doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.10.002

# 基于惯容-弹簧-阻尼结构体系的被动天棚阻尼悬架系统

## 张孝良 聂佳梅 汪若尘 陈 龙

(江苏大学汽车工程研究院,镇江 212013)

摘要:利用"惯容-弹簧-质量"系统的反共振,提出一种理想天棚阻尼的被动实现方法,设计了被动天棚阻尼悬架 系统,建立悬架系统的整车模型,对比分析了传统被动、理想天棚及被动天棚阻尼悬架系统性能。结果表明,与传 统被动悬架相比,被动天棚阻尼悬架能够抑制车身在1~3 Hz 的垂直、俯仰和侧倾振动,车身垂直、俯仰和侧倾加速 度均方根值,分别减小了14%、14.6%和9.3%,被动天棚阻尼悬架能够提高车辆的乘坐舒适性,实现理想天棚阻尼 悬架的主要功能,研究结果从理论上验证了理想天棚阻尼被动实现方法的正确性与有效性。 关键词:车辆 悬架 反共振 惯容器 天棚阻尼 中图分类号: U463 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2013)10-0010-05

### Passive Skyhook-damping Suspension System Based on Inerter – Spring – Damper Structural System

Zhang Xiaoliang Nie Jiamei Wang Ruochen Chen Long (Automotive Engineering Research Institute, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: Based on inerter – spring – damper structural system, a passive realization method of ideal skyhook-damping was presented by using the anti-resonance of the inerter – spring – mass system. A passive skyhook-damping suspension system was designed. The whole car model of the suspension was built to compare the performance of conventional passive, ideal skyhook-damping and passive skyhook-damping suspensions. The results showed that in contrast to conventional suspension, passive skyhook-damping suspension could suppress vertical, pitch and roll vibration of vehicle body with frequency of 1  $\sim$  3 Hz. The RMS values of vertical, pitch and roll acceleration reduced by 14%, 14.6% and 9.3%, respectively. The proposed suspension could improve ride comfort and achieve the main functions of ideal skyhook-damping suspension. The results also indicated that the passive realization method of ideal skyhook damping was corrective and effective.

Key words: Vehicle Suspension Anti-resonance Inerter Skyhook-damping

#### 引言

传统被动悬架由弹簧和阻尼元件组成,建立在 基于经典隔振理论的"弹簧-阻尼"结构体系上,很 难进一步提高其性能。惯容器(Inerter)的出现,"惯 容-弹簧-阻尼"悬架结构新体系的提出,突破了基 于经典隔振理论的"弹簧-阻尼"结构体系对悬架隔 振性能进一步提高的制约,为悬架新技术的发展提 供了一个崭新的平台<sup>[1~3]</sup>。

理想天棚阻尼要求阻尼元件与惯性参考系相 连,但在车辆悬架系统中,这一条件无法得到满足, 使得理想天棚阻尼不能被动实现,一般采用间接的 方法来实现理想天棚阻尼的功能,包括主动、半主动 控制方法<sup>[4-7]</sup>。而主动、半主动控制悬架在能耗、可 靠性、有效性、实时性等方面存在不足,且系统较为 复杂,难以得到大规模的推广与应用<sup>[8]</sup>。

收稿日期:2012-09-04 修回日期:2012-10-25

<sup>\*</sup>国家自然科学基金资助项目(50905078)和江苏大学高级人才启动基金资助项目(09JDG054、13JDG033)

作者简介:张孝良,讲师,博士,主要从事车辆动力学研究,E-mail: zxl1979@ ujs. edu. cn

通讯作者: 陈龙,教授,博士生导师,主要从事车辆动力学研究, E-mail: chenlong@ ujs. edu. cn

很多学者开展了基于"惯容-弹簧-阻尼"结构 体系的车辆悬架相关研究工作<sup>[3,9-14]</sup>。但迄今为 止,基于"惯容-弹簧-阻尼"结构体系,被动地实现 理想天棚阻尼的相关研究还未见报道。

