doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2014.10.048

给定两连杆运动面的 Watt $-\mathbf{I}$ 六杆机构空间解域综合方法^{*}

杨 通 韩建友 崔光珍 李人武 (北京科技大学机械工程学院,北京100083)

摘要:针对运动生成 Watt-I型六杆机构综合问题,给出了一种基于空间解域的综合方法。该型机构中作为末端 执行构件的连杆和一个四杆机构的连杆运动面相连,因此需要给出这个连杆运动面的位置。该方法首先综合四杆 机构,然后将二杆组添加到四杆机构上。对于四位置问题,四杆机构综合可得到无穷多机构解,而对于任意四杆机 构又有无穷多种添加二杆组的方法。本文以四杆机构的平面解域为基础,将综合所得无穷多六杆机构在一个有限 的空间区域内表示出来,还给出一种能有效判断 Watt-I型六杆机构回路和分支缺陷的方法。通过对综合所得无 穷多机构解进行判断,建立六杆机构去除回路分支缺陷的空间可行域。空间解域的应用使设计者能够从整体上把 握六杆机构的可行解的全部解空间,从而使获得附加更多条件的最优机构成为可能。

关键词:六杆机构 运动生成 空间解域 缺陷判别

中图分类号: TH122 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2014)10-0307-06

引言

对于运动及轨迹生成六杆机构综合问题的研究 方法有很多^[1-5]。其中 McCarthy 等^[1-3]对五位置 运动生成问题进行了研究,该研究给定一个包含末 端执行构件的 3R 杆的 5 个位置,然后通过在其上 添加 2 个 RR 杆得到六杆机构。五位置问题所得机 构解的个数是有限的,可选余地少,如果机构不满足 要求也没有其他选择。而四位置问题可综合得到无 穷多机构,设计者有很大的选择余地,在附加了各项 性能条件之后,总能优选出满足要求的机构,因此更 具实际意义。

对于一个 Watt - I 型机构,注意到该机构作为 末端执行构件的连杆与一个四杆机构的连杆运动面 相连,因此该六杆机构可以看作四杆机构和二杆组 的组合。给定的设计条件是末端执行构件的4个位 置以及相对应四杆机构连杆运动面的4个位置。这 样可以首先综合四杆机构,然后在其上添加一个二 杆组。

该综合思路在文献[6-7]中曾作简单阐述,但 是没有对机构的空间解域形成方法及回路和分支缺 陷的判断问题进行深入系统研究,要得到无缺陷的 六杆机构只能通过多次尝试。由于无法从整体上把 握无缺陷六杆机构的铰链点分布情况,往往会因为 第一步四杆机构选取的不合理导致最后得不到满足 要求的六杆机构。本文给出一种缺陷判别方法,建 立无缺陷六杆机构的空间解域,或称可行域。通过 全解域遍历计算,以期在可行域上找到最优机构。

1 运动生成的基本理论

要综合如图 1a 所示的 Watt-I型六杆机构,首 先要综合四杆机构 A₀ABB₀。设计要求中已经给出 P'点的 4 个坐标以及四杆机构连杆运动面 P'AB 的 4 组转角,因此这是一个运动生成四位置问题,需要



图 1 Watt-I型六杆机构及分解后的四杆机构和二杆组 Fig.1 A six-bar linkage and it's divided a four-bar linkage and a dyad

收稿日期: 2013-10-07 修回日期: 2013-12-19

^{*}国家自然科学基金资助项目(51275034)

作者简介:杨通,博士后,主要从事机构综合及稳健设计、机构 CAD 研究, E-mail: yangtong_ustb@ foxmail. com

通讯作者:韩建友,教授,博士生导师,主要从事机构分析与综合理论、机构动力平衡及机构 CAD 研究, E-mail: jyhan@ ustb. edu. cn

2014年

确定的是铰链点 A_0 、A、B和 B_0 的坐标。设在第1位 置时圆点(A点)矢量为 $A_{cl} = [x_{cl} y_{cl}]^T$,可得它的 分布曲线为布尔梅斯特圆点曲线^[8-9]

