

柔顺机构 PR 伪刚体动力学建模与特性分析*

余跃庆 徐齐平

(北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124)

摘要: 基于伪刚体模型,综合考虑柔性杆的横向变形和轴向变形的影响,建立了末端受力作用下柔顺机构的 PR 伪刚体动力学模型,应用拉格朗日方程推导了其动力学方程。从方程特征、响应曲线等方面显示了 PR 伪刚体动力学模型的性能变化。数值分析结果表明:PR 伪刚体模型引入了 P 副来模拟柔性杆件的轴向运动,可以更真实地体现出柔顺机构的动力学特性,更适合于柔顺机构的动力学分析与设计。

关键词: 柔顺机构 PR 伪刚体动力学模型 动力学特性

中图分类号: TH113 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)03-0225-05

Dynamic Modeling and Characteristic Analysis of Compliant Mechanisms Based on PR Pseudo-rigid-body Model

Yu Yueqing Xu Qiping

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: Based on the pseudo-rigid-body model (PRBM), a PR pseudo-rigid-body dynamic model (PRBDM) subjected to a force at the end was developed considering the effects of transverse deformation and axial deformation of flexible elements in compliant mechanisms comprehensively. The dynamic equation of the PR PRBDM was derived by using the Lagrange equation. The changes of performances of the PR PRBDM were showed in the equation feature and dynamic responses. The numerical analysis results indicate that the PR PRBDM proposed can be used to show the real dynamic characteristic of compliant mechanisms by introducing a prismatic pair to simulate the axial movement of flexible elements in compliant mechanisms and was suitable for the dynamics analysis and design of compliant mechanisms.

Key words: Compliant mechanism PR pseudo-rigid-body dynamic model Dynamic characteristic

引言

柔顺机构是一种依靠机构中柔性构件的变形来实现全部运动、力和功能传递及转换的新型机构。它利用杆件的变形来改善和提高机构的性能,在很多场合表现出优越性^[1]。柔顺机构在结构上具有大量减少运动副和运动部件的特性,因此柔顺机构有不需要安装、所需空间小、减少间隙和摩擦、磨损等优势,从而可以降低成本,提高机构精度,增加可靠性,减少维修等^[2-3]。因此,柔顺机构已经引起了广泛的关注,成为机构学界研究的新热点^[4-5]。

目前,柔顺机构的研究工作主要集中于结构学、运动学及优化设计等方面。为了提供一种能够分析非线性大变形系统的简单方法,美国学者 Howell 和 Midha 教授等提出了 1R 伪刚体模型法,它是用具有等效力-变形关系的刚性构件来模拟柔性部件的变形,从而使刚性机构的理论可以用来分析柔顺机构^[1],实验已证明这种伪刚体模型的正确性和有效性^[6-7]。但是 1R 伪刚体模型的模拟精度较低,文献^[8]针对这个问题提出了一种 3R 伪刚体模型,并用有限元软件做了误差分析,表明 3R 伪刚体模型具有更高的准确性。然而 3R 伪刚体模型计算比较

复杂。针对这个问题,冯忠磊等提出了2R伪刚体模型^[9],用末端转角参数化近似方法得出了模型的最优特征半径系数,应用线性回归方法得到了模型的刚度系数,结果表明2R伪刚体模型既弥补了1R伪刚体模型模拟精度的不足,又简化了3R伪刚体模型复杂的计算过程。随后,周鹏考虑到柔顺机构的轴向变形,提出了比2R伪刚体模型模拟精度更高的PR伪刚体模型^[10]。邱丽芳等对具有集中柔度的全柔性机构先用伪刚体模型进行分析计算,然后考虑其构件的变形,对伪刚体模型的计算分析方法进行改进,给出其一般公式^[11]。

Li Z和Kota S将有限元方法应用到柔顺机构的动力学特性分析,研究在柔顺机构设计过程中静力学与动力学特性的不同作用,利用ANSYS软件对MEMS的实例进行分析^[12]。文献[13]基于动力学等效原理,建立了伪刚体动力学模型,并推导出平面柔顺机构的动力学方程。Boyle等对柔顺常力机构进行动力学分析,并搭建柔顺常力机构的实验平台,通过对比证明了理论分析与实验检测的一致性^[14]。李茜在2R伪刚体运动学模型的基础上建立了2R伪刚体的动力学模型^[15]。以上关于柔顺机构动力学方面的研究都还比较初步和薄弱,并不能完全反映出柔顺机构的动力学特性,也不能满足柔顺机构动力学分析和设计的要求。

