了动平台沿定坐标系 X、Y、Z 轴的移动和沿平行于定坐标系 X、Y、Z 轴的转动。动平台上施加的约束系存在1个冗余约束,即 $v=1$。根据式(20),可计算得到图8所示机构位形下,机构自由度为

$$M=6(7-8-1)+12+1=1 \tag{46}$$

由于支链3中存在绕 B_3A_3 转动的1个局部转动自由度,图8中的动平台具有0个自由度。图8所示动平台在一般位形下,当支链1、2、3中驱动副锁定时,动平台不具有任何自由度,处于锁定状态。因而,在支链1中增加驱动副,可以实现机构运动模式的变换。

3.3 2R1T运动模式下的驱动副合理性分析

当动平台从图8所示位形,控制支链1、2、3中的驱动副和支链1中的辅助驱动副,使得动平台做绕平行于定坐标系 X 轴的转轴转动后,得到如图9所示机构位形。锁定图9中虚线圆环所包含的支链1、2、3中的驱动副后,图9中机构位形下支链1、3的运动螺旋和约束反螺旋与图8所示机构位形下支链1、3的螺旋和反螺旋系形式相同。图9中的第2支链在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases} \$_{22}=(1\ 0\ 0;0\ a_2\ 0) \\ \$_{23}=(1\ 0\ 0;0\ b_2\ c_2) \\ \$_{24}=(1\ 0\ 0;0\ d_2\ e_2) \\ \$_{25}=(0\ l_2\ m_2;f_2\ 0\ 0) \end{cases} \tag{47}$$

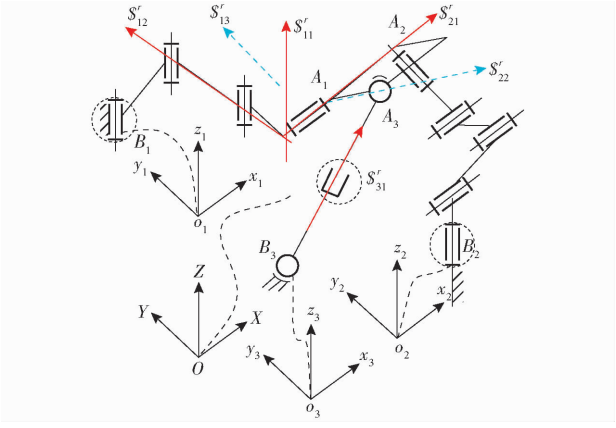

图9 2R1T运动模式下机构的驱动副布置示意图

Fig. 9 Schematic diagram of drive arrangement of mechanism in 2R1T motion mode

支链2在坐标系 $B_2x_2y_2z_2$ 下的约束反螺旋为

$$\begin{cases} \$^r_{21}=(1\ 0\ 0;0\ -f_2/l_2\ 0) \\ \$^r_{22}=(0\ 0\ 0;0\ -m_2\ l_2) \end{cases} \tag{48}$$

在机构的一般位形下,图9中动平台上所受到的4个力螺旋和2个力偶线性无关,分别限制了动平台沿定坐标系 X、Y、Z 轴的移动和沿平行于定坐标系 X、Y、Z 轴的转动。动平台上施加的约束系不存在冗余约束,即 $v=0$。根据式(20),可计算得到图9所示机构位形下,机构自由度为

$$M=6\times(8-9-1)+13+0=1 \tag{49}$$

由于支链3中存在绕 B_3A_3 转动1个局部转动自由度,图9中的动平台具有0个自由度。图9所示动平台在一般位形下,当支链1、2、3中驱动副锁定时,动平台不具有任何自由度,处于锁定状态。因而,在动平台处于2R1T运动模式时,不使用辅助驱

动副可以实现对机构的控制。

综合 3.1、3.2、3.3 节的结果可知，提出的机构具有 2T1R 和 2R1T 两种运动模式，在支链 1 中增加辅助驱动副后，所选取的驱动副能实现对不同运动模式一般位形下动平台位姿的控制，因而其驱动副的选取是可行的。

4　结论

（1）通过位移流形理论和螺旋理论对 2T1R 运动模式向 2R1T 运动模式转变的并联机构进行了综合，并以一种新型的变自由度机构为例，分析了其自由度变换的位形特征，验证了其自由度的类型，确定了支链中作为驱动副的运动副。

（2）在运动模式变换时，机构的支链 2 增加了一个局部自由度，而运动模式变换时，需要锁定支链 2。在支链 1 中增加了一个辅助驱动副，此驱动副只在并联机构构运动模式变换时工作，有效地实现了运动模式的变换。

参　考　文　献

1　沈惠平，张震，杨廷力，等. 3T1R 并联机构结构降耦设计与运动学分析[J/OL]. 农业机械学报，2017，48(10)：380－389，400. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no=20171049&flag=1. DOI：10.6041/j.issn.1000-1298.2017.10.049.
SHEN Huiping，ZHANG Zhen，YANG Tingli，et al. Structure coupling-reducing design and kinematics analysis of 3T1R parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2017，48(10)：380－389，400.（in Chinese）

