doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.12.045

基于拉格朗日的冗余驱动并联机构刚体动力学建模*

陈修龙[1]　孙德才[1]　王　清[2]

(1.山东科技大学机械电子工程学院，青岛 266590；2.山东科技大学土木工程与建筑学院，青岛 266590)

摘要：针对 4－UPS－RPU 4 自由度冗余驱动并联机构的刚体动力学建模问题，基于拉格朗日方程建立冗余驱动并联机构动力学模型。首先，推导出 4－UPS－RPU 冗余驱动并联机构系统的动能表达式、势能表达式和作用于并联机构非保守力的等效广义力；然后，应用拉格朗日法建立 4－UPS－RPU 冗余驱动并联机构的动力学模型，为并联机构驱动力的求解以及整个机构的动力学分析奠定基础；最后结合算例，采用 Matlab 编程对动力学模型进行数值计算并绘制了机构驱动杆驱动力变化曲线，将上述分析结果与 ADAMS 虚拟仿真结果对比验证了所建动力学模型的正确性。研究不仅为 4－UPS－RPU 4 自由度冗余驱动并联机构动力学优化设计和控制等后续研究提供了理论依据，也为其他冗余驱动并联机构的动力学建模提供了可行的方法。

关键词：冗余驱动并联机构　刚体动力学模型　拉格朗日方法　4 自由度

中图分类号：TP241；TH112　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1000-1298(2015)12-0329-08

Rigid Dynamics Modeling of Redundant Actuation Parallel Mechanism Based on Lagrange Method

Chen Xiulong[1]　Sun Decai[1]　Wang Qing[2]

(1. *College of Mechanical and Electronic Engineering*, *Shandong University of Science and Technology*, *Qingdao* 266590, *China*
2. *College of Civil Engineering and Architecture*, *Shandong University of Science and Technology*, *Qingdao* 266590, *China*)

Abstract: To realize the rigid dynamics modeling of a novel 4 − UPS (universal joints-prismatic pairs-spherical joints) − RPU (revolution joints − prismatic pairs − universal joints) spatial 4-degree of freedom redundant actuation parallel mechanism, the Lagrange method was adopted. Firstly, the expression of kinetic energy and potential energy of 4 − UPS − RPU redundant actuation parallel mechanism were educed, and the equivalent generalized force of non conservative force was analyzed. Secondly, the dynamics model of 4 − UPS − RPU redundant actuation parallel mechanism was established by the Lagrange method, which was the foundation of the solution of driving force and dynamic analysis. Finally, the driving forces of 4 − UPS − RPU spatial 4-degree of freedom redundant actuation parallel mechanism were solved by theoretical calculation and virtual simulation combined with examples, respectively. The numerical results obtained by solving the dynamics model of the 4 − UPS − RPU parallel mechanism by Matlab were in agreement well with the virtual simulation results by ADAMS. The results can provide theoretical basis for dynamic optimization design and control of 4 − UPS − RPU parallel mechanism, and also suggest a way of thinking about rigid body dynamics modeling for other redundant actuation spatial parallel mechanism.

Key words: Redundant actuation parallel mechanism　Rigid dynamics model　Lagrange method　4-DOF

收稿日期：2015－03－25　修回日期：2015－04－27

* 国家自然科学基金资助项目(51005138)、山东省优秀中青年科学家科研奖励基金资助项目(BS2012ZZ008)、山东省泰山学者建设工程专项资金资助项目(tshw20130956)、山东科技大学杰出青年基金资助项目(2011KYJQ102)和山东科技大学研究生创新基金资助项目(YCA120329)

作者简介：陈修龙，副教授，博士生导师，主要从事并联机器人及其动力学研究，E-mail：cxldy99@163.com

引言

冗余驱动并联机构是输入构件数目多于输出构件自由度数的并联机构，由于它具有更大的承载能力、更高刚度和更高的定位精度等，受到了工业界和学者们的广泛关注，已成为国际机器人和机构学领域的研究热点[1-4]。

并联机构的刚体动力学模型是动力学性能分析评价、优化设计和控制的基础，一直是国内外学者的研究重点和难点，迄今已形成了基于牛顿-欧拉法、虚功原理和凯恩方程法等的并联机构动力学建模方法[5-9]。目前虽然国内外学者对非冗余并联机构的刚体动力学进行了较深入研究，取得了一批有价值的研究成果，但针对冗余驱动并联机构刚体动力学建模的研究还相对较少[10-15]，已有的研究大都是基于牛顿-欧拉和凯恩法的建模方法[16]。牛顿-欧拉法适合于简单系统的动力学建模，推导过程烦琐，计算量较大；凯恩法较难理解和掌握，计算过程复杂。拉格朗日方法是适用于复杂系统的一种动力学建模方法，它从能量的角度出发，推导过程简便，得到的动力学方程形式相对简单，物理意义明确。因此需要建立一套适用于冗余驱动空间并联机构的刚体动力学拉格朗日建模方法，以推动冗余驱动并联机构的发展与实际应用。

本文以 4-UPS-RPU 二维移动二维转动 4 自由度冗余驱动并联机构为研究对象，分析该机构系统的动能、势能和非保守力的等效广义力，在此基础上，采用拉格朗日方程建立该机构的刚体动力学模型，并利用理论数值分析与虚拟样机仿真相结合的方法验证模型的正确性。

1 冗余驱动 4-UPS-RPU 并联机构系统动能

1.1 4-UPS-RPU 并联机构简介

4-UPS-RPU 并联机构由动平台、定平台和连接动平台和定平台的 5 个分支组成（图 1），定平台通过 4 个结构完全相同的驱动分支 UPS（虎克铰-移动副-球副）以及另一个驱动分支 RPU（转动副-移动副-虎克铰）与动平台相连接，是目前少有的 4 自由冗余驱动并联机构构型，具有广阔的应用前景。