本文基于"惯容-弹簧-阻尼"悬架结构新体系, 提出一种理想天棚阻尼的被动实现方法,设计一种 不需要能量输入、不依赖控制系统的被动天棚阻尼 悬架,替代理想天棚阻尼主动和半主动实现系统,以 减少能耗,降低系统的复杂度,增强系统的有效性与 实时性,提高系统的可靠性。

#### 1 理想天棚阻尼的被动实现

#### 1.1 惯容器与弹簧并联谐振

由电路分析原理,当电感与电容并联电路导纳 为零时,电路会发生并联谐振,此时,电感电流与电 容电流互相抵消,电感与电容并联部分相当于开 路<sup>[15]</sup>。根据"惯容-弹簧-阻尼"机械系统与"电容-电感-电阻"电子系统的相似性可知,当弹簧和惯容 器并联体的导纳为零时,弹簧和惯容器并联体发生 并联谐振,弹簧与惯容器两端的力互相抵消,弹簧与 惯容器并联部分相当于开路。因此,当弹簧与惯容 器并联谐振时,弹簧与惯容器的并联体会阻断力的 传递。

#### 1.2 "惯容-弹簧-质量"系统的反共振

"惯容-弹簧-质量"系统如图1所示。由上述 分析可知,当弹簧和惯容器并联体的导纳为零时,弹 簧与惯容器会发生并联谐振,阻断力向被隔离质量 块的传递,此时,尽管输入位移 z<sub>0</sub>的振幅不为零,但 被隔离质量块的振幅却为零,即系统发生了反共振 现象。"惯容-弹簧-质量"系统的反共振为理想天 棚阻尼的被动实现提供了一种解决方法。



#### 1.3 理想天棚阻尼的被动实现方法

图 2a 是理想天棚阻尼悬架系统,理想天棚阻尼 的被动实现方法如下:首先,在图 2a 中的簧上质量 和悬架之间插入并联的弹簧和惯容器,然后,将天棚 阻尼器与惯容器并联,如图 2b 所示。

图 2a 中理想天棚阻尼悬架系统的参数是已知的。在图 2b 所示的被动天棚阻尼悬架系统中,除参数 b<sub>2</sub>和 k<sub>2</sub>未知外,其他参数与理想天棚阻尼悬架系



图 2 理想天棚阻尼的被动实现

 Fig. 2
 Passive realization of ideal skyhook damping

 (a) 理想天棚阻尼悬架系统
 (b) 被动天棚阻尼悬架系统

统相同。确定参数 b<sub>2</sub>和 k<sub>2</sub>的方法如下:

(1) 在图 2a 中,去掉理想天棚阻尼悬架系统中的天棚阻尼器后,簧上质量的共振频率为

$$\omega_2 = \sqrt{k/m_2}$$

式中 k——第1级悬架刚度 m2——簧上质量

(2) 在图 2b 中,由惯容器、第 2 级悬架弹簧和 簧上质量组成的"惯容-弹簧-质量"系统反共振频 率为

$$\omega_{2A} = \sqrt{k_2/b_2}$$

式中  $k_2$ ——第2级悬架刚度  $b_2$ ——惯容系数

(3)由反共振频率 ω<sub>2</sub>,与共振频率 ω<sub>2</sub>相等,确
 定 k<sub>2</sub>与 b<sub>2</sub>的关系为

 $k/m_2 = k_2/b_2 \tag{1}$ 

(4)将式(1)作为一约束条件,将簧上质量的 位移传递率作为优化问题的目标函数,求解该优化 问题,即可得到参数 k<sub>2</sub>与 b<sub>2</sub>的值。

#### 2 被动天棚阻尼悬架系统动力学建模

被动天棚阻尼悬架系统整车模型如图 3 所示。 车身质心处的垂直运动方程为

$$m_{\rm b}\ddot{z}_{\rm c} = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \tag{2}$$

