

静电-非线性梁耦合问题的 Galerkin 谱方法求解^{*}

林谢昭¹ 应 济²

(1. 福州大学机械工程及自动化学院, 福州 350108; 2. 浙江大学机械工程学系, 杭州 310027)

【摘要】 以受预应力直梁无阻尼模态作为 Galerkin 映射的谱函数, 求解静电-非线性梁耦合微器件的动力学问题。对器件的 Pull-in 吸合和释放动态过程进行仿真, 将结果与有限元结果和已有文献的结果比较来验证模型的有效性, 研究表明: 用这一方法建立的模型不仅能够对不同载荷情况进行多次快速仿真, 也能够对不同几何参数和材料参数的同类型器件进行快速计算, 仿真精度高且减少了计算费用。

关键词: 静电-结构耦合 Galerkin 映射 数值仿真

中图分类号: TH16; TN405 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2012)04-0208-04

Electrostatic – Nonlinear Beam Coupling Problem Solved by Galerkin Spectral Method

Lin Xiezhao¹ Ying Ji²

(1. School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China

2. Department of Mechanical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract

An undamped mode of pre-stressed straight beam was used as spectral function of Galerkin mapping to solve the dynamic problem for electrostatic – nonlinear beam coupling. The dynamic process of Pull-in and Pull-off for device was simulated. The proposed model was validated by comparing with the finite element results and the literature results. It was indicated that the proposed model not only had fast simulation ability with different action loads, but also suit for fast predicting the device characters variation with the different geometry size and different material parameters. The calculating results had sufficient accuracy and the computational costs were significantly reduced.

Key words Electrostatic – structure coupling, Galerkin mapping, Numerical simulation

引言

静电驱动两端固定微梁结构, 包括压力谐振器、RF 开关、衍射光开关等。挠性极板的运动导致该板表面的电荷分布发生变化, 进而静电力发生相应变化, 进一步导致板变形。当电压足够大时, 导致 Pull-in(吸合)现象发生。此时结构件发生最大变形, 表现出较强的几何非线性特性, 即应力刚化。应力刚化常被用作一种转换器原理, 即外部载荷使梁

发生变形, 随即改变了微器件的刚度和共振频率^[1]。因此, 要准确刻画器件的动态特性, 需要建立静电-非线性结构的耦合模型。利用有限元等高密网格方法来求解这类问题时, 计算中需要对域重新划分网格, 费用很高。结构场与静电场之间的非线性耦合也大大降低了计算收敛速度。因此, 需要寻求一种能以一定精度快速模拟器件动态特性的适当方法, 实现器件的有效设计。

Gabbay 等^[2]首先使用梁的线性振形作为描述

收稿日期: 2011-04-22 修回日期: 2011-06-01

^{*} 国家自然科学基金资助项目(50475104)、浙江省自然科学基金重点资助项目(Z106519)和福州大学科研启动基金资助项目(2011-XQ-14)

作者简介: 林谢昭, 讲师, 博士, 主要从事 MEMS 系统建模和动态特性研究, E-mail: lxz104@fzu.edu.cn

通讯作者: 应济, 副教授, 博士, 主要从事精密机械及其热态控制研究, E-mail: yingji_zju@zju.edu.cn

静电微梁动力学特性的广义坐标, 将机电耦合域问题表达成机械能量域和静电能量域中的解析模型, 提出结构模态为坐标量的 CHURN 建模过程。Mehner 等^[3]则认为, 存在应力刚化时, 使用线性模态振型估计器件的 Pull-in 电压, 其误差可能较大。Younis 等^[4]采用直梁模态振型方法研究了静电曲梁谐振器的非线性动力学特性。上述研究都针对结构件变形相对较小情况。本文采用受预应力的直梁无阻尼模态作为 Galerkin 映射的谱函数, 求解静电微梁全位移行程的 (直至 Pull-in 发生) 动态特性问题。通过与文献报道的数值和实验结果以及有限元结果的比较, 来验证这一方法的有效性。

