

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.12.047

# 含子闭环的并联机构运动学分析\*

陈宇航<sup>1,2</sup> 赵铁石<sup>1,2</sup> 边辉<sup>1,2</sup> 赵延治<sup>1,2</sup>

(1.燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室,秦皇岛 066004;

2.燕山大学先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室,秦皇岛 066004)

**摘要:**为解决含子闭环的并联机构运动学建模问题,对含子闭环的机构进行界定。基于旋量运算得到子闭环中任意两构件的相对速度和加速度,并将结果整理成广义螺旋的形式。将子闭环这种新的表示形式与其所在同一串联支链中其他构件相对运动的传统旋量表示相结合,得到这类串联运动链的一、二阶影响系数。进而推导出含子闭环并联机构的输入速度和加速度向末端构件旋量速度和加速度映射的通用公式。分别以含有1自由度和2自由度子闭环的2个并联机构为例进行仿真验证,结果证明所讨论的方法是正确的。

**关键词:** 并联机构 子闭环 运动学 广义螺旋

**中图分类号:** TP24; TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2015)12-0346-09

## Kinematics Analysis of Parallel Mechanism with Sub Closed-chains

Chen Yuhang<sup>1,2</sup> Zhao Tieshi<sup>1,2</sup> Bian Hui<sup>1,2</sup> Zhao Yanzhi<sup>1,2</sup>

(1. Hebei Provincial Key Laboratory of Parallel Robot and Mechatronic System, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China

2. Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science, Ministry of Education,

Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of kinematics modeling of parallel mechanism with sub closed-chains (PMHSC), definition of the mechanism was made. The concept of general screw was derived by discussing the motion relationship of planar four-bar linkage, and its inner connection with instantaneous equivalent screw of so-called general kinematic pair was explained. Based on the concept, the relative velocity and acceleration of any two bars in a sub closed-chain with multi-DOF were obtained, and the result was arranged to the form by using general screw. Combining the new screw representation of sub closed-chain with conventional screw form of relative motion of two rigid bodies that connected directly with a joint, the first and second order influence coefficients of single kinematic serial limb with sub closed-chain were obtained, the discussion was conducted from the serial with one sub closed-chain to multi ones. It revealed that the elements corresponding to the sub closed-chain contained the general screw, especially in the second order influence coefficient matrix, which was consisted of two parts, no longer the lie bracket form of two screws as usual. Furthermore, the universal formula that depicted the mapping from general input velocity and acceleration to screw velocity and acceleration of terminal body of PMHSC was derived. Simulation verification was conducted by using two parallel mechanisms. The first one was 6-(PRRR) US type that had planar PRRR closed loop in each leg, it's a 1-DOF sub closed-chain; and the second one was 5-UPS/(RPRRR) RS type which had a 2-DOF sub closed-chain in the special limb. The results prove that the method discussed is correct.

**Key words:** Parallel mechanism Sub closed-chain Kinematics General screw

收稿日期: 2015-04-07 修回日期: 2015-05-02

\* 国家自然科学基金资助项目(51375420)和国家自然科学基金(青年科学基金)资助项目(51305380)

作者简介: 陈宇航, 博士生, 主要从事并联机器人技术研究, E-mail: yhchen@ysu.edu.cn

通讯作者: 赵铁石, 教授, 博士生导师, 主要从事并联机器人和多维力传感器研究, E-mail: tszhao@ysu.edu.cn

## 引言

机构一般可分为开环机构(串联)和闭环机构(关联),其中含子闭环的机构是比较特殊的一类。合理引入子闭环,能够增加机构的灵活度和刚度<sup>[1]</sup>,替代一些形式复杂的运动副<sup>[2]</sup>,既降低加工难度又提高装配精度。子闭环杆件的相对运动规律一般是非线性的<sup>[3]</sup>,这使含子闭环的机构运动学分析的难度增加。

文献[4-6]研究了分支含子闭环机构的综合方法及运动特性。叶伟等<sup>[7-9]</sup>基于子闭环综合了一类变胞机构。文献[10-12]设计了分支含多种形式子闭环的 6 自由度并联机构。以上研究只分析了机构自由度和运动学位置解,没有揭示这类机构的速度和加速度与广义输入间的映射关系,限制了此类机构实用构型的设计。机构影响系数反映机构中构件的速度和加速度与广义输入的本质关系。这一概念由 Tesar<sup>[13]</sup>首先提出,并得到串联机构的影响系数。黄真<sup>[14]</sup>以串联影响系数为基础得到了空间多闭环机构的影响系数。建立影响系数的方法有很多,其中通过旋量建立的影响系数,尤其是二阶影响系数形式上更加简洁和系统<sup>[15-17]</sup>,编程计算时效率明显提高。现有文献中影响系数的建立大多是对不含子闭环机构而言<sup>[18-19]</sup>,对于含子闭环的机构还没有通用的公式。处理这类机构主要还是通过对位置矢量直接求导来获得构件速度和加速度与广义坐标的关系,或者根据某些子闭环的特殊性找到等效虚拟杆,再用一般方法进行求解<sup>[20-21]</sup>。如 Delta 机构,它的机构学本质是 3-RUU 机构,在其运动学分析中

常引入虚拟杆,正是将机构的分支还原为 RUU 支链。张付祥等<sup>[22]</sup>运用旋量理论分析了闭链级联式机器人的运动学,但没有得到加速度的映射关系。

本文针对分支含子闭环的机构特别是含平面子闭环的并联机构,运用旋量描述子闭环的运动,提出子闭环广义螺旋的概念,并推导计算这类机构影响系数的通用公式。

## 1 含子闭环的机构

广义上讲,任何多于两个环路的机构都可视为含子闭环的机构,但显然这些机构并不都在本文的研究范围之内。如图 1a 所示的 3 自由度平面机构,当以杆 6 为末端件时,这是一个由 2 条分支组成的并联机构,杆 6 左侧的分支含有一个 6R 子闭环,但一般不会以这样的方式去分析该机构,而是将其视为 3-RRR 平面并联机构处理,这是不含子闭环的机构。对于图 1b 和图 1c 所示的平面 3 自由度机构,这仍然是含有 3 个分支的并联机构,其中第 I 分支含有一个子闭环。

比较图 1 中的 3 个机构可以发现,图 1a 中的构件 0 和构件 7 同时属于该机构的所有环路,而图 1b 中只有构件 0 同时属于所有环路,图 1c 中没有任何一个构件同时属于所有环路。因此含子闭环的机构界定方法如下:

(1) 在开环机构中如果含有封闭环路,即为含子闭环的串联机构。

(2) 并联机构中如果存在 2 个构件同时属于所有环路,则为不含子闭环的并联机构;否则,为含子闭环的并联机构。

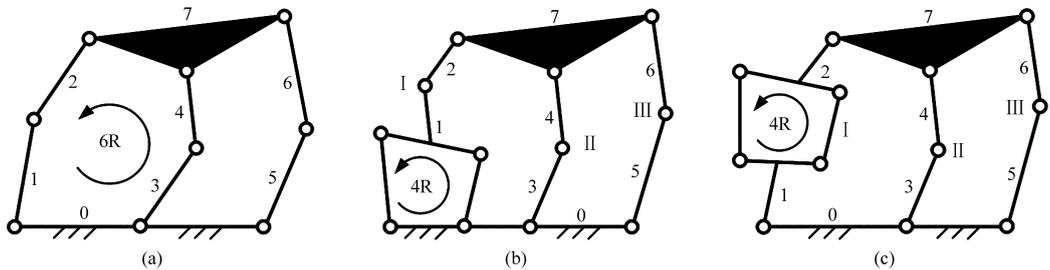


图 1 平面 3 自由度机构  
Fig. 1 Planar 3-DOF mechanism

## 2 平面闭环机构的广义螺旋

子闭环机构通过该环路中的两个构件与所在串联支链的其他构件铰接,将子闭环中这两个构件称为外联杆。外联杆可以是子闭环中任意两个构件,只有表示出外联杆的相对运动,才能通过串联运动链速度和加速度叠加法得到末端构件的速度和加速度。本文提出子闭环广义螺旋的概念,用来表示

外联杆的相对运动。

### 2.1 单自由度平面闭环机构的广义螺旋

此种闭环主要是平面四杆机构,如图 2 所示,其中杆 3 和杆 1 为外联杆。4 个关节的运动副可以是转动副或者移动副,但不能同时为移动副。在 4 个关节变量中,只要有一个给定,机构位形便可确定(理论上对应 2 个位形,但实际中总能确定其中 1 个),将该关节变量视为此闭环机构的广义坐标,

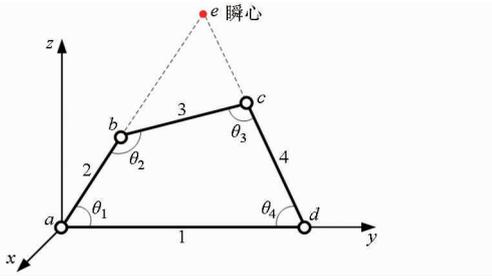


图2 平面四杆机构

Fig. 2 Planar four-bar linkage

区别于后面机构的广义坐标,称其为子广义坐标。子闭环机构的子广义坐标可任意选取,如以  $\theta_1$  为子广义坐标,并记为  $u = \theta_1$ ,则杆3相对于杆1的速度可表示为<sup>[23]</sup>

$${}^1\mathbf{V}^3 = {}^1\mathbf{V}^2 + {}^2\mathbf{V}^3 = \dot{u}\mathbf{S}_a + \dot{\theta}_2\mathbf{S}_b \quad (1)$$

其中  $\theta_2 = f(u)$

对  $\theta_2$  求一阶和二阶导数得

$$\begin{cases} \dot{\theta}_2 = \varepsilon_1 \dot{u} \\ \ddot{\theta}_2 = \varepsilon_{11} \dot{u}\dot{u} + \varepsilon_1 \ddot{u} \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\varepsilon_1 = \frac{\partial f}{\partial u}$   $\varepsilon_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$

将式(2)代入式(1)得

$${}^1\mathbf{V}^3 = \dot{u}\mathbf{S}_u \quad (3)$$

其中  $\mathbf{S}_u = \mathbf{S}_a + \varepsilon_1\mathbf{S}_b$

式中  $\mathbf{S}_u$ ——关于子广义坐标的广义螺旋

根据约束螺旋理论分析可知,任意瞬时平面四杆机构内两构件的相对运动等效为轴线过其相对瞬心的转动。将  $\mathbf{S}_u$  单位化得  $\mathbf{S}_e = \kappa\mathbf{S}_u$ ,  $\mathbf{S}_e$  即为当前瞬时表示杆3和杆1相对转动的等效螺旋,  $\dot{\theta} = \dot{u}/\kappa$  为该转动角速度幅值。广义螺旋不是单位螺旋,它与瞬时等效螺旋呈线性关系。

由文献[23]可知,相邻铰接杆的相对旋量加速度为

$$\begin{cases} {}^1\mathbf{A}^2 = \ddot{u}\mathbf{S}_a \\ {}^2\mathbf{A}^3 = \ddot{\theta}_2\mathbf{S}_b \end{cases} \quad (4)$$

根据旋量加速度合成法则,杆3相对杆1的旋量加速度为

$${}^1\mathbf{A}^3 = {}^1\mathbf{A}^2 + {}^2\mathbf{A}^3 + {}^1\mathbf{V}^2 \times {}^2\mathbf{V}^3 = \ddot{u}\mathbf{S}_a + \ddot{\theta}_2\mathbf{S}_b + \dot{u}\dot{\theta}_2\mathbf{S}_a \times \mathbf{S}_b \quad (5)$$

将式(2)代入式(5)并整理得

$${}^1\mathbf{A}^3 = \ddot{u}(\mathbf{S}_a + \varepsilon_1\mathbf{S}_b) + \dot{u}\dot{u}(\varepsilon_{11}\mathbf{S}_b + \varepsilon_1\mathbf{S}_a \times \mathbf{S}_b) \quad (6)$$

对式(3)进行旋量求导有

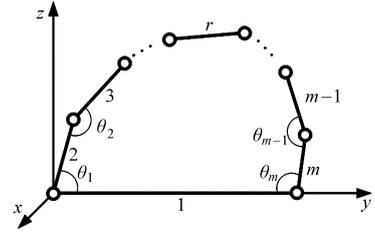
$${}^1\mathbf{A}^3 = \ddot{u}\mathbf{S}_u + \dot{u}\dot{u}\frac{\partial\mathbf{S}_u}{\partial u} \quad (7)$$

比较式(6)和式(7)可知

$$\frac{\partial\mathbf{S}_u}{\partial u} = \varepsilon_{11}\mathbf{S}_b + \varepsilon_1\mathbf{S}_a \times \mathbf{S}_b \quad (8)$$