车身俯仰运动方程为

$$I_{\theta} \overset{\cdots}{\theta} = -l_{f}(f_{1} + f_{2}) + l_{r}(f_{3} + f_{4})$$

$$43)$$

$$43)$$

$$43)$$

$$43)$$

$$\frac{1}{2} \varphi = t_{\rm f} (f_1 - f_2) + t_{\rm r} (f_3 - f_4) \tag{4}$$

非悬挂质量的垂直运动方程为

$$\begin{cases} m_{w1} \ddot{z}_{w1} = -k_{t1} (z_{w1} - z_{g1}) - f_1 \\ m_{w2} \ddot{z}_{w2} = -k_{t2} (z_{w2} - z_{g2}) - f_2 \\ m_{w3} \ddot{z}_{w3} = -k_{t3} (z_{w3} - z_{g3}) - f_3 \\ m_{w4} \ddot{z}_{w4} = -k_{t4} (z_{w4} - z_{g4}) - f_4 \end{cases}$$
(5)

根据第1、2级悬架作用力相等,可得

其中

其中



 $\varphi^{-}$ 

I。——车身俯仰转动惯量 I\_\_\_\_车身侧倾转动惯量

 $z_{-}$ 

一车身质心处垂直位移

z<sub>hi</sub>——轮 i 处车身垂直位移

—车身侧倾角

此,令  $G^{\mathrm{T}}(M_{\mathrm{h}})^{-1}$  左乘以式(8)的两边可得

$$\ddot{\boldsymbol{z}}_{b} = -\boldsymbol{M} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{2} (\boldsymbol{z}_{b} - \boldsymbol{z}_{r}) + \\ \boldsymbol{C}_{sky} (\dot{\boldsymbol{z}}_{b} - \dot{\boldsymbol{z}}_{r}) + \boldsymbol{B}_{2} (\ddot{\boldsymbol{z}}_{b} - \ddot{\boldsymbol{z}}_{r}) \end{bmatrix}$$
(12)  
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{M}_{b})^{-1} \boldsymbol{G}$$

取系统变量和输出变量为

$$\boldsymbol{x} = [(\boldsymbol{z}_{b} - \boldsymbol{z}_{r})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}_{r} - \boldsymbol{z}_{w})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}_{w} - \boldsymbol{z}_{g})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\dot{z}}_{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\dot{z}}_{r}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\dot{z}}_{w}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{\ddot{q}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\ddot{z}}_{b}(\boldsymbol{z}_{b} - \boldsymbol{z}_{w})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_{t}(\boldsymbol{z}_{w} - \boldsymbol{z}_{g}))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y} \tilde{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\dot{w}} \boldsymbol{$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{z}_{g}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$
(13)

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} & I_{4} & -I_{4} & 0_{4} \\ 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} & I_{4} & -I_{4} \\ 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} & I_{4} \\ 0_{4} & -MK_{1} & 0_{4} & 0_{4} & -MC_{1} & MC_{1} \\ B_{2}^{-1}K_{2} & P & 0_{4} & B_{2}^{-1}C_{sky} & R & S \\ 0_{4} & M_{w}^{-1}K_{1} & -M_{w}^{-1}K_{1} & 0_{4} & M_{w}^{-1}C_{1} & -M_{w}^{-1}C_{1} \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0_{4} & 0_{4} & -I_{4} & 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} \end{bmatrix}^{T}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0_{3\times4} & -M_{b}^{-1}GK_{1} & 0_{3\times4} & 0_{3\times4} & -M_{b}^{-1}GC_{1} & M_{b}^{-1}GC_{1} \\ 0_{4} & -MK_{1} & 0_{4} & 0_{4} & -MC_{1} & MC_{1} \\ I_{4} & I_{4} & 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} \\ 0_{4} & 0_{4} & K_{1} & 0_{4} & 0_{4} & 0_{4} \end{bmatrix}$$
$$P = -(B_{2}^{-1} + M)K_{1} \quad S = (B_{2}^{-1} + M)C_{1}$$
$$R = -B_{2}^{-1}C_{1} - MC_{1} - B_{2}^{-1}C_{2}$$

3 系统性能分析

整车模型相关参数如表1所示。

表1 整车模型参数

Tab.1 Parameters of whole car mode	Tab. 1	Parameters	of whole	car	mode
------------------------------------	--------	------------	----------	-----	------