1 模型的建立

1.1 控制方程和边界条件

假设图 1 所示的两端固定梁, 梁长度为 l , 宽度

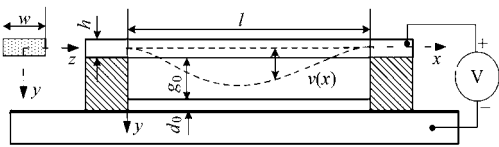


图 1 静电驱动两端固定微梁结构示意图

Fig. 1 Schematic of electrostatic drive fixed-fixed micro-beam

为 w , 厚度为 h , x 坐标轴建立在梁的中性轴上。梁为各向同性均质材料, 杨氏模量为 E , 泊松比为 ν 。只考虑梁作平面运动。梁初始承受面内载荷 N_{ox} (或是残余应力 σ_0 , $\sigma_0 = N_{ox}/(wh)$) 的影响, 其变形运动方程为

$$EI \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial \hat{x}^4} - \left[N_{ox} + \frac{Ewh}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right] \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} = f_{elec}(\hat{x}, \hat{t}) - wh\rho \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{t}^2} \quad (1)$$

其中 $f_{elec}(\hat{x}, \hat{t}) \approx \frac{1}{2} \varepsilon w V^2 / (g_0 - \hat{v})^2$

式中 $f_{elec}(\hat{x}, \hat{t})$ ——单位长度上的静电载荷力

ε ——介电常数 V ——电压

g_0 ——梁与基电极间的初始间隙

E ——等效弹性模量, 与梁宽度有关

边界条件为

$$\hat{v}(0, \hat{t}) = \hat{v}(l, \hat{t}) = 0 \quad \frac{\partial \hat{v}(0, \hat{t})}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{v}(l, \hat{t})}{\partial \hat{x}} = 0$$

引入无量纲量

$$x = \frac{\hat{x}}{l} \quad v = \frac{\hat{v}}{g_0} \quad t = \frac{\hat{t}}{\tau}$$

将式(1)无量纲化

$$\ddot{v} + v^{iv} - \left(\alpha_1 \int_0^1 v'^2 dx + N_0 \right) v'' = \alpha_2 \frac{V^2}{(1-v)^2} \quad (2)$$

其中 $N_0 = s_0 whl^2 / (EI)$ $\alpha_1 = 6(g_0/h)^2$
 $\alpha_2 = 6el^4 / (Eh^3 g_0^3)$ $\tau = [\rho whl^4 / (EI)]^{1/2}$
 相应的边界条件为

$$v(0) = v(1) = 0 \quad \frac{\partial v(0)}{\partial x} = \frac{\partial v(1)}{\partial x} = 0$$

1.2 Galerkin 方法

假设梁无量纲位移 v 可展开成一系列与时间相关的模态坐标和与空间相关的全局函数, $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ 的乘积展开形式

$$v(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^M q_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (3)$$

式中 $\{\varphi_i(\mathbf{x})\}$ ——无阻尼线性梁模态集合

M ——所使用的谱函数 $\varphi_i(\mathbf{x})$ 个数

将式(3)代入式(2)中, 由 Galerkin 方法令其残差等于零, 整理并写成矩阵为

$$M \ddot{\mathbf{q}} + (K + N_0 \mathbf{S}) \mathbf{q} + \alpha_1 \mathbf{q}^T \mathbf{S} \mathbf{q} \mathbf{q} + \mathbf{f} = 0 \quad (4)$$

其中 $M = [M_{ij}]$ $M_{ij} = \int_0^l \varphi_i \varphi_j dx$

$$K = [K_{ij}] \quad K_{ij} = \int_0^l \varphi_i'' \varphi_j'' dx$$

$$N_0 \mathbf{S} = N_0 [S_{ij}] \quad S_{ij} = \int_0^l \varphi_i' \varphi_j' dx$$

式中 M_{ij} ——质量 K_{ij} ——弯曲刚度

S_{ij} ——初始轴向载荷导致的刚度

$\mathbf{f}$ ——静电载荷项

对于电容性微开关器件, 有

$$f_j = \alpha_2 V^2 \int_0^l \varphi_j / \left(1 - \sum_{i=1}^{M_v} q_i(t) \varphi_i \right)^2 dx \quad (5)$$