1.2 动平台的动能

冗余驱动 4-UPS-RPU 并联机构动平台的动能为

$$E_1=\frac{1}{2}m_m v_m^2+\frac{1}{2}J_m\omega_m^2 \tag{1}$$

式中 m_m——动平台质量

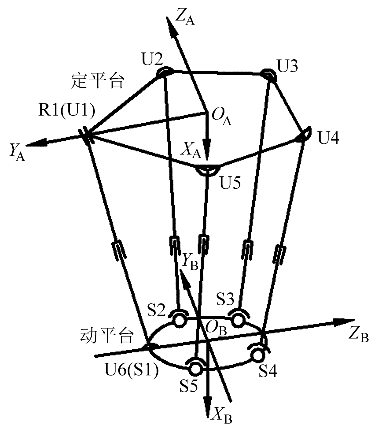

图 1 4-UPS-RPU 并联机构图

Fig. 1 Sketch of 4-UPS-UPU parallel mechanism

v_m——动平台线速度

ω_m——动平台角速度

J_m——动平台转动惯量

1.3 驱动分支的动能

冗余驱动 4-UPS-RPU 并联机构的 UPS 驱动分支和 RPU 驱动分支由伸缩杆和摆动杆组成，驱动分支的动能是伸缩杆和摆动杆的动能之和。冗余驱动 4-UPS-RPU 并联机构坐标系如图 2 所示。

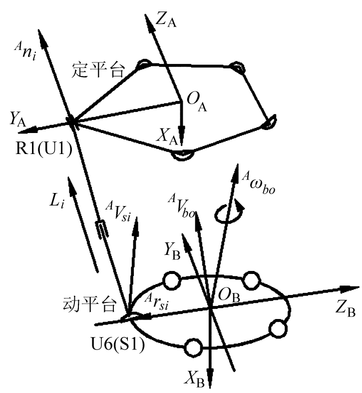

图 2 4-UPS-RPU 并联机构坐标系图

Fig. 2 Coordinate systems of 4-UPS-RPU parallel mechanism

驱动分支在定坐标系下的摆动角速度为

$$ {}^A\boldsymbol{\omega}_i=\frac{{}^A\boldsymbol{n}_i\times{}^AV_{si}}{l_i} \tag{2}$$

其中
$$ {}^AV_{si}={}^A\boldsymbol{\omega}_{bo}\times{}^A\boldsymbol{r}_{si}+{}^AV_{bo} \tag{3}$$

将式（3）代入式（2）可得驱动分支的角速度

$$ {}^A\boldsymbol{\omega}_i=\frac{1}{l_i}[{}^A\boldsymbol{n}_i\times{}^AV_{bo}+{}^A\boldsymbol{n}_i\times({}^A\boldsymbol{\omega}_{bo}\times{}^A\boldsymbol{r}_{si})] \tag{4}$$

式中 ${}^A\boldsymbol{n}_i$——杆 li 在定坐标系下表示的单位方向矢量

${}^AV_{bo}$——动平台中心点在定坐标系下表示的速度

${}^A\boldsymbol{r}_{si}$——球铰 Si 相对于 O_B 在定坐标系下表示的矢量

l_i——驱动分支杆长（球铰中心到虎克铰中心的距离）

式(4)化简后可得

$$ {}^{A}\boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{l_i}\left({}^{A}\boldsymbol{n}_{i3\times3} - {}^{A}\boldsymbol{n}_{i3\times3}\,{}^{A}\boldsymbol{r}_{si3\times3}\begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\dot{\boldsymbol{q}}_a \tag{5} $$

其中

$$ {}^{A}\boldsymbol{n}_{i3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{A}n_{iz} & {}^{A}n_{iy} \\ {}^{A}n_{iz} & 0 & -{}^{A}n_{ix} \\ -{}^{A}n_{iy} & {}^{A}n_{iz} & 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}\boldsymbol{r}_{si3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{A}r_{siz} & {}^{A}r_{siy} \\ {}^{A}r_{siz} & 0 & -{}^{A}r_{six} \\ -{}^{A}r_{siy} & {}^{A}r_{six} & 0 \end{bmatrix} $$

${}^{1}J_i$ 为第 i 个驱动分支上摆动杆相对于其转轴中心的坐标系 $o_ix_iy_iz_i$ 惯量矩阵，$o_ix_iy_iz_i$ 各坐标轴方向与定坐标系相同。因为 UPS 驱动分支绕相应虎克铰（驱动分支 RPU 绕相应的转动副轴线转动）中心转动，在任意瞬时驱动分支相对于坐标系 $o_ix_iy_iz_i$ 的转动惯量不同，所以需要求得摆动杆在任意位姿时的惯量矩阵，摆动杆质量为 M_b，采用坐标变换方法求得 ${}^{1}\boldsymbol{J}_i$，即为

$$ {}^{1}\boldsymbol{J}_i = \boldsymbol{R}'\begin{bmatrix} I_{xx}+M_br_{uc}^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}+M_br_{uc}^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}\boldsymbol{R}'^{\mathrm{T}} \tag{6} $$

其中

$$ \boldsymbol{R}' = \begin{bmatrix} -\dfrac{n_{1x}n_{1z}}{\sqrt{1-n_{1z}^2}} & \dfrac{n_{1y}}{\sqrt{1-n_{1z}^2}} & n_{1x} \\ -\dfrac{n_{1y}n_{1z}}{\sqrt{1-n_{1z}^2}} & -\dfrac{n_{1x}}{\sqrt{1-n_{1z}^2}} & n_{1y} \\ \sqrt{1-n_{1z}^2} & 0 & n_{1z} \end{bmatrix} $$

$$ \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} $$

式中　$\boldsymbol{R}'$——坐标转换矩阵

$\boldsymbol{I}$——摆动杆的主惯性矩

r_{uc}——摆动杆质心到其所对应的定平台运动副的距离

摆动杆在并联机构运动过程中是绕虎克铰中心点（或转动副）的转动，根据绕定轴的转动动能公式，其动能为

$$ {}^{1}E_i = \frac{1}{2}{}^{A}\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}}({}^{1}\boldsymbol{J}_i)\,{}^{A}\boldsymbol{\omega}_i \tag{7} $$

伸缩杆的动能计算除了考虑伸缩杆绕定平台相应虎克铰（或转动副）中心点的摆动外，还需要考虑伸缩杆绕延杆长方向的移动。因此伸缩杆的动能为

$$ {}^{2}E_i = \frac{1}{2}{}^{A}\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}}({}^{2}\boldsymbol{J}_i)\,{}^{A}\boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2}m_s\dot{l}_i^2 \tag{8} $$