 $H_1(x_{c1}^3 + x_{c1}y_{c1}^2) + H_2(y_{c1}^3 + x_{c1}^2y_{c1}) + H_3x_{c1}^2 +$

 $H_4 y_{c1}^2 + H_5 x_{c1} y_{c1} + H_6 x_{c1} + H_7 y_{c1} + H_8 = 0$ (1) 文献[8-9]中已经详细阐述了综合无缺陷四杆机 构的方法,此处不再赘述。

在得到了四杆机构 A_0ABB_0 之后,在其上添加 一个二杆组 C'CP',其中铰链点 P'的坐标已经给出, 只需确定 C'和 C 点的坐标。其中 C'点位于连架杆 AA_0 所在的运动平面 π' 内, C 点位于六杆机构末端 执行构件 PP'C 所在的运动平面 π 内,如图 2 所示。 π' 的运动为绕固定铰链点 A_0 的旋转运动, π 的运动 为刚体平面运动。设待求第 1 位置时 C 点的矢量 为 $C_1 = [C_{x1} \quad C_{y1}]^T$,得到它的分布曲线方程式 为^[6-7]

$$H_{1}'(C_{x1}^{3} + C_{x1}C_{y1}^{2}) + H_{2}'(C_{y1}^{3} + C_{x1}^{2}C_{y1}) + H_{3}'C_{x1}^{2} + H_{4}'C_{y1}^{2} + H_{5}'C_{x1}C_{y1} + H_{6}'C_{x1} + H_{7}'C_{y1} + H_{6}'C_{y1} + H_{6}'C_{y1} + H_{7}'C_{y1} + H_{6}'C_{y1} + H_{7}'C_{y1} +$$

式(2)所示的曲线和布氏曲线类似,也是一条 三阶虚圆点曲线,其上任意一点都可以作为铰链点 C的坐标。由于 C 和 C'点总是一一对应的,因此可 以通过相关公式求出 C'点的分布曲线^[6-7],一般情 况下只需给出一条曲线。为了便于叙述,本文将铰 链点 C 的分布曲线表示为 C'C - C,将 C'的分布曲 线表示为 C'C - C'。确定了 C 和 C'点,也就完成了 六杆机构的综合。



图 2 六杆机构运动到 2 个不同位置的示意图 Fig. 2 Graph of a six-bar linkage in two configurations

2 解域的形成

四杆机构综合可得到无穷多机构解(∞),而任 取的一个四杆机构又对应着一条 C'C - C,其上有无 穷多的 C 点(∞),由此可知最后综合所得六杆机构 的个数更是无穷多(∞²)。但这些机构不可能都适 用,有些机构不拆开重装就不能通过全部给定位置 (存在回路缺陷),有些机构在运动过程中会通过具 有运动不确定性的位置(存在分支缺陷),这些机构 必须去除。这就不仅需要对综合所得机构进行缺陷 判别,还要求能从整体上把握可行机构解的分布情 况,即设计者必须知道如何选取才能得到无缺陷的 机构,对于传统的设计方法,这一点是困难且盲目 的。

为了解决这个问题,给出一种空间机构解域的 建立方法。由文献[6-9]可知,运动生成中无穷多 四杆机构的类型、缺陷信息等可以在一个平面区域 内表示出来。如图3所示,将固定铰链点A。(B。)以 及动铰链点A、B的取值范围都进行限定。对于圆 心曲线上的点,能满足固定铰链点取值范围要求并 且同时保证与之对应的动铰链点也满足取值范围要 求的点就可以作为铰链点A。和B。。将这些点按一 定顺序排列,取它们的横坐标值分别作为一个平面 区域的x坐标和y坐标,就得到了四杆机构的解域。