求解式(4)的主要困难在于式中的第 3 项是非线性项, 它与大变形产生的轴向拉伸有关, 以及静电载荷与位移 v 有关。

由式(4)可得对应的静态变形方程为

$$(K + N_0 \mathbf{S}) \mathbf{q} + \alpha_1 \mathbf{q}^T \mathbf{S} \mathbf{q} \mathbf{q} + \mathbf{f} = 0 \quad (6)$$

由此可得到静态 Pull-in 电压。

求解式(2)对应的特征值问题

$$\varphi_i^{iv} = N_0 \varphi_i'' + \omega_i^2 \varphi_i$$

$$\varphi_i(1) = \varphi_i(0) = 0 \quad \varphi_i'(1) = \varphi_i'(0) = 0$$

可得梁受轴向预应力的无阻尼模态振型 $\varphi_i(x)$, 式中, ω_i 为无量纲频率参数。

2 模型有效性验证

2.1 静态/准静态 Pull-in 电压

静电器件的 Pull-in 电压以及 Pull-in 临界位置是器件设计的关键参数。采用文献[5]中模型参数, $l = 610 \mu\text{m}$, $w = 40 \mu\text{m}$, $h = 2.2 \mu\text{m}$, $g_0 = 2.07 \mu\text{m}$, $E = 149 \text{ GPa}$, $\rho = 2330 \text{ kg/m}^3$, $t = 0.066$, $\sigma_0 = -3.7 \text{ MPa}$ 。为避免计算奇异, 假设吸合时梁与固定

电极间的最小间隙为 $0.07\text{ }\mu\text{m}$ 。这里分别利用第一阶模态,前两阶模态以及前三阶模态求解式(6),结果如图2所示。文献[5]报道的实验测定值为 $V_{\text{pl}} = 8.76\text{ V}$ 。可以看出求解精度随着所选择的模态数量增大而提高,取3个模态就具有足够的精度。

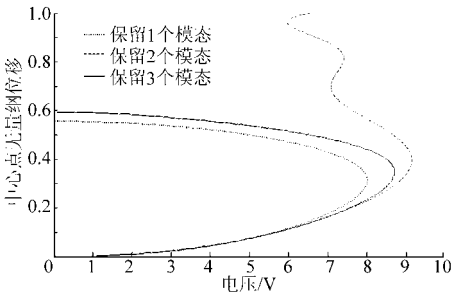


图2 梁中点变形与静态电压载荷之间的关系曲线
Fig.2 Deformation of beam center point vs static voltage

下面的计算,本文只取第一阶振型模拟准静态情况。以斜坡载荷方式缓慢增加电压,直至 Pull-in 发生。本文结果与 ANSYS 以及文献[5]的结果比较如图3所示。ANSYS 结果表明,器件 Pull-in 电压在 $8.75\sim 8.77\text{ V}$ 之间,电压超过 V_{pl} 之后,ANSYS 计算发散,无法继续。本模型计算得到的 Pull-in 电压为 8.76 V , Pull-in 时梁中心的极限位置为初始间隙的 57%,这与文献[5]的结果相吻合。而且,本模型能对超过 Pull-in 位置的整个变形范围进行计算,而没有发生发散。这里,保留第一阶模态就能以足够精度刻画器件的准静态特性。