其中
$$ \frac{1}{2}m_s\dot{l}_i^2 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}_a\boldsymbol{J}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_sJ_A\dot{\boldsymbol{q}}_a^{\mathrm{T}} $$

$$ \boldsymbol{M}_s = \begin{bmatrix} m_{su} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{ss} \end{bmatrix} $$

式中　$\boldsymbol{M}_s$——伸缩杆质量矩阵

$\dot{l}_i$——第 i 个驱动杆延杆长方向移动的速度

${}^{2}\boldsymbol{J}_i$——第 i 个驱动分支伸缩杆相对于其虎克铰（或转动副）转轴中心的坐标系 $o_ix_iy_iz_i$ 的惯量矩阵，同样可以通过坐标变换方法求得

根据所有构件的动能表达式，则系统动能和为

$$ E_2 = \sum_{i=1}^{5}({}^{1}E_i + {}^{2}E_i) + E_1 \tag{9} $$

2　4-UPS-RPU 并联机构系统的势能

势能的大小与零势能面有关，规定定坐标系 YOZ 平面为零势能面。对于摆动杆需要求出质心在定坐标系下 x 方向的坐标。其表达式为

$$ {}^{A}x_b = S_{ix}\frac{l_{bh}}{l_i} \tag{10} $$

所以摆动杆的势能为

$$ {}^{1}W_i = -m_bg\,{}^{A}x_b = -m_bgS_{ix}\frac{l_{bh}}{l_i} \tag{11} $$

式中　l_{bh}——摆动杆质心到虎克铰中心的距离，为常数

S_{ix}——动平台铰点中心在定坐标系下 x 方向的坐标

对于伸缩杆同样需要求出质心在定坐标系下 x 方向的坐标，其表达式为

$$ {}^{A}x_s = S_{ix}\left(1-\frac{l_{sq}}{l_i}\right) \tag{12} $$

所以伸缩杆的势能为

$$ {}^{2}W_i = -m_sg\,{}^{A}x_s = -m_sgS_{ix}\left(1-\frac{l_{sq}}{l_i}\right) \tag{13} $$

式中　l_{sq}——伸缩杆质心到动平台上球铰中心的距离，为常数

系统总势能为

$$ W = \sum_{i=1}^{5}({}^{1}W_i + {}^{2}W_i) \tag{14} $$

因此系统动势函数为

$$L=T-W=\sum_{i=1}^{5}\left({}^{1}E_i+{}^{2}E_i-{}^{1}W_i-{}^{2}W_i\right)+E_1 \quad (15)$$

再将系统的动势代入拉格朗日方程,分别对广义坐标求导,可求出拉氏方程左侧表达式

$$\boldsymbol{Q}_l=[Q_{lx}\quad Q_{ly}\quad Q_{lz}\quad Q_{l\alpha}\quad Q_{l\beta}]^{\mathrm{T}} \quad (16)$$

其中 $Q_{lx}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\varphi L}{\varphi {}^{A}\dot{X}_{bo}}\right)-\frac{\varphi L}{\varphi {}^{A}X_{bo}}$

$$Q_{ly}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\varphi L}{\varphi {}^{A}\dot{Y}_{bo}}\right)-\frac{\varphi L}{\varphi {}^{A}Y_{bo}}$$

$$Q_{lz}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\varphi L}{\varphi {}^{A}\dot{Z}_{bo}}\right)-\frac{\varphi L}{\varphi {}^{A}Z_{bo}}$$

$$Q_{l\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\varphi L}{\varphi\dot{\alpha}}\right)-\frac{\varphi L}{\varphi\alpha}\qquad Q_{l\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\varphi L}{\varphi\dot{\beta}}\right)-\frac{\varphi L}{\varphi\beta}$$

3 作用于4-UPS-RPU并联机构非保守力的等效广义力

并联机构系统为一个非保守系统,作用在它上面的主动力可以分为保守力和非保守力。作用于并联机构上的非保守力大致可以分为驱动力、生产阻力和耗散力。其中,最主要的耗散力应该是干摩擦阻力,它产生于运动副的铰接处,由于摩擦力的求解很困难,而且力的大小变化不定,同时由于机构运动副间的相对运动速度比较小,所以其值不会很大;特别考虑到机构各运动副的润滑措施,将会大大地减小摩擦力。所以,整个系统的摩擦力相对于驱动力和生产阻力而言将会很小。因此,为了简化动力学的计算,可以直接忽略掉耗散力,只讨论非保守力中的驱动力和生产阻力。

考虑到并联机构5个驱动关节都为移动副,所以驱动力为

$$\boldsymbol{f}=[f_1\quad f_2\quad f_3\quad f_4\quad f_5]^{\mathrm{T}} \quad (17)$$

机构所受外力负载全部等效作用于动坐标系的原点,并将其转换到参考系中表示为

$$[F\quad M]^{\mathrm{T}}=[{}^{A}F_{xb}\quad {}^{A}F_{yb}\quad {}^{A}F_{zb}\quad {}^{A}M_{xb}\quad {}^{A}M_{yb}\quad {}^{A}M_{zb}]^{\mathrm{T}} \quad (18)$$

采用几何法求解广义力根据完整力学系统广义虚位移相互间的独立性,给质点系一组特殊的虚位移,仅使需要求的广义力 Q_a 所对应的广义虚位移 $\sigma q_a\neq0$,而令其余所有广义虚位移 $\sigma q_1=\sigma q_2=\cdots=\sigma q_n=0$,这样就可以求出所有主动力相应于广义虚位移 σq_a 所作的虚功之和 $\sigma W'$,可得

$$\sigma W'=Q_a\sigma q_a\Rightarrow Q_a=\sigma W'/(\sigma q_a) \quad (19)$$

将参数 ${}^{A}X_{ui}=0$ 代入杆长公式[1]可得

$$l_i=\sqrt{l_{ix}^2+l_{iy}^2+l_{iz}^2}=$$
$$\sqrt{(\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^{B}X_{si}+\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta^{B}Y_{si}+\mathrm{s}\alpha^{A}Z_{si}+{}^{A}X_{bo})^2+(\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta^{B}X_{si}+\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^{B}Y_{si}-\mathrm{c}\alpha^{B}Z_{si}+{}^{A}Y_{bo}-{}^{A}Y_{ui})^2+(-\mathrm{s}\beta^{B}X_{si}+\mathrm{c}\beta^{B}Y_{si}+{}^{A}Z_{bo}-{}^{A}Z_{ui})^2} \quad (20)$$