以四杆机构的平面解域作为要建立的空间解域 的 x - y 面,显而易见,这个面上的任一点(x, y)都代 表一个四杆机构。而对于任意四杆机构又对应着一 条 C'C-C(或 C'C-C'),该曲线上每点都可以确定 一个二杆组 C'CP'。限定铰链点 C(以及 C')的取值 范围,保留 C'C-C 上满足铰链点取值范围要求的 点,通过把这些点进行分组并按一定的顺序排列,把 它们的横坐标值作为要建立的空间解域的 z 坐标 轴,就完成了解域的建立。这个空间区域内的任一 点,其x、y坐标值确定了一个四杆机构,其z坐标值 表示的是与四杆机构相对应的 C'C-C上一点。有 了这些参数也就得到了一个六杆机构,因此在这个 解域内可以用一个空间点表示一个六杆机构。对这 些机构进行缺陷判别,并附加其他尺寸约束条件 (如杆长比等),去除不满足要求点(机构),剩下的 点对应的就是满足要求的六杆机构。从解域图中可 以直观地看到可行六杆机构的分布情况,对设计者 洗取满足要求的机构具有重要指导意义。

3 Watt-I型机构回路和分支缺陷的判定

对于六杆及多杆机构回路和分支问题的研究方 法有很多,如环路分解法、雅可比矩阵法、Dixon 结 式法等^[10-18]。本节给出简单实用的 Watt - I 型六 杆机构缺陷判别方法,对于 Watt - I 型机构(图 1a), 设其主动杆 A_0A 与机架 A_0B_0 的夹角(主动角)为 φ_1 ,这个机构的运动受四杆机构 A_0ABB_0 和二杆组 C'CP'的制约。这里给出的方法就是以四杆机构 A_0ABB_0 为基础来分析六杆机构的运动,使六杆机构 生成正确的连杆运动,从而进一步判断该机构在运 动生成中的回路和分支缺陷。

判断过程如下:在只考虑 A_0ABB_0 运动的情况 下,可以根据四杆机构的尺寸参数很容易得到 φ_1 的 取值区间 $\varphi_1 \in [\varphi_{1\min}, \varphi_{1\max}]$,并且对于四杆机构,它 的回路和分支形式已经解决,因此可以在主动杆的 取值区间内正确生成连杆运动。接着考虑整个六杆 机构,它可以看作是在 A_0ABB_0 的基础上添加了一 个二杆组 C'CP'得到的,这样 A_0ABB_0 的运动就要受 到 C'CP'的限制。

当主动角 φ_1 在[$\varphi_{1\min}$, $\varphi_{1\max}$]内以一定的步长连 续取值时,按照四杆机构的运动可以得到铰链点 A、 B、C'和 P'的坐标。而对于铰链点 C,它与铰链点 C' 和 P'组成一个三角形,这个三角形在运动过程中要 满足边长条件。当 C'和 P'之间的距离 $l_{CP'}$ 大于 C'C 杆和 P'C 杆的长度之和 $l_{C'C} + l_{P'C}$,或者 $l_{CP'}$ 小于 C'C 杆和 P'C 杆的长度之差 $l_{C'C} - l_{P'C}$ 时,铰链点 C 就 不存在了,也就是这两个杆被"拉断"或者"压断" 了。这就说明当 φ_1 取这些值时,只能保证 A_0ABB_0 的正确运动而不能保证六杆机构正确运动。因此要 使六杆机构能正确运动, φ_1 的取值区间首先要包含 在[$\varphi_{1\min}$, $\varphi_{1\max}$]中,并且还需要满足条件

$$|l_{c'c} - l_{p'c}| \leq l_{c'p'} \leq l_{c'c} + l_{p'c}$$
(3)

根据式(3)可以得到满足六杆机构运动的 φ₁ 的取值范围,它们可能是离散分布的多个小区间,也 可能与单独四杆机构运动时的主动角运动范围相 同。前者说明该机构存在多个回路,后者说明该 机构只存在一个回路。图4所示为一个六杆机构 所有的回路情况,从中可以看出该机构存在4个 回路。

运动生成的目的是使综合的机构不拆开重装就 能通过给定的位置,从上面的分析已经可以计算得 出任意 Watt-I型六杆机构的回路个数并正确生成 了各回路对应的连杆曲线,因此只需要判断给定的 末端执行件的4个位置是否位于同一条连杆曲线 上。如果这4个位置都在一条连杆曲线上,那么这



图 4 具有 4 个回路的 Watt - I 型六杆机构 Fig. 4 A Watt - I six-bar linkage with four circuits