参数	数值
悬挂质量 m <sub>b</sub> /kg	1 380
俯仰转动惯量 $I_{\theta}/\text{kg·m}^2$	2 440
侧倾转动惯量 $I_{\varphi}/\text{kg·m}^2$	380
前轴非悬挂质量 m <sub>w1</sub> 、m <sub>w2</sub> /kg	40.5
后轴非悬挂质量 m <sub>w3</sub> 、m <sub>w4</sub> /kg	45.4
轮胎刚度	192
前悬惯容系数 b21、b22/kg	447.5
后悬惯容系数 b <sub>23</sub> 、b <sub>24</sub> /kg	332
前悬第1级悬架刚度 k <sub>11</sub> 、k <sub>12</sub> /kN·m <sup>-1</sup>	17
后悬第1级悬架刚度 k <sub>13</sub> 、k <sub>14</sub> /kN·m <sup>-1</sup>	22
前悬第2级悬架刚度 k <sub>21</sub> 、k <sub>22</sub> /kN·m <sup>-1</sup>	15
后悬第2级悬架刚度 k <sub>23</sub> 、k <sub>24</sub> /kN·m <sup>-1</sup>	15
前悬第1级悬架阻尼系数 c <sub>11、</sub> c <sub>12</sub> /kN·s·m <sup>-1</sup>	1.5
后悬第1级悬架阻尼系数 c <sub>13、</sub> c <sub>14</sub> /kN·s·m <sup>-1</sup>	1.5
前悬天棚阻尼系数 <sub>sky_1</sub> 、c <sub>sky_2</sub> /kN·s·m <sup>-1</sup>	2.8
后悬天棚阻尼系数	2.8
前轴至车身质心距离 $l_{\rm f}/{ m m}$	1.25
后轴至车身质心距离 $l_{\rm r}/{ m m}$	1.51
前轴轮距的一半 t <sub>f</sub> /m	0.74
后轴轮距的一半 t <sub>r</sub> /m	0.74

车辆以 20 m/s 的车速驶过不平度系数为 5×10<sup>-6</sup> m<sup>3</sup>/cycle的路面时,响应均方根值如表 2 所 示,系统随机响应输出功率谱密度如图 4 所示。

表 2 随机响应输出均方根值 Tab.2 RMS values of random response outputs

长柱	传统被动	被动天棚		理想天棚	
1百 7小	均方根值	均方根值	降幅/%	均方根值	降幅/%
质心垂直加速度/m·s <sup>-2</sup>	1.608	1.383	14.0	1.304	18.9
车身俯仰加速度/rad·s <sup>-2</sup>	1.268	1.083	14.6	1.013	20. 2
车身侧倾加速度/rad·s <sup>-2</sup>	4.054	3.677	9.3	3. 225	20.4
左前车身垂直加速度/m·s <sup>-2</sup>	3. 641	3.269	10. 2	2.937	19.3
右后车身垂直加速度/m·s <sup>-2</sup>	4.031	3. 543	12.1	3. 191	20.8
左前悬架动行程/mm	25.400	24.900	2.1	21.300	16.1
右后悬架动行程/mm	24.100	23.700	1.8	20. 200	16.2
左前轮胎动载荷/kN	1.648	1.631	0.9	1. 594	3.2
右后轮胎动载荷/kN	1.748	1.724	1.4	1.677	4.0

由表 2 可知,与传统被动悬架相比,被动天棚与 理想天棚阻尼悬架系统的质心垂直加速度均方根值 分别减小了 14%和 18.9%,车身俯仰加速度均方根 值分别减小了 14.6%和 20.2%,车身侧倾加速度均 方根值分别减小了 9.3%和 20.4%,左前车身垂直 加速度均方根值分别减小了 10.2%和 19.3%,右后 车身垂直加速度均方根值分别减小了 12.1%和 20.8%,左前悬架动行程均方根值分别减小了 2.1%和16.1%,右后悬架动行程均方根值分别减 小了1.8%和16.2%,左前轮胎动载荷均方根值分 别减小了0.9%和3.2%,右后轮胎动载荷均方根值 分别减小了1.4%和4%。从图4可以看出,被动天 棚阻尼悬架的质心垂直加速度和车身俯仰加速度在 1~3 Hz内的改善程度与理想天棚阻尼悬架非常接 近,前、后车身垂直加速度和侧倾加速度的改善程度 与理想天棚阻尼悬架较为接近,但理想天棚阻尼悬 架隔振频带的带宽要较被动天棚阻尼悬架稍宽。综合上述,可以看出,与传统被动悬架相比,理想天棚 与被动天棚阻尼悬架都能够抑制车身在1~3Hz垂 直、俯仰和侧倾振动,提高了车辆的乘坐舒适性。