本文以柔顺机构中的主要变形构件——柔顺杆为研究对象,基于PR伪刚体模型,建立末端受载荷作用下的PR伪刚体动力学模型,应用拉格朗日方程建立其动力学方程并求解,得出响应曲线和固有频率,进而分析其动力学特性。

1 原理

2R伪刚体动力学模型的微分方程是含有两个变量的变系数二阶微分方程组,通过求解得到响应曲线,其响应曲线不仅可以描述出柔顺杆的整体大范围变形状况,而且还能体现出杆件内部存在高频振荡的特性,但是2R伪刚体动力学模型未能反映出柔顺杆的轴向运动以及由此所引起的动力学性能变化情况。因此,本文通过引入一个P副来模拟柔顺杆的轴向运动以及分析其动力学性能变化情况,提出了PR伪刚体动力学模型。该动力学模型中用到了PR伪刚体运动学模型中的一些参数,故首先给出PR伪刚体运动学模型。

1.1 PR伪刚体模型

图1a所示为末端受力作用下的柔顺杆,柔顺杆杆长为 l ,末端转角为 θ_0 。它对应的PR伪刚体模型是由3根刚性杆、1个扭簧、1个滑块和1个弹簧组

成的两自由度系统,简称2-DOF伪刚体模型,由于系统中含有1个移动副和1个转动副,故简称为PR伪刚体模型(PR pseudo-rigid-body model, PR PRBM),如图1b所示。其对应的动力学模型为PR伪刚体动力学模型(PR pseudo-rigid-body-dynamic model, PR PRBDM),如图1c所示。该模型中弹簧的弹簧常数为 K ,扭簧的扭簧常数为 K_1 , γ_1 为刚性杆的特征半径系数,刚性构件横杆的长度为 $\gamma_0 l$,横杆的轴向变形量为 ρl , ρ 为随时间变化的轴向变形系数; 1 杆的长度为 $\gamma_1 l$,质量为 m_1 ,转动惯量为 J 。横杆对应柔顺杆的固定端, 1 杆对应柔顺杆的末端, 1 杆相对于移动杆的等效转角为 Θ ,且 $\Theta = c_\theta \theta_0$,其中 c_θ 为参量角系数。

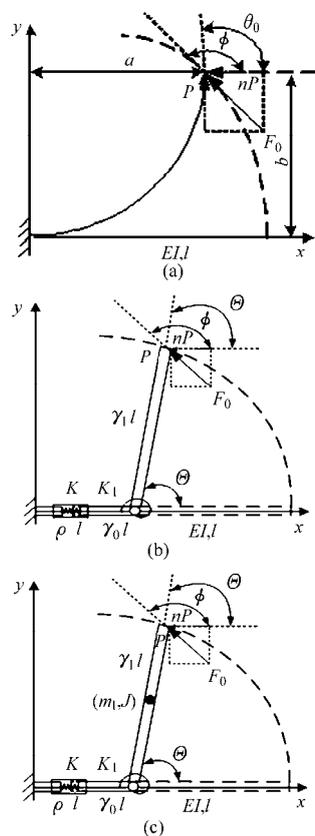


图1 末端受力作用的柔顺杆和PR伪刚体模型及其PR伪刚体动力学模型

Fig. 1 Compliant beam subjected to a force at end, PR PRBM and PR PRBDM

(a) 末端受力作用的柔顺杆 (b) PR伪刚体模型
(c) PR伪刚体动力学模型

对于该PR伪刚体模型,力 F_0 的水平分量和垂直分量分别为 nP 、 P ,且力 F_0 与水平方向的夹角为 ϕ ,采用椭圆积分法和参数化近似法求得其特征半径系数 γ_0 、 γ_1 ,并给出参量角系数 c_θ ,弹簧刚度系数为 K_L ,扭簧刚度系数为 K_θ 。取值分别为 $n = 1.5$, $\phi = 146.3^\circ$, $\gamma_0 = 0.1719$, $\gamma_1 = 0.8281$, $c_\theta = 0.7915$, $K_L = 29.2124$, $K_\theta = 1.3107$ 。