个机构就可以在一个构型内达到所有的给定位置, 也就是不存在回路缺陷,反之则存在回路缺陷。对 于不存在回路缺陷的机构,再来判断其是否存在分 支缺陷。存在不同分支意味着机构在运动过程中 C'C 杆和 P'C 杆会经过拉直共线或重叠共线(即 $l_{CP'}$ 达到长度的上下限)的位置。而铰链点 C 在达 到 C'C 杆和 P'C 杆共线的极限位置后,接下来会运 动到另一个分支,而不是原路返回。数学描述就是 向量 $\overrightarrow{CP'}$ 和 $\overrightarrow{CC'}$ 的叉积 $\overrightarrow{CP'} \times \overrightarrow{CC'}$ 的符号发生了变化。 因此判断分支缺陷的方法就是在给定的4 个位置处 分别作向量 $\overrightarrow{CP'}$ 和 $\overrightarrow{CC'}$ 的叉积,如果叉积的符号发生 变化,则存在分支缺陷,反之则不存在。这样就完成 了运动生成四位置六杆机构综合问题中回路和分支 缺陷的判别。

4 综合示例

如图 5 所示,综合一个手指形状的抓取机构,初 始位置为伸直状态,最后一个位置为握起状态。



给定 P 点和 P'点在 4 个位置的坐标 $P_i(P_{ix}, P_{iy})$ (i = 1, 2, 3, 4)和 $P'_i(P'_{ix}, P'_{iy})$,这样也就知道了末端 执行构件所在运动平面 π 的转角 θ_i 。此外按照本 文的综合思路还需要给出 P'点所在四杆机构连杆 运动面 π' 在 4 个位置的转角 θ'_i ,各种设计条件如 表 1 所示。

表 1 给定的六杆机构末端执行件及四杆机构 连杆运动面的四位置参数

Tab.1 Four prescribed positions of six-bar linkage end-effector and four-bar linkage coupler plane

	P_{i}	$\theta_i / (\ ^\circ)$	P'_i	$\theta_i'/(\circ)$
1	(-19,10)	- 28. 2	(0,0)	0
2	(-4.25,-46.5)	40.2	(12.14, -32.63)	45
3	(34.5, -71.0)	96.2	(32.17, -49.67)	80
4	(84.5, -56.5)	168.2	(63.48, -52.12)	133

从实际应用角度考虑,为了使机构接近手指形状,本例中限定铰链点 A_0 和 B_0 的横坐标取值在 60~90之间,铰链点A和B的横坐标取值在20~50 之间,铰链点C和C'的横坐标取值在-10~30之 间。此外限定所有待求铰链点的纵坐标取值范围都 在-60~60之间,并要求杆长比 $l_{max}/l_{min} \leq 8$ 。给出 的各运动面的位置及铰链点限定区域如图6所示。



首先综合四杆机构 A_0ABB_0 ,这是一个运动生成 四位置问题,连杆运动面上的四个位置都是已知的 (由点坐标 P'_i 及连杆面转角 θ'_i 确定)。建立四杆机 构类型解域,通过缺陷判别去除存在回路和分支缺 陷的部分,并要求杆长比 $l_{max}/l_{min} \leq 8$,得到如图 7 所 示的可行机构解域,其中机构的分类方法参照文 献[19 – 20]。

图 7 中标号为 0 的部分为不满足设计要求的区域,并且可以看出本例中只能得到双摇杆和内-外摆动的三摇杆这两种类型的四杆机构。理论上在剩下的可行区域内任取一点就得到四杆机构 A₀ABB₀,然后计算出 C'C - C。在该曲线上任取一点即可得到 一个二杆组,和已知的四杆机构相连就完成了六杆





图 7 四杆机构的平面可行解域

Fig. 7 Feasible planar solution regions of four-bar linkage
1. 曲柄摇杆 2. 双摇杆 3. 摇杆曲柄 4. 双曲柄 5. 三摇杆(内-外)摆动 6. 三摇杆(外-外摆动) 7. 三摇杆(外-内摆动)
8. 三摇杆(内-内摆动)