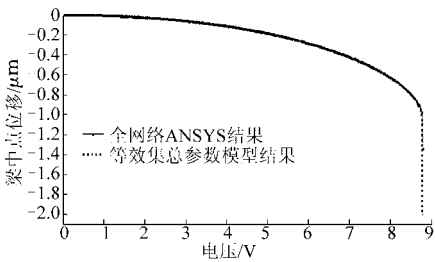


图3 梁中点位移随电压的变化曲线
Fig.3 Displacement of beam center point vs static voltage

2.2 同一模型对不同几何和材料参数的同类型器件的仿真能力

考虑设计者需运用模型来探索设计参数空间,因此模型要比较容易地预测器件动态特性随几何尺寸和材料属性变化的情况。利用本模型对文献[6]中的几个微梁(依梁长度和初始残余应力而不同)进行仿真,模型参数为: $w = 50\text{ }\mu\text{m}$, $h = 3\text{ }\mu\text{m}$, $g_0 = 1\text{ }\mu\text{m}$, $E = 169\text{ GPa}$, $\tau = 0.06$, 梁密度未见报道,取 $\rho = 2\,330\text{ kg/m}^3$ 。仍采用上述的第一阶模态建模,计算的 Pull-in 电压与文献[6]的结果对比如表1所示。本模型的精度与文献[6]中有限差分法求解二维 Bernoulli 梁的精度相当。但计算费用却小很多。

表1 使用不同模型得到的 Pull-in 电压的比较
Tab.1 Comparison of Pull-in voltage with different models

梁特性参数		Pull-in 电压/V		
$l/\mu\text{m}$	σ_0/MPa	2-D 模型	MEMSCAD	本模型
250	0	39.5	40.1	39.63
250	100	56.9	57.6	58.62
250	-25	33.7	33.6	33.22
350	0	20.2	20.3	20.22
350	100	35.4	35.8	36.88
350	-25	13.8	13.7	13.60

注:参数和结果均来自文献[6](除本模型外)。

2.3 叠加直流偏置电压的简谐振动仿真

为考察用直梁模态振型建立的模型是否有足够精度来模拟初始平衡状态为曲梁的器件的动态特性,利用本模型仿真叠加有偏置电压的正弦电压信号驱动下器件的运动特性。模型参数同2.1节。驱动电压为 $8 + 0.3\sin(2\pi ft)$,由本模型得到的梁中心点位移稳态响应如图4a所示,图4b同时给出了 ANSYS 的计算结果作为比较。ANSYS 得到的梁中心点平衡位置是 $-0.643\text{ }\mu\text{m}$, 稳态位移变化范围为 $-0.565\sim -0.722\text{ }\mu\text{m}$;本模型平衡位置为 $-0.647\text{ }\mu\text{m}$, 稳态变化范围为 $-0.546\sim -0.748\text{ }\mu\text{m}$ 。说明以直梁振型模态为谱函数的模型能够以相当高的精度来模拟偏置电压作用下器件的特性。

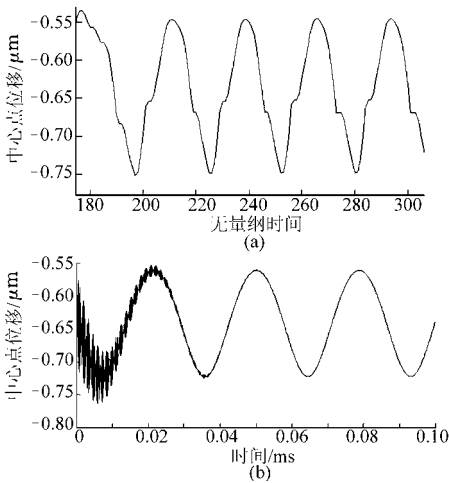


图4 叠加正弦电压激励下梁中点位移稳态响应的比较
Fig.4 Comparison of steady-state response of beam center displacement under added sine voltage
(a) 本模型 (b) ANSYS

2.4 Pull-in 和释放过程的动态仿真

在 Simulink 中建立单模态模型,仿真器件在零初始状态下,受到一个三角波电压驱动时的动态响应,研究 Pull-in 和 Pull-off(释放)的动态过程。为计算收敛,取常系数阻尼。电压信号与梁中心点位移响应如图5a所示。当电压逐步增大,位移呈非线性

关系增大,超过 Pull-in 电压时(8.9 V 附近),梁突然加速下拉并与基电极吸合。吸合后电极间距很小,静电载荷变得很大,因此,即使当电压降低到小于 Pull-in 电压时,结构也不会释放。当电压降到 2.1 V 时,梁变形回复力大于静电吸合力而产生释放。因此,从吸合到释放过程中具有滞后现象,这在所有利用 Pull-in 机制工作的静电微器件中都能观察到,也是器件设计和控制的关键问题之一。图 5b 给出了下拉释放过程梁中心速度与位移相平面图,表明了