1.2 PR 伪刚体动力学模型

在PR伪刚体模型的基础上推导出PR伪刚体动力学模型,其模型如图1c所示。首先分析PR伪刚体动力学模型的动能和势能,然后基于拉格朗日方程,推导其动力学方程。

1.2.1 动能分析

如图1b,设PR伪刚体模型的转动刚性杆1杆的质心点坐标为 (x, y) ,由此可以得出该质心点的位置方程为

$$\begin{cases} x = (\rho + \gamma_0)l + \frac{1}{2}\gamma_1 l \cos\Theta \\ y = \frac{1}{2}\gamma_1 l \sin\Theta \end{cases} \quad (1)$$

对式(1)求导得出质心点的速度 (\dot{x}, \dot{y}) ,故PR伪刚体模型的转动刚性杆1杆的动能为

$$T_1 = \frac{1}{2}m\gamma_1 v^2 + \frac{1}{2}J\dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2}m\gamma_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{24}m\gamma_1^3 l^2 \dot{\Theta}^2 \quad (2)$$

经过推导,可求出转动刚性杆1杆的动能为

$$T_1 = \frac{\gamma_1}{2}ml^2\dot{\rho}^2 - \frac{\gamma_1^2}{2}\sin\Theta ml^2\dot{\rho}\dot{\Theta} + \frac{\gamma_1^3}{6}ml^2\dot{\Theta}^2 \quad (3)$$

当PR伪刚体模型末端受力作用时,其横杆上的滑块位移是随时变化的,其大小为

$$s = \rho l \quad (4)$$

对式(4)求导,可得滑块的速度 \dot{s} ,则可求出滑块的动能为

$$T_0 = \frac{1}{2}m\rho(\dot{\rho}l)^2 = \frac{1}{2}\rho\dot{\rho}^2 ml^2 \quad (5)$$

由此得出PR伪刚体动力学模型的动能为

$$T = T_0 + T_1 = \frac{1}{2}(\rho + \gamma_1)ml^2\dot{\rho}^2 + \frac{1}{6}\gamma_1^3 ml^2\dot{\Theta}^2 - \frac{1}{2}\gamma_1^2 \sin\Theta ml^2\dot{\rho}\dot{\Theta} \quad (6)$$

1.2.2 势能分析

PR伪刚体动力学模型在运动时,其变形能将储存在弹簧和扭簧中,所以PR伪刚体动力学模型的势能^[10]为

$$V = \frac{1}{2}K(\rho l)^2 + \frac{1}{2}K_\Theta \Theta^2 \quad (7)$$

其中 $K = K_L \frac{EI}{l^3}$ $K_\Theta = K_\Theta \frac{EI}{l}$

1.2.3 动力学方程

将柔顺杆末端受力作用后的PR伪刚体动力学模型看作一个系统,拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

根据上述计算,将式(6)和式(7)代入式(8)中,可

以得到该PR伪刚体动力学模型的方程组,整理得

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\gamma_1^3 ml^2 \ddot{\Theta} - \frac{1}{2}\gamma_1^2 \sin\Theta ml^2 \ddot{\rho} + K_\Theta \frac{EI}{l} \Theta = 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma_1^2 \sin\Theta ml^2 \ddot{\Theta} + (\rho + \gamma_1) ml^2 \ddot{\rho} - \frac{1}{2}\gamma_1^2 \cos\Theta ml^2 \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2 \dot{\rho}^2 + K_L \frac{EI}{l} \rho = 0 \end{cases} \quad (9)$$