3.1 驱动力对应的广义力

3.1.1 广义力 Q_{x1}

在位姿(${}^{A}X_{bo}$,${}^{A}Y_{bo}$,${}^{A}Z_{bo}$,α,β)下,给出一组虚位移(${}^{A}X_{bo}+\sigma x$,${}^{A}Y_{bo}+0$,${}^{A}Z_{bo}+0$,$\alpha+0$,$\beta+0$),将其代入式(20)中,得到

$$i_i'^2=(l_{ix}+\sigma x)^2+l_{iy}^2+l_{iz}^2 \quad (21)$$

因此可以得到

$$i_i'^2-l_i^2=(l_i'-l_i)(l_i'+l_i)=(l_{ix}+\sigma x)^2-l_{ix}^2 \quad (22)$$

由于虚位移无限小,所以可认为 $l_i'\approx l_i$,$\sigma x^2=0$,设驱动力方向虚位移 $\sigma^{x}l_i=l_i'-l_i$ 则 $\sigma^{x}l_i2l_i=2l_{ix}\sigma x$ 化简可得

$$\sigma^{x}l_i=(l_{ix}/l_i)\sigma x=n_{ix}\sigma x \quad (23)$$

所以虚功和为

$$\sigma W_{x1}'=f_1n_{1x}\sigma x+f_2n_{2x}\sigma x+f_3n_{3x}\sigma x+f_4n_{4x}\sigma x+f_5n_{5x}\sigma x \quad (24)$$

因此广义力可表示为

$$Q_{x1}=f_1n_{1x}+f_2n_{2x}+f_3n_{3x}+f_4n_{4x}+f_5n_{5x} \quad (25)$$

式中 $n_{ix}(i=1,2,3,4,5)$——各驱动分支单位向量 $\boldsymbol{n}_i$ 的 x 坐标分量

3.1.2 广义力 Q_{y1}

为求广义坐标对应的广义力 Q_{y1},在位姿(${}^{A}X_{bo}$,${}^{A}Y_{bo}$,${}^{A}Z_{bo}$,α,β)下,给出虚位移(${}^{A}X_{bo}+0$,${}^{A}Y_{bo}+\sigma y$,${}^{A}Z_{bo}+0$,$\alpha+0$,$\beta+0$),求法与广义力 Q_{x1} 的求法相同,可得

$$Q_{y1}=f_1n_{1y}+f_2n_{2y}+f_3n_{3y}+f_4n_{4y}+f_5n_{5y} \quad (26)$$

式中 $n_{iy}(i=1,2,3,4,5)$——各驱动分支单位向量 $\boldsymbol{n}_i$ 的 y 坐标分量

3.1.3 广义力 Q_{z1}

为求广义坐标对应的广义力 Q_{z1},在位姿(${}^{A}X_{bo}$,${}^{A}Y_{bo}$,${}^{A}Z_{bo}$,α,β)下,给出虚位移(${}^{A}X_{bo}+0$,${}^{A}Y_{bo}+0$,${}^{A}Z_{bo}+\sigma z$,$\alpha+0$,$\beta+0$),求法与广义力 Q_{x1} 的求法相同,可得

$$Q_{z1}=f_1n_{1z}+f_2n_{2z}+f_3n_{3z}+f_4n_{4z}+f_5n_{5z} \quad (27)$$

式中 $n_{iz}(i=1,2,3,4,5)$——各驱动分支单位向量 $\boldsymbol{n}_i$ 的 z 坐标分量

3.1.4 广义力 $Q_{\alpha1}$

为求广义坐标对应的广义力 $Q_{\alpha1}$,在位姿(${}^{A}X_{bo}$,${}^{A}Y_{bo}$,${}^{A}Z_{bo}$,α,β)下,给出虚位移(${}^{A}X_{bo}+0$,

${}^{A}Y_{bo}+0, {}^{A}Z_{bo}+0, \alpha+\sigma\alpha, \beta+0)$，并将其代入式(20)，可得

$$\begin{cases} l_{ix\alpha}^2=[\mathrm{c}(\alpha+\sigma\alpha)\mathrm{c}\beta^B X_{si}+\mathrm{c}(\alpha+\sigma\alpha)\mathrm{s}\beta^B Y_{si}+ \\ \quad \mathrm{s}(\alpha+\sigma\alpha)^B Z_{si}+{}^A X_{bo}]^2 \\ l_{iy\alpha}^2=[\mathrm{s}(\alpha+\sigma\alpha)\mathrm{c}\beta^B X_{si}+\mathrm{s}(\alpha+\sigma\alpha)\mathrm{c}\beta^b Y_{si}- \\ \quad \mathrm{c}(\alpha+\sigma\alpha)^B Z_{si}+{}^A Y_{bo}-{}^A Y_{ui}]^2 \\ l_{iz\alpha}^2=l_{iz}^2=(-\mathrm{s}\beta^B X_{si}+\mathrm{c}\beta^B Y_{si}+{}^A Z_{bo}-{}^A Z_{ui})^2 \end{cases} \tag{28}$$

由于虚位移为无限小位移，故认为 $\cos(\sigma\alpha)=1$，$\sin(\sigma\alpha)=\sigma\alpha$，忽略 $\sigma\alpha$ 的高阶项，则杆长平方表达式可化简为

$$l_{i\alpha}^2=[l_{ix}+(\mathrm{c}\alpha^A Z_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})\sigma\alpha]^2+ [l_{iy}+(\mathrm{s}\alpha^B Z_{si}+\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}+\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})\sigma\alpha]^2+l_{iz}^2 \tag{29}$$