梁的下拉、撞击和释放的过程。释放时的循环振荡表现为绕最终稳定位置周围的转圈运动,这个位置是全局稳定固定点。仿真结果还表明当 Pull-in 发生之前,由于梁的变形相对较小,非线性弹簧力相对较小,线性弹簧恢复力占主导地位,随着变形的增大,非线性弹簧力很快增大,至 Pull-in 发生时,非线性弹性回复力大于线性弹簧回复力,因此,大位移情况下,忽略非线性影响会造成很大偏差。用于 Pull-in 过程研究的模型必须具备考虑大变形几何非线性的能力。

3 结束语

研究了以受预应力直梁无阻尼模态为 Galerkin 映射的谱函数,仿真静电-非线性梁耦合器件的方法,获得了考虑梁初始轴向载荷和中面拉伸效应的静电-非线性梁器件耦合模型。利用 Simulink 实现了从 Pull-in 到释放的整个过程的模拟。研究表明:以预应力直梁无阻尼模态振型作为谱函数结合 Galerkin 映射,能够获得高精度的耦合宏模型;模型能够仿真初始状态为曲梁的器件动态特性、能够快速获得不同载荷作用下器件的响应,也能够快速预测器件几何参数和材料参数发生改变随之带来的器件动态特性的变化。对于利用 Pull-in 机理进行工作的 MEMS 器件,其仿真模型必须具备能考虑大变形导致中面拉伸影响的能力。

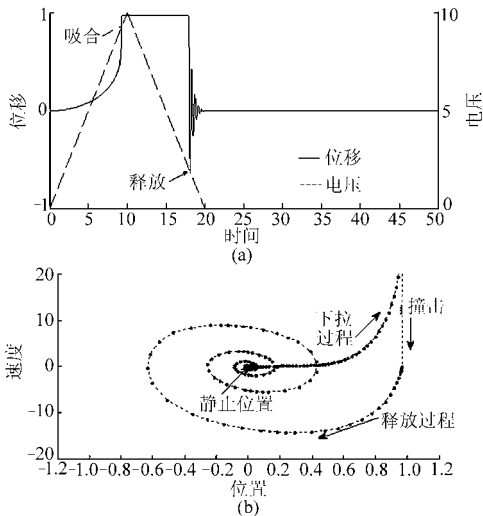


图 5 静电驱动微梁器件的下拉-释放动态过程
Fig.5 Dynamics process of Pull-in and Pull-off
(a) 电压与位移变化历程 (b) 相平面图

参 考 文 献

- 1 Lee C S, Han S, MacDonald N C. Multiple depth single crystal silicon microactuators for large displacements fabricated by deep reactive ion etching [C]//Technical Digest Solid-State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head Island, SC, 1998: 45 ~ 50.
- 2 Gabbay L D, Mehner J E, Senturia S D. Computer-aided generation of nonlinear reduced-order dynamic macromodels. Part I : non-stress-stiffened case [J]. IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems, 2000, 9(2): 262 ~ 269.
- 3 Mehner J E, Gabbay L D, Senturia S D. Computer-aided generation of nonlinear reduced-order dynamic macromodels. Part II : stress-stiffened case [J]. IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems, 2000, 9(2): 270 ~ 277.
- 4 Younis M I, Nayfeh A H. A study of the nonlinear response of a resonant microbeam to an electric actuation[J]. Nonlinear Dynamics, 2003, 31(1): 91 ~ 117.
- 5 Gupta R K. Pull-in dynamics of electrostatically actuated microstructures [R]. Semiconductor Research Corporation (SRC) TECHCON, 1996.
- 6 Osterberg P M, Senturia S D. M-test: a test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures[J]. IEEE/ASME Journal of Microelectromechanical Systems, 1997, 6(2): 107 ~ 117.