对于综合所得无穷多六杆机构,为了能够从整 体上把握可行机构解的分布情况,这里根据前面所 述的方法建立六杆机构的空间解域。如图8所示是 去除了分支和回路缺陷并附加杆长比约束条件 $l_{max}/l_{min} \leq 8$ 之后所得的六杆机构空间可行解域。该 可行域内的每个点都代表一个满足设计要求的六杆 机构,它的 x 和 y 坐标值分别确定了铰链点 Ao、A 和 B_0 、B 的坐标,而从它的 z 坐标值可以得到铰链点 C 和 C'的坐标。需要注意的是,由于 z 坐标轴表示的 是经过排序的铰链点 C 的横坐标 C_x , 而不同 C'C -C上满足铰链点位置要求的 C 点的个数是不一样 的。也就是对于 x-y 面内的每一个点,与其对应的 z轴的长度是不一样的,因此在图 8 中不便于统一 标注z轴的刻度。此处z轴上标注的是与下文中选 定的四杆机构($(x, y) = (72, 2_3, 74, 4_1)$)相对应的 那条 C'C-C 上 C 点的横坐标。此外由于要对全部 六杆机构进行缺陷判别,所需的计算时间比较多,因 此这里只给出空间可行域的一部分。

在图 8 所示的可行域内任意选点都可得到满足 设计要求的六杆机构,但位于可行域内部的点由于 被遮挡而无法直接选取,在综合机构时还需要配合 使用解域图 7。本例中在图 8 空间解域的 x - y 面上 选择坐标为 $(x,y) = (72.2_3,74.4_1)$ 的点,将这个点 对应到图 7 所示的四杆机构平面解域中,可以看出 得到的是一个双摇杆的四杆机构。它的各铰链点的 坐标为: A_0 (72.20,1.03)、 B_0 (74.40,16.68)、 A(24.17,4.75)、B(26.49, -4.96),该四杆机构如 图 9所示。





Fig. 8 Feasible spatial solution regions of six-bar linkage

为了更直观地进行铰链点 C 和 C'的选择,将与 这个四杆机构相对应的曲线 C'C - C 上的各可行区 段绘图,如图 10 所示。



Fig. 9 Synthesized four-bar mechanism A_0ABB_0

如图 10 所示,在曲线 C'C - C 的可行区段上任 取一点都可得到满足杆长比条件的无缺陷机构,此 处选择坐标为(0.60,15.97)的点作为铰链点 C,与 之对应的作为铰链点 C'的点坐标为(20.77, -4.29)。最终综合的 Watt - I 型六杆机构如图 11 所示,可以看出这个机构存在两个回路,但是其中一 个回路可以通过所有 4 个给定位置,因此该机构并



不存在回路缺陷。

5 结束语

结合缺陷判别及解域方法对运动生成四位置 Watt-I型六杆机构的综合问题进行了研究。以四 杆机构的平面解域为基础建立可行六杆机构的空间 分布解域,空间可行域使设计者从总体上把握六杆 机构的缺陷分布情况,指导设计者方便快捷地完成 综合任务。缺陷判别及可行域建立过程都可以通过 程序自动实现,计算实例表明该方法简单有效,具有 实用价值。

- 参考文献
- 1 McCarthy J M, Soh G S. Geometric design of linkages[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2010.
- 2 Soh G S, McCarthy J M. The synthesis of six-bar linkages as constrained planar 3R chains [J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(2): 160 170.
- 3 Soh G S, Ying Fangtian, McCarthy J M. Dimensional synthesis of planar six-bar linkages by mechanically constrain a PRR serial chain [C] // Proceedings of the ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, DETC2012 - 70721.
- 4 Todorov T S. Synthesis of Watt's six-link mechanism for manipulation action in relative space [J]. Mechanism and Machine Theory, 1997, 32(5): 559 568.