将式(29)的杆长平方减去发生虚位移前的杆长平方，并且认为 $l_{i\alpha}\approx l_i$，忽略 $\sigma\alpha$ 的高阶项，可得

$$l_{i\alpha}^2-l_i^2=(l_{i\alpha}+l_i)(l_{i\alpha}-l_i)= 2l_{ix}(\mathrm{c}\alpha^A Z_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})\sigma\alpha+ 2l_{iy}(\mathrm{s}\alpha^B Z_{si}+\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}+\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})\sigma\alpha \tag{30}$$

化简得

$$\sigma^{\alpha} l_i=[(\mathrm{c}\alpha^A Z_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{ix}+ (\mathrm{s}\alpha^B Z_{si}+\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}+\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{iy}]\sigma\alpha \tag{31}$$

其中　$n_{ix}=\dfrac{l_{ix}}{l_i}$　　$n_{iy}=\dfrac{l_{iy}}{l_i}$

由式(19)可得广义力

$$Q_{\alpha 1}=\frac{\sigma W'_{\alpha 1}}{\sigma\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i\sigma^{\alpha} l_i}{\sigma\alpha}= \sum_{i=1}^{5} f_i[(\mathrm{c}\alpha^A Z_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{ix}+ (\mathrm{s}\alpha^B Z_{si}+\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}+\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{iy}] \tag{32}$$

3.1.5　广义力 $Q_{\beta 1}$

为求广义坐标对应的广义力 $Q_{\beta 1}$，在位姿 $({}^A X_{bo}, {}^A Y_{bo}, {}^A Z_{bo}, \alpha, \beta)$ 下，给出虚位移 $({}^A X_{bo}+0, {}^A Y_{bo}+0, {}^A Z_{bo}+0, \alpha+0, \beta+\sigma\beta)$，并将其代入式(20)，可得

$$\begin{cases} l_{ix\beta}^2=[\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}(\beta+\sigma\beta)^B X_{si}+\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}(\beta+\sigma\beta)^B Y_{si}+ \\ \quad \mathrm{s}\alpha^B Z_{si}+{}^A X_{bo}]^2 \\ l_{iy\beta}^2=[\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}(\beta+\sigma\beta)^B X_{si}+\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}(\beta+\sigma\beta)^B Y_{si}- \\ \quad \mathrm{c}\alpha^B Z_{si}+{}^A Y_{bo}-{}^A Y_{ui}]^2 \\ l_{iz\beta}^2=[-\mathrm{s}(\beta+\sigma\beta)^B X_{si}+\mathrm{c}(\beta+\sigma\beta)^B Y_{si}+ \\ \quad {}^A Z_{bo}-{}^A Z_{ui}]^2 \end{cases} \tag{33}$$

杆长平方表达式可化简为

$$l_{i\alpha}^2=[l_{ix}+(\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta Y_{si}-\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})\sigma\beta]^2+ [l_{iy}+(-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})\sigma\beta]^2+ [l_{iz}+(-\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\beta^B)\sigma\beta]^2 \tag{34}$$

将式(34)的杆长平方减去发生虚位移前的杆长平方，并且认为 $l_{i\beta}\approx l_i$，忽略 $\sigma\beta$ 的高阶项，可得

$$l_{i\beta}^2-l_i^2=(l_{i\beta}+l_i)(l_{i\beta}-l_i)= 2l_{ix}(\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B Y_{si}-\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})\sigma\beta+2l_{iy}(-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si}- \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})\sigma\beta+2l_{iz}(-\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\beta^B Y_{si})\sigma\beta \tag{35}$$

化简得

$$\sigma^{\beta} l_i=[(\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B Y_{si}-\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})n_{ix}+ (-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})n_{iy}+ (-\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{iz}]\sigma\beta \tag{36}$$

其中　$n_{iz}=\dfrac{l_{iz}}{l_i}$

由式(19)可得广义力

$$Q_{\beta 1}=\frac{\sigma W'_{\beta 1}}{\sigma\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i\sigma^{\beta} l_i}{\sigma\beta}= \sum_{i=1}^{5} f_i[(\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B Y_{si}-\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})n_{ix}+(-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si}- \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})n_{iy}+(-\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{iz}] \tag{37}$$

分别求出了驱动力所对应的每个广义坐标的广义力，所以可得 UPS 分支驱动力为

$$\boldsymbol{Q}_1=[Q_{1x}\ Q_{1y}\ Q_{1z}\ Q_{1\alpha}\ Q_{1\beta}]^{\mathrm{T}}= \Big[\sum_{i=1}^{5} f_i n_{ix}\sum_{i=1}^{5} f_i n_{iy}\sum_{i=1}^{5} f_i n_{iz}\sum_{i=1}^{5} f_i[(\mathrm{c}\alpha^A Z_{si}- \mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{ix}+(\mathrm{s}\alpha^B Z_{si}+\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}+ \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{iy}\Big]\sum_{i=1}^{5} f_i[(\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B Y_{si}- \mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})n_{ix}+(-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})n_{iy}+ (-\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{iz}]^{\mathrm{T}} \tag{38}$$

用矩阵可表示为

$$\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{G}_F\boldsymbol{f}=[\boldsymbol{G}_1\quad \boldsymbol{G}_2\quad \boldsymbol{G}_3\quad \boldsymbol{G}_4\quad \boldsymbol{G}_5]\boldsymbol{f}=\boldsymbol{J}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} \tag{39}$$

其中

$$\boldsymbol{G}_i=[n_{ix}\quad n_{iy}\quad n_{iz}(\mathrm{c}\alpha^A Z_{si}-\mathrm{s}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}- \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{ix}+(\mathrm{s}\alpha^B Z_{si}+\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B X_{si}+ \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{iy}(\mathrm{c}\alpha\mathrm{c}\beta^B Y_{si}-\mathrm{c}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})n_{ix}+(-\mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B Y_{si}- \mathrm{s}\alpha\mathrm{s}\beta^B X_{si})n_{iy}+(-\mathrm{c}\beta^B X_{si}-\mathrm{s}\beta^B Y_{si})n_{iz}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{f}=[f_1\quad f_2\quad f_3\quad f_4\quad f_5]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{J}_A=\boldsymbol{J}_{1A}\boldsymbol{J}_{2A}\in\mathbf{R}^{5\times 5}$$