## 2.2 多自由度平面闭环机构的广义螺旋

假设一个平面  $n$  自由度单闭环机构,如图3所示。机构杆件数和关节数为  $m$ ,2个外联杆分别为杆1和杆  $r$ 。

图3 平面  $n$  自由度单闭环机构Fig. 3 Planar  $n$ -DOF single closed-loop mechanism

任取  $n$  个关节变量为子广义坐标,记为  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ,其余  $m-n$  个关节变量记为  $v_1, v_2, \dots, v_{m-n}$ ,则

$$\begin{cases} v_1 = f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ v_2 = f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ v_{m-n} = f_{m-n}(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases} \quad (9)$$

对式(9)求一阶导数得

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^1 \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{v}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}^2 \dot{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \dot{v}_{m-n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{m-n} \dot{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (10)$$

其中  $\boldsymbol{\varepsilon}^j = [\varepsilon_1^j \ \varepsilon_2^j \ \dots \ \varepsilon_n^j]$  ( $j=1, 2, \dots, m-n$ )

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$$

$$\varepsilon_i^j = \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

对式(10)求导得

$$\begin{cases} \ddot{v}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^1 \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\eta}^1 \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{v}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}^2 \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\eta}^2 \dot{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \ddot{v}_{m-n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{m-n} \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\eta}^{m-n} \dot{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}^j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_1^j}{\partial u_1} & \frac{\partial \varepsilon_2^j}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_n^j}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \varepsilon_1^j}{\partial u_2} & \frac{\partial \varepsilon_2^j}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_n^j}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_1^j}{\partial u_n} & \frac{\partial \varepsilon_2^j}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial \varepsilon_n^j}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

任取一条连接杆1和杆  $r$  的支链,图3中选取机构左侧这条支链,则杆  $r$  相对于杆1的速度为

$${}^1V^r = {}^1V^2 + {}^2V^3 + \dots + {}^{r-1}V^r \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} {}^1V^2 = \dot{\theta}_1 \mathcal{S}_1^c \\ {}^2V^3 = \dot{\theta}_2 \mathcal{S}_2^c \\ \vdots \\ {}^{r-1}V^r = \dot{\theta}_{r-1} \mathcal{S}_{r-1}^c \end{cases} \quad (13)$$

式中  $\mathcal{S}_i^c$  ——该支链各关节运动副的螺旋

假设在这  $r-1$  个关节变量中包含  $s$  个非子广义坐标,  $0 \leq s \leq m-n$ 。不妨令前  $r-s-1$  个关节变量为子广义坐标  $u_1, u_2, \dots, u_{r-s-1}$ , 后面  $s$  个关节变量为非子广义坐标  $v_1, v_2, \dots, v_s$ , 且刚好为式(9)中的前  $s$  项。根据式(10), 式(13)可改写为

$$\begin{cases} {}^1V^2 = \mathcal{S}_1^c \dot{u}_1 \\ \vdots \\ {}^{r-s-1}V^{r-s} = \mathcal{S}_{r-s-1}^c \dot{u}_{r-s-1} \\ {}^{r-s}V^{r-s+1} = \mathcal{S}_{r-s}^c \boldsymbol{\varepsilon}^1 \dot{\boldsymbol{u}} \\ \vdots \\ {}^{r-1}V^r = \mathcal{S}_{r-1}^c \boldsymbol{\varepsilon}^s \dot{\boldsymbol{u}} \end{cases} \quad (14)$$

将式(14)代入式(12)并整理得

$${}^1V^r = \dot{u}_1 \mathcal{S}_{u_1} + \dot{u}_2 \mathcal{S}_{u_2} + \dots + \dot{u}_n \mathcal{S}_{u_n} \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{u_1} = \mathcal{S}_1^c + [\mathcal{S}_{r-s}^c \ \dots \ \mathcal{S}_{r-1}^c] \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \mathcal{S}_{u_2} = \mathcal{S}_2^c + [\mathcal{S}_{r-s}^c \ \dots \ \mathcal{S}_{r-1}^c] \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{S}_{u_{r-s-1}} = \mathcal{S}_{r-s-1}^c + [\mathcal{S}_{r-s}^c \ \dots \ \mathcal{S}_{r-1}^c] \boldsymbol{\varepsilon}_{r-s-1} \\ \mathcal{S}_{u_{r-s}} = [\mathcal{S}_{r-s}^c \ \dots \ \mathcal{S}_{r-1}^c] \boldsymbol{\varepsilon}_{r-s} \\ \vdots \\ \mathcal{S}_{u_n} = [\mathcal{S}_{r-s}^c \ \dots \ \mathcal{S}_{r-1}^c] \boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i = [\boldsymbol{\varepsilon}_i^1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_i^2 \ \dots \ \boldsymbol{\varepsilon}_i^s]^T \end{cases} \quad (16)$$

式中  $\mathcal{S}_{u_1}, \mathcal{S}_{u_2}, \dots, \mathcal{S}_{u_n}$  ——该支链关于此闭环机构子广义坐标的广义螺旋

对式(12)求旋量导数得

$${}^1A^r = {}^1A^2 + {}^2A^3 + \dots + {}^{r-1}A^r + {}^1V^{r-1} \times {}^{r-1}V^r + {}^1V^{r-2} \times {}^{r-2}V^{r-1} + \dots + {}^1V^2 \times {}^2V^3 \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} {}^1A^2 = \mathcal{S}_1^c \ddot{u}_1 \\ \vdots \\ {}^{r-s-1}A^{r-s} = \mathcal{S}_{r-s-1}^c \ddot{u}_{r-s-1} \\ {}^{r-s}A^{r-s+1} = \mathcal{S}_{r-s}^c (\boldsymbol{\varepsilon}^1 \ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{\eta}^1 \dot{\boldsymbol{u}}) \\ \vdots \\ {}^{r-1}A^r = \mathcal{S}_{r-1}^c (\boldsymbol{\varepsilon}^s \ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{\eta}^s \dot{\boldsymbol{u}}) \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)代入式(17), 由式(12)和式(14)求得各速度项, 并考虑式(16)可得

$${}^1A^r = [ \mathcal{S}_{u_1} \ \mathcal{S}_{u_2} \ \dots \ \mathcal{S}_{u_n} ] \ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^T ( \mathcal{S}_{r-s}^c * \boldsymbol{\eta}^1 + \dots + \mathcal{S}_{r-1}^c * \boldsymbol{\eta}^s + \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{H}^c \boldsymbol{Q} ) \dot{\boldsymbol{u}} \quad (19)$$