从以上推导可以看出:方程组中的系数均为 Θ 和 ρ 的函数,同时也与质量 m 、杆长 l 、特征半径系数 γ_i 、刚度系数 K_Θ 及 K_L 有关。

2 动态响应

设柔顺杆材料的密度 $\rho = 1.8 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$,弹性模量 $E = 1.38 \times 10^9 \text{ Pa}$,杆长 $l = 300 \text{ mm}$,宽度 $b = 6 \text{ mm}$,厚度 $h = 1.11 \text{ mm}$,末端初始转角为 70° 。利用Matlab求解PR伪刚体动力学模型的响应曲线。

利用Matlab求解受力作用下PR伪刚体动力学模型的方程组(式(9)),得到一个周期内的响应曲线,如图2和图3所示。

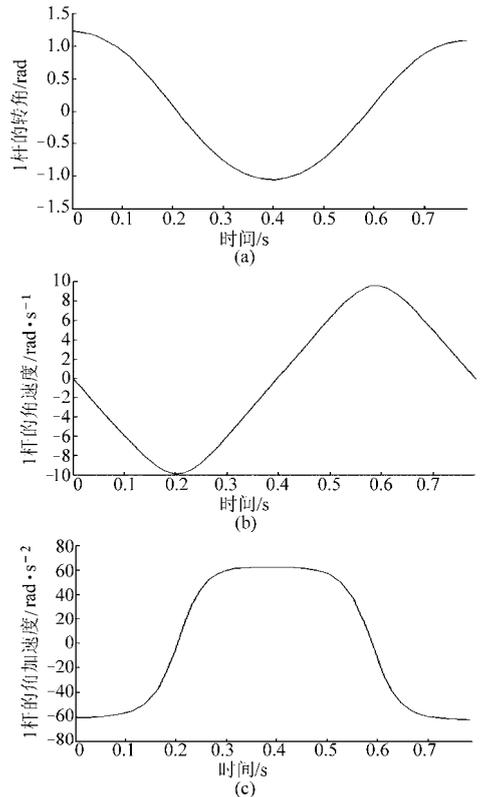


图2 转动杆响应曲线

Fig.2 Response curves of rotating link

(a) 转动杆角位移 (b) 转动杆角速度 (c) 转动杆角加速度

再由PR伪刚体模型的末端位置方程就可以绘制出其相应的末端轨迹曲线,如图4所示。

以上建立了PR伪刚体动力学模型的运动学微分方程,由两自由度系统机械振动的模态及频率分析的知识^[16],可得出系统的频率方程为

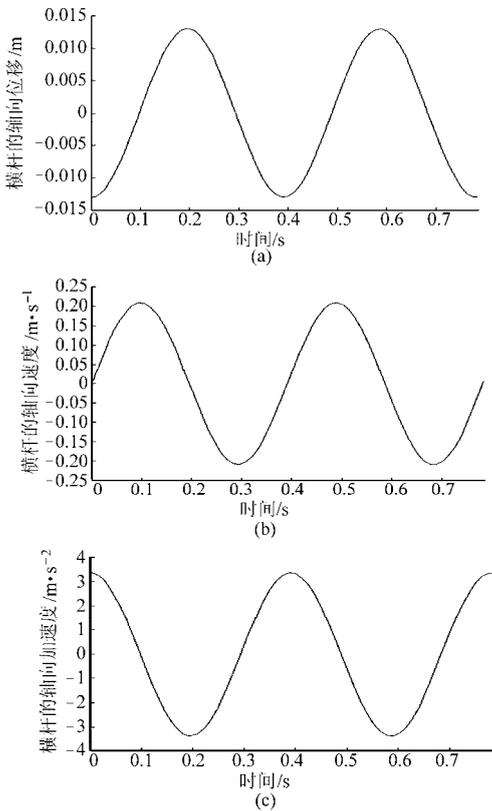


图3 移动杆响应曲线

Fig. 3 Response curves of moving link

(a) 移动杆位移 (b) 移动杆速度 (c) 移动杆加速度

$$\begin{vmatrix} K_{\theta} \frac{EI}{l} - \frac{\lambda}{3} \gamma_1^3 ml^2 & \frac{\lambda}{2} \gamma_1^2 \sin \Theta ml^2 \\ \frac{\lambda}{2} \gamma_1^2 \sin \Theta ml^2 & K_L \frac{EI}{l} - \lambda (\rho + \gamma_1) ml^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