式中　$\boldsymbol{J}_A$——欧拉角转速形式的速度传递矩阵[1]

3.2　外力负载对应的广义力

3.2.1　广义力 Q_{x2}

为求广义坐标对应的广义力 Q_{x2}，在位姿 $({}^A X_{bo}, {}^A Y_{bo}, {}^A Z_{bo}, \alpha, \beta)$ 下，给出虚位移 $({}^A X_{bo}+\sigma x, {}^A Y_{bo}+0, {}^A Z_{bo}+0, \alpha+0, \beta+0)$，由于外力只有 ${}^A F_x$ 对

应 σx 做功,可得

$$\sigma W'_{x2}={}^{A}F\sigma x\Rightarrow Q_{x2}={}^{A}F_{xb} \tag{40}$$

3.2.2 广义力 Q_{y2}

用求解广义力 Q_{x2} 同样的方法,可得

$$Q_{y2}={}^{A}F_{yb} \tag{41}$$

3.2.3 广义力 Q_{z2}

用求解广义力 Q_{x2} 同样的方法,可得

$$Q_{z2}={}^{A}F_{zb} \tag{42}$$

3.2.4 广义力 $Q_{\alpha2}$

为求广义坐标对应的广义力 $Q_{\alpha2}$,在位姿(${}^{A}X_{bo},{}^{A}Y_{bo},{}^{A}Z_{bo},\alpha,\beta$)下,给出虚位移(${}^{A}X_{bo}+0,{}^{A}Y_{bo}+0,{}^{A}Z_{bo}+0,\alpha+\sigma\alpha,\beta+0$)。由于 α 对应的是 Z_A 轴的姿态角,而 Z_A 轴方向始终不变。所以外力负载中只有 ${}^{A}M_z$ 对应的虚位移不为零,可得

$$\sigma W'_{\alpha2}={}^{A}M_{zb}\sigma\alpha\Rightarrow Q_{\alpha2}={}^{A}M_{zb} \tag{43}$$

3.2.5 广义力 $Q_{\beta2}$

为求广义坐标对应的广义力 $Q_{\beta2}$,在位姿(${}^{A}X_{bo},{}^{A}Y_{bo},{}^{A}Z_{bo},\alpha,\beta$)下,给出虚位移(${}^{A}X_{bo}+0,{}^{A}Y_{bo}+0,{}^{A}Z_{bo}+0,\alpha+0,\beta+\sigma\beta$)。由于 β 对应的是 Y'_A 轴的姿态角,此角与姿态角 α 有关。故 Y'_A 轴在定坐标系中的方向矢量为

$$^{A}\boldsymbol{n}_{Y'}=\boldsymbol{R}(Z,\alpha)\boldsymbol{n}_Y=\begin{bmatrix}c\alpha & -s\alpha & 0\\ s\alpha & c\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s\alpha\\ c\alpha\\ 0\end{bmatrix} \tag{44}$$

因此可得
$$\sigma^{\beta}\varphi_{Mx}=-s\alpha\sigma\beta \tag{45}$$

$$\sigma^{\beta}\varphi_{My}=c\alpha\sigma\beta \tag{46}$$

所以其虚功之和为

$$\sigma W'_{\beta2}={}^{A}M_{xb}\sigma^{\beta}\varphi_{Mx}+{}^{A}M_{yb}\sigma^{\beta}\varphi_{My} \tag{47}$$

可得
$$Q_{\beta2}=-s\alpha{}^{A}M_{xb}+c\alpha{}^{A}M_{yb} \tag{48}$$

综上可得外力负载广义力为

$$\boldsymbol{Q}_2=[{}^{A}F_{xb}\quad {}^{A}F_{yb}\quad {}^{A}\boldsymbol{F}_{zb}\quad {}^{A}M_{zb}\quad -s\alpha{}^{A}M_{xb}+c\alpha{}^{A}M_{yb}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}_{2A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{F}\quad \boldsymbol{M}]^{\mathrm{T}} \tag{49}$$

由式(39)和式(49)可得冗余驱动并联机构非保守广义力为

$$\boldsymbol{Q}_K=\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{J}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{J}_{2A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{F}\quad \boldsymbol{M}]^{\mathrm{T}} \tag{50}$$

4 4-UPS-RPU 并联机构的动力学方程

应用拉格朗日法建立 4-UPS-RPU 4 自由度冗余驱动并联机构的动力学模型。由于并联机构是一个非保守系统,依据主动力为有保守广义力及非保守广义力时的拉格朗日方程,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}_a}\right)-\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}_a}=\boldsymbol{Q}_K\quad(a=1,2,\cdots,N) \tag{51}$$

其中
$$L=T-W$$

$$\boldsymbol{q}_a=[{}^{A}X_{bo}\quad {}^{A}Y_{bo}\quad {}^{A}Z_{bo}\quad \alpha\quad \beta]$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_a=[{}^{A}\dot{X}_{bo}\quad {}^{A}\dot{Y}_{bo}\quad {}^{A}\dot{Z}_{bo}\quad \dot{\alpha}\quad \dot{\beta}]$$

式中 L——拉格朗日函数 T——系统动能
W——系统势能 $\boldsymbol{q}_a$——广义坐标
$\dot{\boldsymbol{q}}_a$——广义坐标的一阶导数

将式(16)、(50)代入式(51)可得

$$\boldsymbol{Q}_l=\boldsymbol{Q}_K \tag{52}$$

方程(52)左边项与广义坐标(${}^{A}X_{bo},{}^{A}Y_{bo},{}^{A}Z_{bo},\alpha,\beta$)及其对应的速度有关,方程组右边项与广义坐标、驱动力以及机构所受外载有关。当给定并联机构动平台的位姿、运动参数、运动加速度以及机构所受的外力时,通过式(49)可以得到各驱动分支的驱动力。对于非冗余驱动情况下,可得 5 个驱动分支(4 个 UPS 和 1 个 RPU)驱动力

$$\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{J}_A^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{Q}_l-\boldsymbol{Q}_2)$$

