

# 完全各向同性 2T1R 空间并联机器人机构型综合\*

张彦斌<sup>1</sup> 吴鑫<sup>2</sup> 刘宏昭<sup>3</sup>

(1. 河南科技大学规划与建筑工程学院, 洛阳 471003; 2. 河南科技大学机电工程学院, 洛阳 471003;  
3. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

**【摘要】** 提出了完全各向同性二移动一转动(2T1R)空间并联机器人机构型综合的系统方法。首先根据机构各分支预期功能的要求,基于互易螺旋理论确定出各分支的驱动螺旋、主动螺旋和可动非主动螺旋;再按照分支连接度的不同列举出机构的各分支运动链;最后根据机构各分支装配要求将动平台和静平台连接起来即可得到预期的机构,并得到大量新型机构。实例分析验证了型综合方法的正确性。由于所综合出的并联机器人机构的运动雅可比矩阵均为单位阵,因此这类机构具有良好的运动学和力传递性能。

**关键词:** 并联机器人 型综合 完全各向同性

**中图分类号:** TH112; TP242 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2011)11-0200-08

## Structural Synthesis of Fully-isotropic 2T1R Spatial Parallel Robotic Manipulators

Zhang Yanbin<sup>1</sup> Wu Xin<sup>2</sup> Liu Hongzhao<sup>3</sup>

(1. School of Planning and Architectural Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China

2. School of Mechatronics Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China

3. Faculty of Mechanical and Precision Instrumental Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

### Abstract

A systemic methodology for structural synthesis of fully-isotropic two-translational and one-rotational (2T1R) spatial parallel robotic manipulators was proposed. According to the prescribed characteristics of each mechanism limb, the actuation screws, actuated screws and mobile unactuated screws of every limb were confirmed at first based on the reciprocal screw theory. Then the structural synthesis of each kinematic chain for fully-isotropic 2T1R spatial parallel robotic manipulators was performed in the light of different connectivity of the limbs. Finally, the anticipant manipulators were synthesized by connecting the moving platforms to the fixed bases and a lot of new mechanisms were attained. Kinematical analysis about one of manipulators designed here showed that the method is reasonable and correct. The kinematic Jacobian of the mechanism is an identical matrix, so it performed very well with regard to motion and force transmissions.

**Key words** Parallel robotic manipulator, Structural synthesis, Full-isotropic

### 引言

并联机器人机构的型综合过程可分为分支运动链的型综合和机构型综合两个关键环节。分支运动链型综合是指利用某种方法或手段综合出含有一定运动副类型和数目并按照一定配置形式串联而成的运动链结构,且该运动链结构末端构件的运动输出

特性包含预期机构的运动输出特性;机构型综合则是将所综合出的若干条运动链按照一定约束形式把动平台和静平台连接组成能够实现预期运动输出特性的机构。国际上常用的型综合方法有:基于自由度计算公式的列举法<sup>[1]</sup>、基于给定末端运动的型综合法<sup>[2-3]</sup>、基于位移李群理论综合法<sup>[4-5]</sup>和基于螺旋理论的型综合法<sup>[6]</sup>。

收稿日期: 2011-01-25 修回日期: 2011-04-10

\* 国家自然科学基金资助项目(50905055)、河南省教育厅自然科学基金资助项目(2010A460006)、河南省高校青年骨干教师资助项目(2010GGJS-079)和河南科技大学博士科研启动基金资助项目

作者简介: 张彦斌,副教授,主要从事机构学和并联机器人理论研究, E-mail: yanbin\_zh@163.com

关于并联机器人的研究大多集中于 6 自由度<sup>[7]</sup>、3 自由度移动<sup>[2]</sup>和 3 自由度转动<sup>[8]</sup>并联机构,而对 2T1R 型 3 自由度空间并联机构的关注相对较少<sup>[9]</sup>。Kong 和 Gosselin<sup>[6]</sup>基于螺旋理论对 2T1R 型空间并联机构的结构综合进行了研究,并综合出多种新型机构。Refaat 和 Hervé<sup>[10]</sup>利用位移李群理论综合出 3 种新型 2T1R 空间并联机构。对一般的并联机构而言,由于其运动耦合性强,使得轨迹规划和实时控制等方面较为困难。所以关于解耦、无耦合以及完全各向同性机构的研究已成为该领域的新课题。Zhang<sup>[11]</sup>提出一种新型无耦合 2T1R 空间并联机构,对其位置、速度及运动性能进行了分析。Gogu<sup>[12]</sup>利用线性变换理论提出了完全各向同性移动并联机构的型综合方法。Carricato<sup>[13]</sup>基于螺旋理论提出了完全各向同性 3T1R 并联机构的型综合方法。张彦斌<sup>[14]</sup>等则基于互易螺旋理论对完全各向同性 3 自由度移动并联机构的型综合进行了研究。本文在上述文献的基础上,提出完全各向同性二移动—转动空间 3 自由度并联机构的型综合系统方法。