求解出特征值为

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{其中 } a = \gamma_1^3 \left[\frac{1}{3} (\rho + \gamma_1) - \frac{1}{4} \gamma_1 (\sin \Theta)^2 \right] (ml^2)^2$$

$$b = - \left[K_{\theta} (\rho + \gamma_1) + \frac{1}{3} K_L \gamma_1^3 \right] \frac{EI}{l} ml^2$$

$$c = K_{\theta} K_L \left(\frac{EI}{l} \right)^2$$

故可以求解出 PR 伪刚体动力学模型中刚性杆 1 杆和滑块的固有频率分别为

$$\begin{cases} f_{p\theta} = \sqrt{\lambda_1} \\ f_{pp} = \sqrt{\lambda_2} \end{cases} \quad (12)$$

将机构的几何和物理参数代入式(12),可求得 PR 伪刚体动力学模型中刚性杆 1 杆和滑块的固有频率分别为 $f_{p\theta} = 1.278 \text{ Hz}$, $f_{pp} = 2.556 \text{ Hz}$ 。

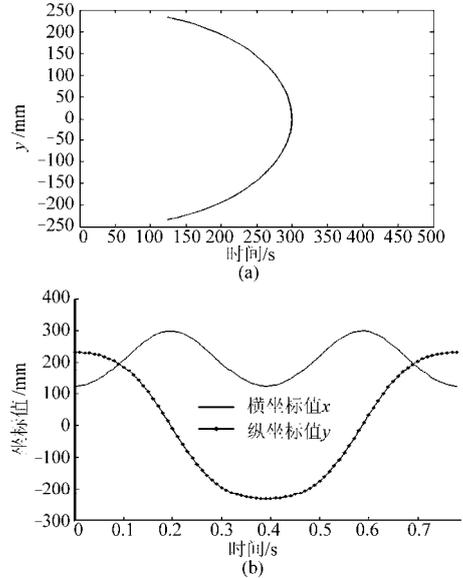


图4 末端轨迹曲线

Fig. 4 Tip locus curves

(a) 末端点轨迹 (b) 末端点位置

3 结果分析

计算得出的 PR 伪刚体动力学模型的固有频率 $f_{p\theta}$ 、 f_{pp} 分别与图 2a、图 3a 相呼应,转动杆的振动周期 $T_{p\theta} = 0.7825 \text{ s}$ 大致是移动杆的振动周期 $T_{pp} = 0.3912 \text{ s}$ 的两倍,转动杆的振动幅值远大于移动杆的振动幅值。由图 3 还可以看出在 PR 伪刚体动力学模型中确实存在轴向变形,且轴向变形量在一定的范围内。这既体现出 PR 伪刚体动力学模型中 R 副模拟柔顺杆整体大范围振动,也反映出 P 副模拟柔顺杆的轴向运动的情况。

由图 2 和图 3 能够反映出:PR 伪刚体动力学模型中转动杆和移动杆的响应曲线是呈一定规律振动的,对于各时刻的转角和位移,角速度和速度的变化曲线与角加速度和加速度的变化曲线相对应;由图 4 可以看出,PR 伪刚体动力学模型的末端轨迹呈一定规律变化,横向有相应的微小振动而且末端点的横纵坐标值也是按照相应的运动规律变化的。这就表明 PR 伪刚体动力学模型也能够体现出柔顺杆的整体大范围振荡情况,由于在其中引入了 P 副,使得它在轴向产生了一定的运动,以此来模拟柔顺杆的轴向运动,还可以说明其中某些动力学参数发生了改变,从而显示出柔顺杆可以承受高频振荡变形的特性,这更加真实地反映出柔顺杆的轴向运动和整体大范围振动情况。

4 结论

(1) PR 伪刚体动力学模型综合考虑柔顺杆的横向变形和轴向变形的综合影响,其动力学方程是

含有两个变量的变系数二阶微分方程组,且其中含有一个反映轴向运动的变量。

(2) 基于PR伪刚体模型的动力学模型不仅可以描绘出柔顺杆的整体大范围变形状况,而且还能体现出在PR伪刚体动力学模型中引入一个P副来

模拟柔顺杆轴向运动的作用。从而充分说明了提出的PR伪刚体动力学模型可以更加具体地、真实地反映出柔顺杆的轴向运动以及由此所引起的动力学性能变化情况,比较形象地表现出柔顺杆的振动和实际变形运动过程。