其中

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{r-s-1} & \boldsymbol{O}_{(r-s-1) \times (n-r+s+1)} \\ \vdots & \boldsymbol{\varepsilon}_{1 \times n}^1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{\varepsilon}_{s \times n}^s \end{bmatrix}_{(r-1) \times n}$$

$$\boldsymbol{H}^c = \begin{cases} \mathcal{S}_i^c \times \mathcal{S}_j^c & (i < j, i, j = 1, 2, \dots, r-1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

式中, “\*”表示广义标量积运算符号。

对式(15)求旋量导数有

$${}^1A^r = \boldsymbol{G}_u \ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{H}_u \dot{\boldsymbol{u}} \quad (20)$$

其中

$$\boldsymbol{G}_u = [ \mathcal{S}_{u_1} \ \mathcal{S}_{u_2} \ \dots \ \mathcal{S}_{u_n} ]$$

$$\boldsymbol{H}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}_{u_1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{S}_{u_n}}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{S}_{u_1}}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial \mathcal{S}_{u_n}}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{6 \times n \times n}$$

比较式(19)和式(20)可得

$$\boldsymbol{H}_u = \mathcal{S}_{r-s}^c * \boldsymbol{\eta}^1 + \dots + \mathcal{S}_{r-1}^c * \boldsymbol{\eta}^s + \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{H}^c \boldsymbol{Q} \quad (21)$$

以上推导过程可以扩展到平面多环路子闭环机构。如果子闭环是一个空间机构, 即一个局部并联机构, 以上求解思想是可行的, 但在具体形式上会非常复杂, 因为要涉及并联机构位置正解的问题。

### 3 含子闭环的串联机构运动学分析

#### 3.1 含单个子闭环的串联机构运动影响系数

串联运动链中含单个子闭环的一般形式如图4所示。

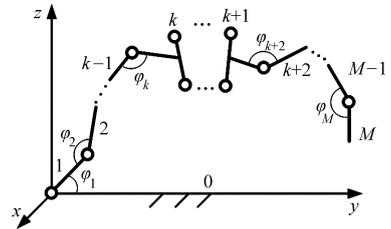


图4 含单个平面子闭环的串联运动链

Fig. 4 Serial kinematic chain with a planar sub closed-loop

杆  $M$  相对于杆  $0$  (参考系) 的速度为

$${}^0V^M = {}^0V^1 + \dots + {}^kV^{k+1} + \dots + {}^{M-1}V^M \quad (22)$$

将式(15)中上标  $1$  替换为  $k$ ,  $r$  替换为  $k+1$ , 则

$${}^kV^{k+1} = \boldsymbol{G}_u \dot{\boldsymbol{u}} \quad (23)$$

式(22)写成旋量的形式为

$${}^0V^M = \dot{\varphi}_1 \mathcal{S}_1 + \dots + \boldsymbol{G}_u \dot{\boldsymbol{u}} + \dots + \dot{\varphi}_M \mathcal{S}_M \quad (24)$$

将子闭环外的  $M-1$  个变量连同子闭环的  $n$  个子广义坐标依次重新编号, 则  $\boldsymbol{G}_u = [ \mathcal{S}_{u_1} \ \dots \ \mathcal{S}_{u_n} ]$ ,

$u = [u_1 \cdots u_n]^T$  变为  $G_u = [ \$_{k+1} \cdots \$_{k+n} ], u = [\varphi_{k+1} \cdots \varphi_{k+n}]^T$ 。原  $\$_{k+i}, \varphi_{k+i}$  变为  $\$_{k+n+i-1}, \varphi_{k+n+i-1}, i = 2, 3, \dots, (M-k)$ 。令  $N = M - 1 + n$ , 式(24)可写成

$${}^0V^M = G_\varphi \dot{\varphi} \quad (25)$$

其中  $G_\varphi = [ \$_1 \cdots \$_N ]$   $\varphi = [\varphi_1 \cdots \varphi_N]^T$   
 式中  $G_\varphi$ ——含子闭环的串联机构一阶影响系数  
 对式(22)求旋量导数得

$${}^0A^M = {}^0A^1 + \cdots + {}^kA^{k+1} + \cdots + {}^{M-1}A^M + L_M(V) + \cdots + L_2(V) \quad (26)$$

其中  $L_i(V) = {}^0V^{i-1} \times {}^{i-1}V^i$  ( $i = 2, 3, \dots, M$ )  
 ${}^kA^{k+1}$  由式(20)替换上标后求得。将式(20)与式(23)代入式(26), 并按新的编号次序得到

$${}^0A^M = \ddot{\varphi}_1 \$_1 + \cdots + G_u \ddot{u} + \dot{u}^T H_u \dot{u} + \cdots + \ddot{\varphi}_N \$_N + \dot{\varphi}^T H_1 \dot{\varphi} \quad (27)$$

其中  $H_1 = \begin{cases} \$_i \times \$_j & (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (i < j) \\ 0 & \text{(其他)} \end{cases}$

将式(27)中  $H_u$  扩展为  $N \times N$  的 6 维矢量矩阵得

$$H_2 = \begin{bmatrix} & & O_{k \times n} & & & \\ O_{N \times k} & & H_u & & & \\ & & O_{(M-k-1) \times n} & & O_{N \times (M-k-1)} & \\ & & & & & \end{bmatrix}_{6 \times N \times N} \quad (28)$$

则有  $\dot{u}^T H_u \dot{u} = \dot{\varphi}^T H_2 \dot{\varphi}$  (29)

将式(29)代入式(27)并整理成熟悉的形式得

$${}^0A^M = G_\varphi \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^T H_\varphi \dot{\varphi} \quad (30)$$

其中  $H_\varphi = H_1 + H_2$   
 式中  $H_\varphi$ ——含子闭环串联机构的二阶运动影响系数

### 3.2 含多个子闭环的串联机构运动影响系数

假设机构中含有  $w$  个子闭环, 如图 5 所示。

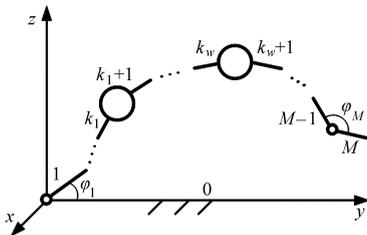


图 5 含多个子闭环的串联运动链

Fig.5 Serial kinematic chain with multi planar sub closed-loop

每个子闭环的子广义坐标数为  $n_i, i = 1, 2, \dots, w$ 。杆  $M$  的速度和加速度仍然表示为式(25)和式(30)的形式。令  $N = M - w + \sum_{i=1}^w n_i$ , 此时  $G_\varphi$  中