需要指出的是,理想天棚阻尼的被动实现方法,

利用了"惯容 - 弹簧 - 质量"系统的反共振现象,即 在某一特定频率下,惯容器与弹簧两端的力等大反向 相互抵消,阻断了力向车身的传递,从而抑制了车身的 共振,但由于天棚阻尼的存在,使得悬架系统的隔振频 率从某一特定频率扩展为了具有一定宽度的频带。



#### 4 结论

14

14%、14.6%和9.3%,提高了车辆的乘坐舒适性。

(1)与传统被动悬架相比,被动天棚阻尼悬架 能够抑制车身在1~3 Hz 垂直、俯仰和侧倾振动,车 身垂直、俯仰和侧倾加速度均方根值,分别减小了 (2) 被动天棚阻尼悬架能够实现理想天棚阻尼 悬架的主要功能,研究结果从理论上验证了理想天 棚阻尼被动实现方法的正确性与有效性。

参考文献

- 1 Smith M C. Force-controlling mechanical device: UK, PCT/GB02/03056[P]. 2002-07-04.
- 2 Smith M C. Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters [J]. Vehicle System Dynamics, 2004, 42(4): 235 ~ 257.
- 3 Chen Michael Z Q, Papageorgiou C, Scheibe F, et al. The missing mechanical circuit element [J]. IEEE Circuits and Systems Magazine, 2009, 9(1):10 ~ 26.
- 4 Fuller C R, Elliott S J, Nelson P A. Active control of vibration [M]. New York: Academic Press, 1996.
- 5 Rakheja S. Vibration and shock isolation performance of a semi-active 'on-off' damper [J]. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1985, 107(4): 398 ~ 403.

Chen Yikai, He Jie, Zhang Weihua, et al. Modified skyhook damping control of multi-axial heavy truck suspension system [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(6):16~22. (in Chinese)

- 3 汪若尘,江浩斌,张效良,等. 阻尼非线性半主动悬架的建模与控制[J]. 农业机械学报,2008,39(12):14~17.
- Wang Ruochen, Jiang Haobin, Zhang Xiaoliang, et al. Modeling and control of semi-active suspension with nonlinear damping [J].
   Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(12):14 ~ 17. (in Chinese)
- 4 Chen Shian, He Ren, Liu Hongguang, et al. An optimal design for suspension based on LQG control [C] // International Conference on Electric Information and Control Engineering Proceedings, Wuhan, 2011:1 987 ~ 1 992.
- 5 Zheng Ling, Li Yinong, Chen Bingkui. A new semi-active suspension control strategy through mixed H<sub>2</sub>/H<sub>x</sub> robust technique [J]. Journal of Central South University of Technology, 2010, 17(2):332 ~ 339.
- 6 Ahmad A, Milad G, Boris L. Output feedback constrained H<sub>x</sub> control of active vehicle suspensions [C] // 2010 2nd International Conference Advanced Computer Control, Shenyang, 2010:399 ~ 404.
- 7 Abbas C, Hassan N, Mustapha O. Sensor fault detection, identification and fault tolerant control: application to active suspension [C] // Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA, 2006;2 351 ~ 2 356.
- 8 Peter G, Zoltan S, Jozsef B. Design of reconfigurable and fault-tolerant suspension systems based on LPV methods [C] // Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008:5384 ~ 5389.
- 9 杨柳青,陈无畏,汪洪波. 基于 H<sub>2</sub>/H<sub>\*</sub>控制的汽车主动悬架最优鲁棒容错控制[J]. 中国机械工程,2012,23(24):3013~3019.