2　曹文熬，丁华锋，陈子明，等. 两层两环空间耦合链机构自由度分析原理[J]. 机械工程学报，2016，52(17)：116－126.
CAO Wenao，DING Huafeng，CHEN Ziming，et al. Principle of mobility analysis of two-level and two-loop spatial mechanisms with coupling chains[J]. Journal of Mechanical Engineering，2016，52(17)：116－126.（in Chinese）

3　畅博彦，金国光，戴建生. 基于变约束旋量原理的变胞机构构型综合[J]. 机械工程学报，2014，50(5)：17－25.
CHANG Boyan，JIN Guoguang，DAI Jiansheng. Type synthesis of metamorphic mechanism based on variable constraint screw theory[J]. Journal of Mechanical Engineering，2014，50(5)：17－25.（in Chinese）

4　吴鑫，陈美丽，张彦斌. 2T1R 并联机构位置及奇异性分析[J]. 农业机械学报，2010，41(2)：208－213.
WU Xin，CHEN Meili，ZHANG Yanbin. Analysis of position and singularity of a parallel mechanism with three degrees of freedom[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2010，41(2)：208－213.（in Chinese）

5　张彦斌，吴鑫，刘宏昭. 完全各向同性 2T1R 空间并联机器人机构型综合[J]. 农业机械学报，2011，42(11)：200－207.
ZHANG Yanbin，WU Xin，LIU Hongzhao. Structural synthesis of fully-isotropic 2T1R spatial parallel robotic manipulators[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2011，42(11)：200－207.（in Chinese）

6　LI Q，HERVE J M. Type synthesis of 3-DOF RPR-equivalent parallel mechanisms[J]. IEEE Transactions on Robotics，2014，30(6)：1333－1343.

7　范彩霞，刘宏昭，张彦斌，等. 一种新型 2R 完全解耦并联机构的运动学和奇异性分析[J]. 中国机械工程，2010，21(11)：622－626.
FAN Caixia，LIU Hongzhao，ZHANG Yanbin，et al. Kinematics and singularity analysis of a novel 2R fully-decoupled parallel manipulator[J]. China Mechanical Engineering，2010，21(11)：622－626.（in Chinese）

8　张彦斌，吴鑫. 完全解耦二移动二转动并联机构结构综合[J/OL]. 农业机械学报，2013，44(8)：250－256. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no=20130843&flag=1&journal_id=jcsam. DOI：10.6041/j.issn.1000-1298.2013.08.0430
ZHANG Yanbin，WU Xin. Structural synthesis of fully-decoupled two-translational and two-rotational parallel mechanisms[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2013，44(8)：250－256.（in Chinese）

9　KONG X. Type synthesis of 3-DOF parallel manipulators with both a planar operation mode and a spatial translational operation mode[J]. Journal of Mechanisms & Robotics，2013，5(4)：041015.

10　ZLATANOV D，BONEV I A，GOSSELIN C M. Constraint singularities of parallel mechanisms[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation，2002，1：496－502.

11　KONG X，GOSSELIN C M. Type synthesis of parallel mechanisms[M]. Berlin Heidelberg：Springer，2007.

12　叶伟，方跃法，郭盛，等. 基于运动限定机构的可重构并联机构设计[J]. 机械工程学报，2015，51(13)：137－143.
YE Wei，FANG Yuefa，GUO Sheng，et al. Design of reconfigurable parallel mechanisms with discontinuously movable mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering，2015，51(13)：137－143.（in Chinese）

13　叶伟，方跃法，郭盛，等. 一种新型并联机构的运动分岔特性及运动学分析[J]. 机械工程学报，2013，49(13)：8－16.
YE Wei，FANG Yuefa，GUO Sheng，et al. Bifurcated motion and kinematics of novel parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering，2013，49(13)：8－16.（in Chinese）

14　YE W，FANG Yuefa，GUO Sheng，et al. Two classes of reconfigurable parallel mechanisms constructed with multi-diamond kinematotropic chain[J]. Proc. IMech E，Part C：Journal of Mechanical Engineering Science，2015，230(18)：3319－3330.

15　石志新，叶梅燕，罗玉峰，等. 四自由度两模式并联机构结构综合与位置分析[J/OL]. 农业机械学报，2017，48(4)：383－389. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no=20170451&flag=1. DOI：10.6041/j.issn.1000-1298.2017.04.051.
SHI Zhixin，YE Meiyan，LUO Yufeng，et al. Type synthesis and position analysis of 4-DOF parallel mechanisms with two operation modes[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2017，48(4)：383－389.（in Chinese）

16　杨廷力. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京：科学出版社，2012.

17　LI Q，HERVE J M，HUANG P. Type synthesis of a special family of remote center-of-motion parallel manipulators with fixed linear actuators for minimally invasive surgery[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics，2017，9(3)：031012－031012－9.

18　HERVE J M. The mathematical group structure of the set of displacements[J]. Mechanism and Machine Theory，1994，29(1)：73－81.

19　于靖军，刘辛军，丁希仑. 机器人机构学的数学基础[M]. 北京：机械工业出版社，2016.

20　GOGU G. Structural synthesis of parallel robots，part I—methodology[J]. Solid Mechanics & Its Applications，2012，149(3)：653－663.