含有  $M - w$  个一般螺旋和  $w$  组子闭环的广义螺旋。式(30)的  $H_\varphi$  变为

$$H_\varphi = H_1 + \sum_{i=1}^w H_2^i \quad (31)$$

其中  $H_2^i = \begin{bmatrix} & & O_{c_i \times n_i} & & & \\ O_{N \times c_i} & & H_u^i & & & \\ & & O_{(N-c_i-n_i) \times n_i} & & O_{N \times (N-c_i-n_i)} & \\ & & & & & \end{bmatrix}_{6 \times N \times N}$

式中  $c_i$ ——第  $i$  个子闭环之前的变量数

### 4 含子闭环的并联机构运动学分析

以 6 自由度并联机构为例, 机构有 6 条分支, 每一分支  $N = 6$ 。在每个分支中任取一个关节变量(包括子闭环内)作为机构的输入, 即机构广义坐标, 记为  $q_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 。令  $q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_6]^T$ 。

由式(25)和式(30)得到各分支的  $G_\varphi$  和  $H_\varphi$ , 记为  $G_\varphi^i$  和  $H_\varphi^i$ , 在不奇异的情况下  $G_\varphi^i$  为  $6 \times 6$  满秩矩阵,  $G_\varphi^{(-1)^i}$  存在, 参照文献[24]有

$$\begin{cases} V = G_\varphi \dot{q} \\ A = G_\varphi \ddot{q} + \dot{q}^T H_\varphi \dot{q} \end{cases} \quad (32)$$

式中  $V, A$ ——上平台旋量速度、加速度

$G_\varphi, H_\varphi$ ——含子闭环并联机构的一、二阶影响系数

### 5 数值算例

以 6-(PRRR)US 和 5-UPS/(RPRRR)RS 机构为例, 在机构位置解得到的基础上, 根据理论推导在 Matlab 中编程计算机机构的输入速度和加速度, 并在 ADAMS 中进行运动仿真, 将仿真结果与编程得到的结果进行比较。

#### 5.1 6-(PRRR)US 机构仿真验证

如图 6 所示, 该机构有 6 条结构相同的分支, 各分支中含有一个 PRRR 平面闭环四杆机构, 这是一个单自由度的子闭环。坐标系  $\{O\}$  为固定参考系, 原点位于下平台几何中心,  $x$  轴平行于  $E_1 E_2$  并指向  $E_1, z$  轴竖直向上; 坐标系  $\{P\}$  固连于上平台, 原点位于上平台中心, 初始位置  $\{P\}$  系与  $\{O\}$  系各坐标轴平行。

图 7 为分支机构简图,  $\{F_i\}$  为分支坐标系。分支呈规律分布, 已知一条分支的结构参数, 其余分支对应点坐标可确定。分支 1 结构参数如表 1 所示。

子闭环的子广义坐标为  $A_i F_i$  长, 记为  $l_{A_i F_i}$ 。在某一支内省略下标, 由闭环几何关系可得

$$\theta = \arccos \frac{l_{AD}^2 + l_{AE}^2 - l_{DE}^2}{2l_{AD}l_{AE}} - \arctan \frac{l_{AF}}{l_{FE}} \quad (33)$$

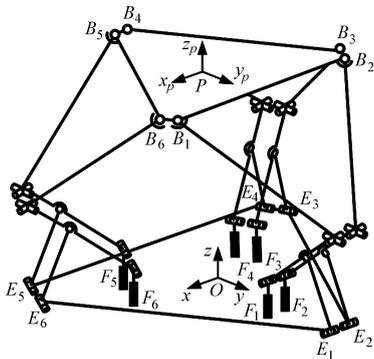


图 6 6-(PRRR) US 机构简图

Fig. 6 Sketch of 6-(PRRR) US mechanism

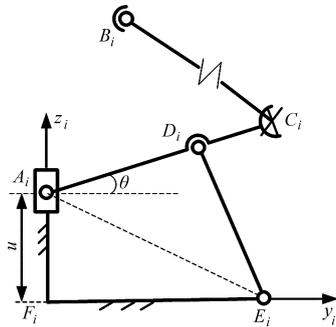


图 7 (PRRR) US 分支简图

Fig. 7 Sketch of (PRRR) US limb

式(33)对闭环子广义坐标求偏导得到式(2)中的  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_{11}$ , 根据式(16)求得子闭环的广义螺旋。

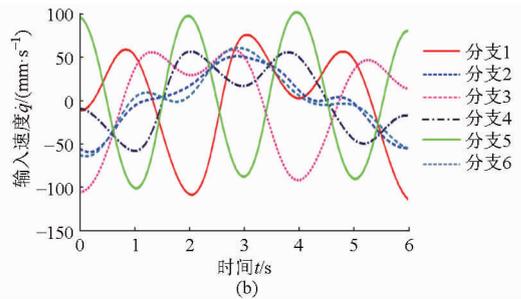
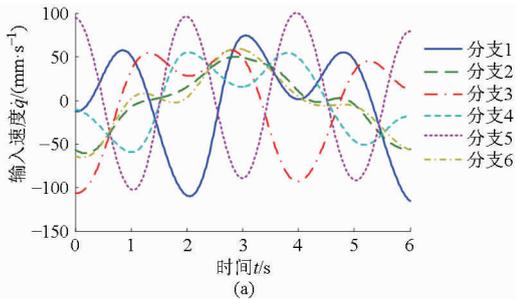


图 8 输入速度曲线

Fig. 8 Input velocity curves

(a) Matlab 计算 (b) ADAMS 仿真

### 5.2 5-UPS/(RPRRR)RS 机构仿真实验

机构如图 10 所示。分别在上、下平台建立动系  $\{P\}$  和固定参考系  $\{O\}$ 。x 轴平行于  $A_2 A_3$ , z 轴竖直向上。初始位置动系相对定系的高度为 300 mm, 坐标轴与定系对应轴平行。上、下平台铰链点在  $xOy$  ( $x_p, y_p$ ) 平面的投影如图 11 所示, 图中给出了铰链点的坐标。机构的 (RPRRR) RS 分支含有一个 RPRRR 平面五杆子闭环, 这是一个 2 自由度机构, 如图 12 所示, 其中已知杆件长度列于表 3。