- 5 Shiakolas P S, Koladiya D, Kebrle J. On the optimum synthesis of six-bar linkages using differential evolution and the geometric centroid of precision positions technique [J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(3): 319-335.
- 6 Han Jianyou, Yang Tong. On the solution of region-based planar six-bar motion generation for four finitely separated positions [C] // Proceedings of the 36th ASME Mechanisms and Robotics Conference, DETC2012 - 70211.
- 7 韩建友,杨通,尹来容,等. 连杆机构现代综合理论与方法-解析理论、解域方法及软件系统[M].北京:高等教育出版社, 2013.
- 8 Yang Tong, Han Jianyou, Yin Lairong. A unified synthesis method based on solution regions for four finitely separated and mixed "Point-Order" position [J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(11): 1719 - 1731.
- 9 杨通,韩建友.复合四位置刚体导引机构综合的研究[J].农业机械学报,2011,42(3):203-207. Yang Tong, Han Jianyou. Research on the rigid-body guidance mechanism synthesis through four mixed positions[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(3): 203-207. (in Chinese)
- 10 Wang Jun, Ting K L, Xue Changyu. Discriminant method for mobility identification of single degree-of-freedom doubel-loop linkages [J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(5): 740 - 755.
- 11 Ting K L, Wang Jun, Xue Changyu. Full rotatability and singularity of six-bar and geared five-bar likages [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2010, 2(1): 011011-011019.
- 12 Krishnamurty S, Turcic D A. Branching determination in non-dyadic planar multi-loop mechanisms [J]. Journal of Mechanical Design, 1992, 114(2): 245 251.
- 13 Watanabe K, Katoh H. Identification of motion domains of planar six-link mechanisms of the Stephenson-type [J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(10): 1081-1099.
- 14 Chase T R, Mirth J A. Circuit and branch of single-degree-of-freedom planar linkages [J]. Journal of Mechanism Design, 1993, 115(2):223-230.
- 15 邹炎火,郭晓宁. Stephenson-III 型六杆机构死点位置的结式消元法识别[J]. 机械设计与研究, 2010, 26(2): 32-34.
- 16 杭鲁滨,马培荪,杨廷力. 基于 Dixon 析配法的平面三回路基本运动链装配构形求解[J]. 机械科学与技术,2003,22(3): 366-368.

Hang Lubin, Ma Peisun, Yang Tingli. Configuration analysis of planar 3-loop mechanism based on Dixon resultant method [J]. Mechanical Science and Technology, 2003, 22(3): 366 - 368. (in Chinese)

- 17 郭晓宁,褚金奎. Stephenson-II 型六杆机构曲柄存在条件及判断方法[J]. 农业机械学报,2004,35(3):120-123.
 Guo Xiaoning, Chu Jinkui. Identification of a crank for Stephenson-II six-bar linkage[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2004, 35(3): 120-123. (in Chinese)
- 18 邹炎火,郭晓宁. 基于 Sturm 定理的 Stephenson-III 六杆机构曲柄存在的判断[J]. 福州大学学报:自然科学版, 2010, 38(1): 69-74.
- 19 Barker C. A complete classification of planar four-bar linkages [J]. Mechanism and Machine Theory, 1985, 20(6): 535-554.
- 20 Luck K, Modler K H. Getriebetechnik analyse-synthese-optimierung [M]. Berlin: Akademie-Verlag, 1990.

Synthesis of Watt – I Six-bar Linkage Based on Spatial Solution Region for Given Two Coupler Planes

Yang Tong Han Jianyou Cui Guangzhen Li Renwu

(School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: This paper addresses the synthesis problem of Watt – I six-bar linkage motion generation, and introduces a novel and convenient synthesis approach. The coupler link used as end-effector of Watt – I is connected to a coupler plane of a four-bar linkage, so that the designers need to give the task positions of these two coupler planes. With the method, a four-bar linkage is synthesized firstly, and then a dyad is attached to this four-bar linkage to obtain a six-bar linkage. For four-precision-position problems, four-bar motion generation can produce infinite number of solutions. And for any selected four-bar linkage, we can present an equation of pivot curve that each point on this curve can generate a satisfactory dyad. Based on the planar solution region of four-bar linkage, an infinite number of synthesized six-bar linkage solution can be expressed in a finite spatial region. In addition, the paper still puts forward a circuit and branch defects distinguish method for Watt – I six-bar linkage. The feasible spatial mechanism solution regions without any defects are obtained by using the distinguish method. Application of the spatial solution regions makes designers to be able to understand the information of the synthesized six-bar linkages on the whole, and makes it possible to get the optimal solution that attached more design requirements.

Key words: Six-bar linkage Motion generation Spatial solution regions Defects distinguish