Yang Liuqing, Chen Wuwei, Wang Hongbo. Optimal robust fault tolerant control for vehicle active suspension system based on  $H_2/H_x$  approach [J]. China Mechanical Engineering, 2012, 23(24): 3013 ~ 3019. (in Chinese)

- 10 Crolla D, 喻凡. 车辆动力学及其控制[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003.
- 11 Dirman H. PID controller design for semi-active car suspension based on model from intelligent system identification [C] // 2010 Second International Conference on Computer Engineering and Applications, Bali Island, 2010:60 ~ 63.
- 12 Yu Fan, Crolla D A. An optimal self-tuning controller for an active suspension [J]. Vehical System Dynamics, 1998, 29(1): 51~65.
- 13 闻新,张洪钺,周露. 控制系统的故障诊断与容错控制[M]. 北京:机械工业出版社,1998.
- 14 李国勇. 最优控制理论与应用[M]. 北京:国防工业出版社,2008.
- 15 Zhou Kemin, Ren Zhang, Wang Wei. On the design of unknown input observers and fault detection filters [C] // Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, Dalian, China, 2006:5 638 ~ 5 642.
- 16 杨柳青,陈无畏,汪洪波. 基于残差信息的汽车液压主动悬架故障诊断与隔离研究[J]. 中国机械工程,2012,23(14): 1746~1752.

Yang Liuqing, Chen Wuwei, Wang Hongbo. Vehicle hydraulic active suspension fault diagnosis and isolation based on residual error information [J]. China Mechanical Engineering, 2012, 23(14):1746~1752. (in Chinese)

17 Wang Dejun, Li Yuanchun. Estimation of effectivness factor on-line and fault tolerant control [C] // Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Xi' an, 2003:765 ~ 770.

(上接第14页)

- 6 朱学斌,高峰. 多轴车辆半主动悬架控制技术分析与仿真[J]. 农业机械学报,2008,39(8):33~37.
- Zhu Xuebin, Gao Feng. Simulation and analysis on semi-active control technology of multi-axle vehicle suspension [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(8): 33 ~ 37. (in Chinese)
- 7 董小闵,余森,廖昌荣,等.冲击载荷下磁流变变刚度变阻尼缓冲系统减振控制[J].农业机械学报,2010,41(3):20~24. Dong Xiaomin, Yu Miao, Liao Changrong, et al. Absorbing control of magneto-rheological variable stiffness and damping system under impact load[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(3):20~24. (in Chinese)
- 8 Griffin S, Gussy J, Lane S A, et al. Virtual skyhook vibration isolation system [J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2002, 124(1):63~67.
- 9 Wang Fucheng, Liao Minkai, Liao Bohuai, et al. The performance improvements of train suspension systems with mechanical networks employing inerters[J]. Vehicle System Dynamics, 2009, 47(7):805 ~ 830.
- 10 Papageorgiou C, Smith M C. Positive real synthesis using matrix inequalities for mechanical networks: application to vehicle suspension [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(3):423 ~ 435.
- 11 Scheibe F, Smith M C. Analytical solutions for optimal ride comfort and tyre grip for passive vehicle suspensions [J]. Vehicle System Dynamics, 2009, 47(10):1 229 ~ 1 252.
- 12 Kuznetsov A, Mammadov M, Sultan I, et al. Optimization of improved suspension system with inerter device of the quarter-car model in vibration analysis [J]. Archive of Applied Mechanics, 2011, 81(10): 1427 ~ 1437.
- 13 Su Weijiun. The nonlinearities of Inerter models and their impact on vehicle suspension design [D]. Taipei: National Taiwan University, 2005.
- 14 Matamoros-Sanchez A Z, Goodall R M, Zolotas A C, et al. Stability control of a railway vehicle using absolute stiffness and inerters [C] // UKACC International Conference on Control, Cardiff, UK, 2012: 120 ~ 127.
- 15 姚仲兴,姚维. 电路分析原理:上册[M]. 北京:机械工业出版社,2005: 279~280.