在子闭环中, 通过  $A_0 C$  支链表示杆  $CD$  相对杆  $A_0 A_1$  的运动, 取该支链前 2 个关节变量为子闭环的子广义坐标。由闭环机构的几何关系可得

表 1 分支 1 结构参数

Tab. 1 Structure parameters of limb 1 mm

参数	$l_{F_1 E_1}$	$l_{E_1 D_1}$	$l_{A_1 D_1}$	$l_{A_1 C_1}$	$l_{C_1 B_1}$
数值	325	280	280	460	671

取各分支输入为  $q_i = l_{A_i F_i}$ ,  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_6]^T$ 。给定上平台运动规律如表 2 所示。

表 2 上平台运动规律

Tab. 2 Motion of moving platform

xyz 欧拉角/(°)	P 点位移/mm
$\begin{cases} \alpha = 3 \sin(\pi t) \\ \beta = 3 \sin(0.5 \pi t) \\ \gamma = 2 \sin \frac{\pi t}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} P_x = 10 \sin(\pi t) \\ P_y = 20 \sin(0.5 \pi t) \\ P_z = 30 \sin \frac{\pi t}{3} + 780 \end{cases}$

依据理论推导在 Matlab 中编程计算, 得输入速度和加速度变化曲线如图 8a 和图 9a 所示。上平台以相同的运动规律在 ADAMS 中进行运动仿真, 仿真结果如图 8b 和图 9b 所示。对比理论计算与仿真结果, 曲线变化趋势及取值范围一致。将仿真结果导入 Matlab 中, 计算仿真结果与理论结果在任意时刻的误差, 速度与加速度的误差均在  $\pm 5 \times 10^{-5}$  范围内, 可认为理论结果与仿真结果完全吻合。说明利用广义螺旋建立的速度加速度映射模型是正确的。

$$\theta = \arccos \frac{u_2^2 + A_1 C^2 - A_0 A_1^2}{2u_2 l_{A_0 A_1}} + \arccos \frac{A_1 C^2 + CD^2 - A_1 D^2}{2l_{A_1 C} l_{CD}} \quad (34)$$

其中  $A_1 C = \sqrt{u_2^2 + A_0 A_1 - 2u_2 l_{A_0 A_1} \cos u_1}$

式(34)对  $u_1$ 、 $u_2$  求偏导数得闭环机构的广义螺旋。由式(20)、(21)可求得闭环机构的  $\mathbf{G}_u$  和  $\mathbf{H}_u$ , 再由式(25)、(27)、(28)和式(30)可得该分支的  $\mathbf{G}_\varphi^1$  和  $\mathbf{H}_\varphi^1$ 。其他分支不含子闭环, 按一般方法求解。取各分支的移动副为机构输入, 可求得机构的  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{H}$ , 得到上平台运动与机构输入的映射关系。

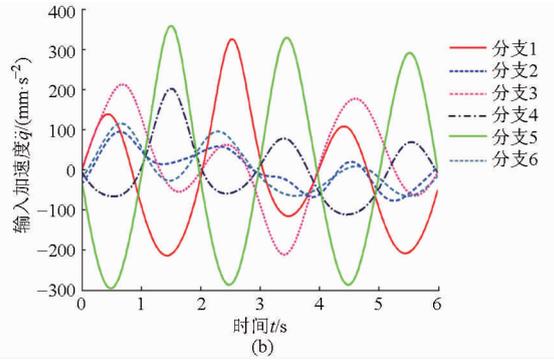
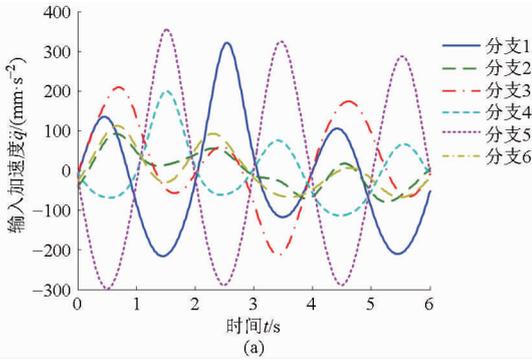


图9 输入加速度曲线

Fig.9 Input acceleration curves

(a) Matlab 计算 (b) ADAMS 仿真

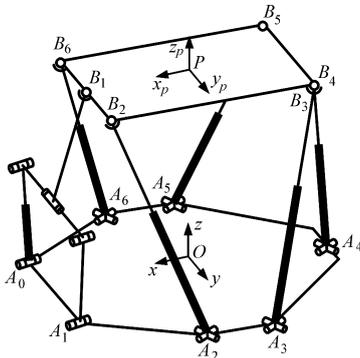


图10 5-UPS/(RPRRR) RS 机构简图

Fig.10 Sketch of 5-UPS/(RPRRR) RS mechanis

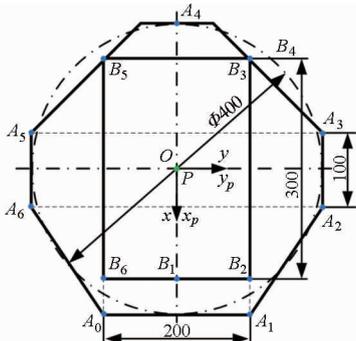


图11 铰链点  $A_i$  和  $B_i$  在平面  $xOy$  内的投影

Fig.11 Projection of points  $A_i$  and  $B_i$  in plane  $xOy$

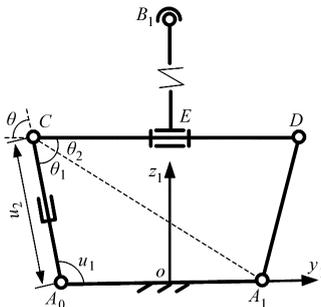


图12 (RPRRR) RS 分支机构简图

Fig.12 Sketch of (RPRRR) RS limb

与仿真结果高度一致,误差仍在  $\pm 5 \times 10^{-5}$  范围内。

表3 子闭环分支结构参数

Tab.3 Structure parameters of sub closed-loop

参数	$l_{A_0A_1}$	$l_{A_1D}$	$l_{CD}$	$l_{EB_1}$
数值	200	280	240	671

表4 上平台运动规律

Tab.4 Motion of moving platform

xyz 欧拉角/(°)	P 点位移/mm
$\begin{cases} \alpha = 5 \sin(\pi t) \\ \beta = 2 \sin(0.5\pi t) \\ \gamma = \sin \frac{\pi t}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} P_x = 10 \sin(\pi t) \\ P_y = 20 \sin(0.5\pi t) \\ P_z = 5 \sin \frac{\pi t}{3} \end{cases}$