参 考 文 献

- 1 Howell L L. Compliant mechanisms[M]. New York: John Wiley & Sons, 2001: 1~15.
- 2 Joel A Hetrick. An energy efficiency approach for unified topological and dimensional synthesis of compliant mechanisms[M]. Michigan: University of Michigan, 1999:2~10.
- 3 Nicolae Lobontiu. Compliant mechanisms: design of flexure hinges[M]. Boca Raton, FL: CRC Press, 2002.
- 4 于靖军,宗光华,毕树生.全柔性机构与MEMS[J].光学精密工程,2001,9(1):1~5.
Yu Jingjun, Zong Guanghua, Bi Shusheng. Fully compliant mechanisms and MEMS[J]. Optics and Precision Engineering, 2001, 9(1):1~5. (in Chinese)
- 5 于靖军,毕树生,宗光华,等.基于伪刚体模型法的全柔性机构位置分析[J].机械工程学报,2002,38(2):75~78.
Yu Jingjun, Bi Shusheng, Zong Guanghua, et al. Kinematics analysis of fully compliant mechanisms using the pseudo-rigid-body model[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(2):75~78. (in Chinese)
- 6 Edwards B T, Jensen B D, Howell L L. A pseudo-rigid-body model for initially-curved pinned-pinned segments used in compliant mechanisms[J]. Transaction of the ASME, Journal of Mechanical in Design, 2001, 123(3):466~472.
- 7 Howell L L, Midha A. Parametric deflection approximations for end-loaded, large-deflection beams in compliant mechanisms[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1995, 117(1):156~165.
- 8 Su H J. A load independent pseudo-rigid-body 3r model for determining large deflection of beams in compliant mechanisms[C]// Proceedings of the 2008 ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, DETC2008-49041, 2008, 2:109~121.
- 9 冯忠磊,余跃庆,王雯静.柔顺机构中大变形柔性梁的2自由度伪刚体模型[J].机械设计与研究,2010,26(3):41~43.
Feng Zhonglei, Yu Yueqing, Wang Wenjing. 2-DOF pseudo-rigid-body model of large-deflection flexible beam in compliant mechanisms[J]. Machine Design and Research, 2010, 26(3):41~43. (in Chinese)
- 10 周鹏.综合考虑横向与轴向变形的柔顺机构伪刚体运动学模型[D].北京:北京工业大学,2012.
Zhou Peng. Pseudo-rigid-body kinematic model of compliant mechanisms considering both the vertical and axial deformation[D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2012. (in Chinese)
- 11 邱丽芳,翁海珊,柳林,等.全柔性四杆机构伪刚体模型分析计算方法的改进[J].农业机械学报,2008,39(5):142~145.
Qiu Lifang, Weng Haishan, Liu Lin, et al. Improving on method of pseudo-rigid-body model of lumped complete compliant mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(5):142~145. (in Chinese)
- 12 Li Z, Kota S. Dynamic analysis of compliant mechanisms[C]// Proceedings of ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences, DETC2002 MECH-34205, 2002, 5:43~50.
- 13 Yu Yueqing, Howell L L, Yue Ying, et al. Dynamic modeling of compliant mechanisms based on the pseudo rigid body model [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 127(4): 760~765.
- 14 Cameron Boyle, Howell L L, Magleby S P, et al. Dynamic modeling of compliant constant-force compression mechanisms [J]. Mechanism and Machine Theory, 2003, 38(12): 1469~1487.
- 15 李茜,余跃庆,常星.基于2R伪刚体模型的柔顺机构动力学建模及特性分析[J].机械工程学报,2010,46(10):148~156.
Li Qian, Yu Yueqing, Chang Xing. Dynamic modeling and analysis of compliant mechanisms based on 2R pseudo-rigid-body model[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(10):148~156. (in Chinese)
- 16 张义民.机械振动[M].北京:清华大学出版社,2007.