在本机构中,动平台上球铰点 S_1 沿 Z 坐标方向无移动位移,对 ${}^{A}Z_{bo}=228.41\cos\beta\cos\gamma-67.11\sin\beta$ 两边求导可得

$$^{A}V_{Zbo}=-228.41\dot{\beta}\cos\gamma\sin\beta-228.41\dot{\gamma}\cos\beta\sin\gamma-67.11\dot{\beta}\cos\beta=-67.11\dot{\beta}\cos\beta \tag{53}$$

由式(53)可知 ${}^{A}V_{Zbo}=-67.11\dot{\beta}\cos\beta$,所以 $\boldsymbol{J}_{2A}$ 可以化成一个 6×4 的矩阵

$$\boldsymbol{J}_{2A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-67.11\cos\beta\\0&0&0&-\sin\alpha\\0&0&0&\cos\alpha\\0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{54}$$

所以 $\boldsymbol{J}_A=\boldsymbol{J}_{1A}\boldsymbol{J}_{2A}$ 可转换成 5×4 的矩阵,$\boldsymbol{J}_A^{\mathrm{T}}$ 为 4×5 的矩阵,此时矩阵 $(\boldsymbol{J}_A^{\mathrm{T}})^{-1}$ 不唯一,因而为冗余驱动并联机构提供了驱动力规划的可行性。

5 机构动力学分析算例

5.1 机构结构参数

4-UPS-RPU 冗余驱动并联机构定平台上转动副中心到定平台中心点的距离为 710 mm,转动副与相邻虎克铰的间隔角度是 45°,定平台上 4 个虎克铰的分布半径为 650 mm,定平台上虎克铰的间隔角度为 90°,动平台 4 个球铰分布半径为 196.98 mm,动平台 4 个球铰之间夹角 $\theta=72°$,虎克铰位于 XOY 平面内半径为 $r_3=228.41$ mm 的圆上且与 YOZ 平面的距离为 $d=67.11$ mm。并联机构动平台的质量 $m_m=37$ kg,摆动杆长度 $l_b=780$ mm,摆动杆的质量为 $m_b=26$ kg,伸缩杆长度 $l_s=885$ mm,伸缩杆的质量为 $m_s=13.3$ kg。动平台的转动惯量 $\boldsymbol{I}$($\mathrm{kg\cdot m^2}$)为

$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}0.96 & 0 & 0\\ 0 & 0.67 & 0\\ 0 & 0 & 0.65\end{bmatrix}$,摆动杆转动惯量 $\boldsymbol{I}_b$(kg·m^2)为 $\boldsymbol{I}_b=\begin{bmatrix}1.26 & 0 & 0\\ 0 & 1.26 & 0\\ 0 & 0 & 0.003\end{bmatrix}$,伸缩杆的转动惯量 $\boldsymbol{I}_s$(kg·m^2)为 $\boldsymbol{I}_s=\begin{bmatrix}0.847 & 0 & 0\\ 0 & 0.847 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$。

5.2　机构动力学分析

4－UPS－RPU 冗余驱动并联机构动平台运动过程中相对于定平台的位姿为 $\alpha=0,\beta=0,\gamma=\dfrac{\pi}{2}$(顺时针旋转为正),定义并联机构动平台的运动轨迹为

$$\begin{cases}x=1152+30\sin(2t)\\ y=30+30\cos(2t)\\ z=-67.11\sin\beta\end{cases}$$

4－UPS－RPU 冗余驱动并联机构动平台空载,即[$\boldsymbol{F}$　$\boldsymbol{M}$]＝[0　0　0　0　0　0]用 Matlab 数值计算 5 个驱动杆的驱动力曲线和 ADAMS 虚拟样机仿真 5 个驱动杆的驱动力曲线,见图 3。对动平台加载,即[$\boldsymbol{F}$　$\boldsymbol{M}$]＝[－235　－146　－32.8　2.5　1.42　65]时,用 Matlab 数值计算 5 个驱动杆的驱动力曲线和 ADAMS 虚拟样机仿真 5 个驱动杆的驱动力曲线,见图 4。

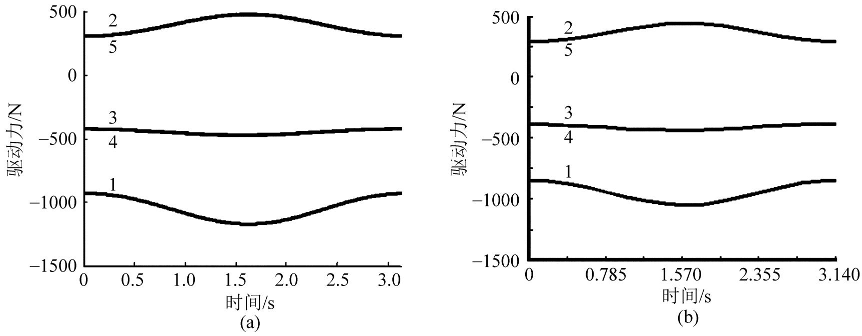

图 3　并联机构动平台空载时 5 个驱动杆的驱动力曲线

Fig. 3　Five driving forces curves of parallel mechanism when moving platform with no load

(a) Matlab 计算结果　(b) ADAMS 虚拟仿真结果

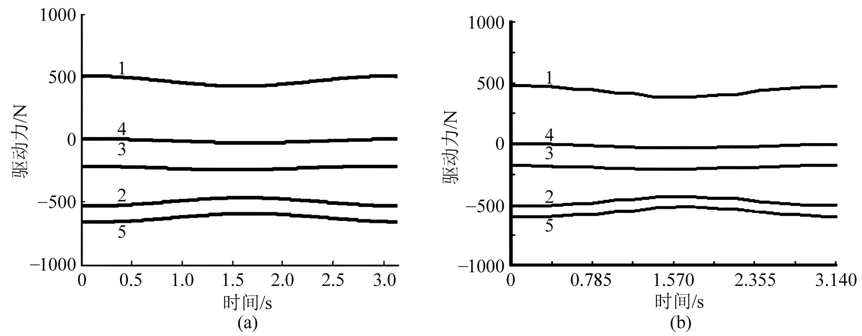

图 4　并联机构动平台受载荷时 5 个驱动杆的驱动力曲线

Fig. 4　Five driving forces curves of parallel mechanism when moving platform with load