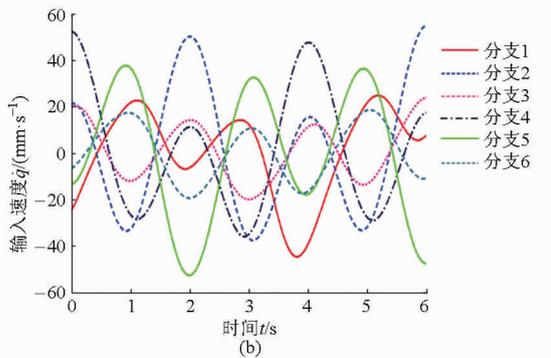
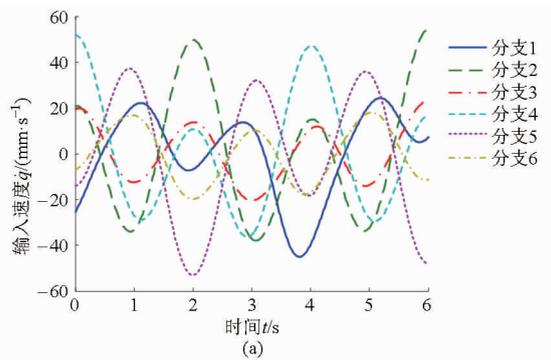


图13 输入速度曲线

Fig.13 Input velocity curves

(a) Matlab 计算 (b) ADAMS 仿真

给定上平台运动规律如表4所示,通过理论计算和 ADAMS 仿真得到机构输入速度和加速度变化曲线如图13、图14所示。可以看出,理论计算结果

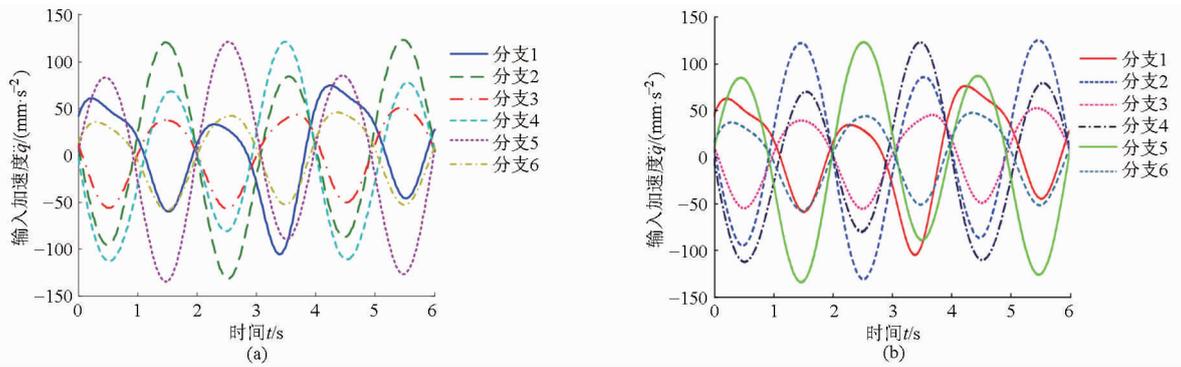


图 14 输入加速度曲线

Fig. 14 Input acceleration curves

(a) Matlab 计算 (b) ADAMS 仿真

通过 5.1 和 5.2 节可以看出本文提出的广义螺旋方法,对于分支含有平面子闭环的并联机构建立运动学模型是有效的,该方法也适用于含有形式较简单的空间子闭环机构。

## 6 结束语

对含子闭环的机构进行界定,制定这类机构的判别方法。提出广义螺旋的概念,得到由广义螺旋

表示的  $n$  自由度平面闭环机构外联杆间的相对速度和相对加速度。基于子闭环运动的广义螺旋表示求得含单个子闭环和多个子闭环串联机构的一阶、二阶影响系数,并进一步得到含子闭环并联机构的运动影响系数。本文所得结论是对旋量理论的拓展,为含子闭环的空间机构运动学建模提供一种参考方法,促进含多种形式子闭环机构的综合与设计。

## 参 考 文 献

- 刘辛军. 并联机器人连接分支结构及六自由度并联机器人机构;中国,1472046[P]. 2003-07-16.
- 刘超. 空间单闭环两足步行连杆机构的研究[D]. 北京:北京交通大学,2012.  
Liu Chao. Research on spatial single-loop biped linkage mechanisms[D]. Beijing:Beijing Jiaotong University,2012. (in Chinese)
- To Minh, Webb Phil. An improved kinematic model for calibration of serial robots having closed-chain mechanisms[J]. Robotica, 2012,30(6): 963-971.
- 贺利乐. 含五杆闭环的并联机构构型综合及主要运动性能分析研究[D]. 西安:西安理工大学,2006.  
He Lile. Research on the structure synthesis and the primary kinematics performance analysis for the parallel mechanism with the five-bar closed-chain[D]. Xi'an:Xi'an University of Technology,2006. (in Chinese)
- 贺利乐,刘宏昭,褚金奎. 基于平面五杆闭环结构的平面并联机构类型综合与拓扑分析[J]. 机械科学与技术, 2004, 23(10): 1201-1204,1225.  
He Lile, Liu Hongzhao, Chu Jinkui. Type synthesis and topological description of spatial parallel mechanisms based on five-bar closed-loop structure[J]. Mechanical Science and Technology, 2004,23(10): 1201-1204,1225. (in Chinese)
- 文用. 单支链含闭环的三平动并联机构的综合与分析[D]. 深圳:哈尔滨工业大学,2012.  
Wen Yong. Synthesis and analysis of TPM with closed-loop in each chain[D]. Shenzhen:Harbin Institute of Technology,2012. (in Chinese)
- Ye Wei, Fang Yuefa, Guo Sheng. Reconfigurable parallel mechanisms with planar five-bar metamorphic linkages[J]. Science China Technological Sciences, 2014,57(1): 210-218.
- Ye Wei, Fang Yuefa, Zhang Ketao, et al. A new family of reconfigurable parallel mechanisms with diamond kinematotropic chain[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014,74:1-9.
- 叶伟,方跃法,郭盛,等. 一种新型并联机构的运动分岔特性及运动学分析[J]. 机械工程学报, 2013,49(13): 8-16.  
Ye Wei, Fang Yuefa, Guo Sheng, et al. Bifurcated motion and kinematics of novel parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013,49(13): 8-16. (in Chinese)
- 蔡敢为,王红州,潘宇晨. 一种含 5R 闭环子链的六自由度并联机构,CN102350698A[P]. 2011-09-22.
- 贺利乐,刘宏昭. 一种六自由度混合驱动并联机构的位置正解分析研究[J]. 中国机械工程, 2007,18(8): 920-923, 970.  
He Lile, Liu Hongzhao. Research on forward solution of position of 6-DOF hybrid driven parallel mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2007,18(8): 920-923,970. (in Chinese)
- 沈惠平,杨廷力,马履中. 一类新型六自由度并联机构及其结构分析[J]. 中国机械工程, 2008,19(6): 721-724.  
Shen Huiping, Yang Tingli, Ma Lüzhong. A class of 6-DOF parallel kinematic structures and structure analysis[J]. China

- Mechanical Engineering, 2008,19(6): 721 – 724. (in Chinese)
- 13 Thomas M, Tesar D. Dynamic modeling of serial manipulator arms[J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1982,104(3): 218 – 228.
- 14 黄真. 平行支路机械手动力模型(一)系数矩阵[J]. 东北重型机械学院学报, 1985(4): 36 – 44.
- 15 Zhao Tieshi, Geng Mingchao, Chen Yuhang, et al. Kinematics and dynamics hessian matrices of manipulators based on screw theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015,28(2): 226 – 235.
- 16 耿明超, 赵铁石, 杨建涛, 等. 平面弹性欠驱动并联机构刚度特性分析[J]. 农业机械学报, 2015,46(5): 365 – 371.  
Geng Mingchao, Zhao Tieshi, Yang Jiantao, et al. Stiffness characteristics of planar elastic underactuated parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015,46(5): 365 – 371. (in Chinese)
- 17 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 4 – UPS/UPR 并联机构动力学分析[J]. 农业机械学报, 2014,45(8): 299 – 306.  
Geng Mingchao, Zhao Tieshi, Wang Chang, et al. 4 – UPS/UPR parallel mechanism dynamic analysis [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014,45(8): 299 – 306. (in Chinese)
- 18 张忠海, 李端玲. 空间并联机构运动学分析的共形几何代数方法[J]. 农业机械学报, 2015,46(4): 325 – 330.  
Zhang Zhonghai, Li Duanling. Conformal geometric algebra method for kinematics analysis of spatial parallel mechanisms [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015,46(4): 325 – 330. (in Chinese)
- 19 陈修龙, 孙先洋, 邓昱. 4 – UPS – RPS 空间 5 自由度并联机构运动学分析[J]. 农业机械学报, 2013,44(8): 257 – 261, 267.  
Chen Xiulong, Sun Xianyang, Deng Yu. Kinematics analysis of 4 – UPS – RPS spatial 5-DOF parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013,44(8): 257 – 261, 267. (in Chinese)
- 20 Asgari M, Ardestani M. Dynamics and control of a novel 3-DOF spatial parallel robot[C] // 2013 First RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2013: 183 – 188.
- 21 李雪鹏. 两种含平面分支六自由度并联机构理论研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2014.  
Li Xuepeng. Theoretical study of two six-DOF parallel manipulators with planar limbs[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2014. (in Chinese)
- 22 张付祥, 付宜利, 王树国. 闭链级联式机器人基于旋量理论的运动学分析方法[J]. 机械工程学报, 2006,42(4): 112 – 117.  
Zhang Fuxiang, Fu Yili, Wang Shuguo. Screw theory based method of kinematic analysis on tandem robots of closed chains. [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006,42(4): 112 – 117. (in Chinese)
- 23 Rico J M, Gallardo J, Duffy J. Screw theory and higher order kinematic analysis of open serial and closed chains[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999,34(4): 559 – 586.
- 24 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

~~~~~

(上接第 308 页)

- 13 干年妃, 程超, 游雄杰, 等. 基于扭杆安装方式的悬架刚度计算及特性分析[J]. 机械设计 & 制造, 2015(1): 74 – 78.  
Gan Nianfei, Cheng Chao, You Xiongjie, et al. Stiffness calculation and performance analysis of suspension based on the installation of torsion bar spring [J]. Machinery Design & Manufacture, 2015(1): 74 – 78. (in Chinese)
- 14 董小冈, 余淼, 廖昌荣, 等. 冲击载荷下磁流变变刚度变阻尼缓冲系统减振控制[J]. 农业机械学报, 2010, 41(3): 20 – 24.  
Dong Xiaomin, Yu Miao, Liao Changrong, et al. Absorbing control of magneto-rheological variable stiffness and damping system under impact load [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(3): 20 – 24. (in Chinese)
- 15 汪若尘, 江浩斌, 张效良, 等. 阻尼非线性半主动悬架的建模与控制[J]. 农业机械学报, 2008, 39(12): 14 – 17.  
Wang Ruochen, Jiang Haobin, Zhang Xiaoliang, et al. Modeling and control of semi-active suspension with nonlinear damping [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(12): 14 – 17. (in Chinese)
- 16 Crolla D, 喻凡. 车辆动力学及其控制[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003.
- 17 吴光强, 黄焕军, 叶光湖. 基于分数阶微积分的汽车空气悬架半主动控制[J]. 农业机械学报, 2014, 45(7): 19 – 25.  
Wu Guangqiang, Huang Huanjun, Ye Guanghu. Semi-active control of automotive air suspension based on fractional calculus [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(7): 19 – 25. (in Chinese)
- 18 陈燎, 周孔亢, 李仲兴. 空气弹簧动态特性拟合及空气悬架变刚度计算分析[J]. 机械工程学报, 2010, 46(4): 93 – 98.  
Chen Liao, Zhou Kongkang, Li Zhongxing. Dynamic characteristics fitting of air springs and numerical analysis of air suspensions with variant stiffness[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(4): 93 – 98. (in Chinese)
- 19 叶光湖, 吴光强. 汽车磁流变减振器半主动空气悬架仿真研究[J]. 汽车工程, 2015, 37(5): 560 – 565.  
Ye Guanghu, Wu Guangqiang. A study on the simulation of semi-active air suspension with magneto-rheological damper [J]. Automotive Engineering, 2015, 37(5): 560 – 565. (in Chinese)
- 20 胡明华. 具有多输入和扰动作用的非线性系统的前馈/反馈线性化[J]. 航空学报, 1991, 12(4): 140 – 147.  
Hu Minghua. Feedforward and feedback linearization of non-linear system with multi-input and disturbances[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1991, 12(4): 140 – 147. (in Chinese)