(a) Matlab 计算结果　(b) ADAMS 虚拟仿真结果

由图 3 和图 4 可以得出,用 Matlab 数值计算的结果与 ADAMS 的虚拟仿真结果基本上吻合,说明了数值运算与虚拟仿真运算的正确性。

6　结束语

推导了 4－UPS－RPU 冗余驱动 4 自由度并联机构系统的动能表达式、势能表达式和作用于并联机构非保守力的等效广义力,应用拉格朗日法建立了 4－UPS－RPU 冗余驱动并联机构的刚体动力学模型,为并联机构驱动力的求解以及整个机构的动力学分析奠定了基础。最后结合算例验证了理论模型的正确性,为 4－UPS－RPU 冗余驱动并联机构的设计、刚度校核和控制奠定了基础。

参　考　文　献

1　陈修龙,陈林林,梁小夏. 4 自由度冗余驱动并联机构运动学和工作空间分析[J]. 农业机械学报,2014,45(8):307－313.
Chen Xiulong, Chen Linlin, Liang Xiaoxia. Kinematics and workspace analysis of a novel 4-DOF redundant actuation parallel

mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014,45(8): 307 - 313. (in Chinese)

2 He Jingfeng, Jiang Hongzhou, Tong Zhizhong, et al. Study on dynamic isotropy of a class of symmetric spatial parallel mechanisms with actuation redundancy[J]. Journal of Vibration and Control,2012,18(8): 1156 - 1164.

3 Qing Jianxi, Li Jianfeng, Fang Bin. Drive optimization of tricept parallel mechanism with redundant actuation[J]. Journal of Mechanical Engineering,2010,46(5):8 - 14.

4 杨建新,余跃庆. 平面三自由度冗余并联机构的驱动奇异性分析[J]. 中国机械工程, 2006,17(6):629 - 632.
Yang Jianxin, Yu Yueqing. Actuator singularity analysis of planar 3-DOF redundant parallel mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2006,17(6): 629 - 632. (in Chinese)

5 陈修龙,贾帅帅,邓昱. 高速空间并联式坐标测量机动力学优化设计[J]. 农业机械学报, 2012, 43(3):213 - 218.
Chen Xiulong, Jia Shuaishuai, Deng Yu. Dynamics optimization design of high-speed spatial parallel coordinate measuring machine [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012,43(3): 213 - 218. (in Chinese)

6 陈根良,王皓,来新民,等. 基于广义坐标形式牛顿-欧拉方法的空间并联机构动力学正问题分析[J]. 机械工程学报,2009,45(7):41 - 48.
Chen Genliang, Wang Hao, Lai Xinmin, et al. Forward dynamics analysis of spatial parallel mechanisms based on the Newton - Euler method with generalized coordinates[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009,45(7): 41 - 48. (in Chinese)

7 陈修龙, 冯伟明,赵永生. 五自由度并联机器人机构动力学模型[J]. 农业机械学报,2013,44(1):236 - 243.
Chen Xiulong, Feng Weiming, Zhao Yongsheng. Dynamics model of 5-DOF parallel robot mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013,44(1): 236 - 243. (in Chinese)

8 耿明超,赵铁石,王唱,等. 4 - UPS/UPR 并联机构动力学分析[J]. 农业机械学报,2014,45(8):299 - 306.
Geng Mingchao, Zhao Tieshi, Wang Chang, et al. 4 - UPS/UPR parallel mechanism dynamic analysis[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014,45(8): 299 - 306. (in Chinese)

9 Liu Shanzeng, Zhu Zhencai, Sun Zhaopeng, et al. Kinematics and dynamics analysis of a three-degree-of freedom parallel manipulator[J]. Journal of Central South University,2014,21(7):2660 - 2666.

10 Zhao Yongjie, Qiu Ke, Wang Shuangxi, et al. Inverse kinematics and rigid-body dynamics for a three rotational degrees of freedom parallel manipulator[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing,2015,31(1):40 - 50.

11 Lu Y, Li X P. Dynamics analysis for a novel 6-DOF parallel manipulator with three planar limbs[J]. Advanced Robotics,2014,28(16):1121 - 1132.

12 郭祖华,陈五一,陈鼎昌. 6 - UPS 型并联机构的刚体动力学模型[J]. 机械工程学报,2002,38(11):53 - 57.
Guo Zuhua, Chen Wuyi, Chen Dingchang. Dynamics model on the 6 - UPS parallel mechanism [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002,38(11): 53 - 57. (in Chinese)

13 赵永生,郑魁敬,施毅. 5 - UPS/PRPU 五自由度并联机床动力学建模[J]. 机械设计与研究,2004,20(3):45 - 47.
Zhao Yongsheng, Zheng Kuijing, Shi Yi. Dynamics modeling of 5 - UPS/PRPU 5-DOF parallel machine tool[J]. Machine Design and Research, 2004,20(3): 45 - 47. (in Chinese)

14 李永刚,宋轶民,冯志友,等. 基于牛顿-欧拉法的 3 - RPS 并联机构逆动力学分析[J]. 航空学报,2007,28(5):1210 - 1215.
Li Yonggang, Song Yimin, Feng Zhiyou, et al. Inverse dynamics of 3 - RPS parallel mechanism by Newton - Euler formulation [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007,28(5): 1210 - 1215. (in Chinese)

15 Zhao Xingwei, Zi Bin. Design and analysis of a pneumatic muscle driven parallel mechanism for imitating human pelvis[J]. Proc. IMech EPart C: Journal of Mechanical Engineering Science,2014,228(4):723 - 741.

16 窦玉超,姚建涛,高思慧,等. 冗余驱动并联机器人动力学建模与驱动力协调分配[J]. 农业机械学报,2014,45(1):293 - 299.
Dou Yuchao, Yao Jiantao, Gao Sihui, et al. Dynamic modeling and driving force coordinate distribution of the parallel robot with redundant actuation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014,45(1): 293 - 299. (in Chinese)