## 1 2T1R 型并联机构运动输入—输出关系

假定 2T1R 型 3 自由度空间并联机构末端操作器(即动平台)的输出速度为 2 个沿  $x$ 、 $y$  轴方向的线速度和 1 个绕  $y$  轴转动的角速度,而沿  $z$  轴方向移动的线速度和绕  $x$ 、 $z$  轴转动角速度恒等于零。因此 2T1R 型空间并联机构输入—输出速度关系表达式可写为

$$\mathbf{J}_{\text{dir}} \mathbf{v} = \mathbf{J}_{\text{inv}} \dot{\mathbf{q}} \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{J}_{\text{dir}} = \begin{bmatrix} L_{a1} & M_{a1} & Q_{a1} \\ L_{a2} & M_{a2} & Q_{a2} \\ L_{a3} & M_{a3} & Q_{a3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{J}_{\text{inv}} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{a1}^\circ \mathcal{S}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_{a2}^\circ \mathcal{S}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{a3}^\circ \mathcal{S}_{13} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{v} = [v_x, v_y, \omega_y]^\text{T} \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{13}]^\text{T} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{v}$ ——机构动平台的输出速度矢量

$\dot{\mathbf{q}}$ ——机构主动副的输入速度矢量

$\mathbf{J}_{\text{dir}}$ ——机构正运动雅可比矩阵

$\mathbf{J}_{\text{inv}}$ ——机构逆运动雅可比矩阵

式中  $L_{ai}$ 、 $M_{ai}$ 、 $Q_{ai}$  为机构第  $i$  条分支的驱动螺旋六维 Plucker 坐标的相应元素;  $\mathcal{S}_{1i}$  为机构第  $i$  条分支的主动螺旋;  $\mathcal{S}_{ai}$  为机构第  $i$  条分支的驱动螺旋。

若  $\mathbf{J}_{\text{inv}}$  可逆,则式(1)又可改写为

$$\mathbf{J} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \quad (6)$$

式中  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{inv}}^{-1} \mathbf{J}_{\text{dir}}$ , 为机构的运动雅可比矩阵。

若 2T1R 型并联机器人机构为完全各向同性机构,那么雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  应等价于单位阵  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ , 即

$$\mathbf{J} = \varepsilon \mathbf{I} \quad (7)$$

式中  $\varepsilon$ ——非零常数

所以正、逆雅可比矩阵  $\mathbf{J}_{\text{dir}}$  和  $\mathbf{J}_{\text{inv}}$  至少应为常对角阵才能满足  $\mathbf{J}$  为对角阵的要求。

## 2 机构分支运动链的型综合

### 2.1 第 1 条分支运动链的型综合

#### 2.1.1 第 1 条分支驱动螺旋 $\mathcal{S}_{a1}$ 的确定

假设机构第 1 条分支仅对动平台沿  $x$  轴方向的移动提供直接驱动,并设机构分支中只含有转动和移动 2 种基本运动副。

设静坐标系  $O'x'y'z'$  固接于定平台,动坐标系  $Oxyz$  的坐标原点  $O$  附着于动平台,且动坐标系的 3 个坐标轴在运动过程中始终与静坐标系的 3 个坐标轴分别对应平行,如图 1 所示。图 1 中  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  分别为动坐标轴线方向的单位矢量,分支驱动螺旋  $\mathcal{S}_{ai}$  相对于动坐标系原点  $O$  的矢径为  $\mathbf{r}_i = [x_{ai}, y_{ai}, z_{ai}]^\text{T}$ ,各分支的主动螺旋  $\mathcal{S}_{1i}$  固定于静坐标系。

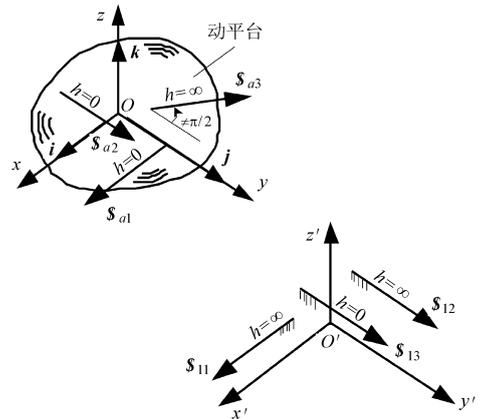


图 1 驱动螺旋和主动螺旋

Fig. 1 Actuation screw and actuated screw

根据前面分析知,正雅可比矩阵  $\mathbf{J}_{\text{dir}}$  只能为对角阵,因此  $\mathbf{J}_{\text{dir}}$  的第 1 行中仅第 1 个元素  $[\mathbf{J}_{\text{dir}}]_{11}$  应为非零常数,所以第 1 条分支中主动副施加在动平台上的驱动螺旋的形式为

$$\mathcal{S}_{a1} = [L_{a1}, 0, N_{a1}; P_{a1}, 0, R_{a1}]^\text{T} \quad (8)$$

$\mathcal{S}_{a1}$  是一个纯力螺旋,其作用是使动平台沿驱动螺旋方向  $\mathbf{s}_{a1} = [L_{a1}, 0, N_{a1}]^\text{T}$  移动。由于该分支仅对动平台沿  $x$  轴方向的移动提供驱动,所以有  $N_{a1} = 0$ ,因而式(8)可写为

$$\mathcal{S}_{a1} = [1, 0, 0; P_{a1}, 0, R_{a1}]^\text{T} \quad (9)$$

由于第 1 条分支运动链的驱动螺旋  $\mathcal{S}_{a1}$  轴线过

动坐标系中点 $[x_{a1}, y_{a1}, z_{a1}]^T$ , 通过计算可得 $P_{a1} = 0$ ,  $Q_{a1} = z_{a1} = 0$ ,  $R_{a1} = -y_{a1}$ 。因此, 第1条分支驱动螺旋的形式为

$$\mathcal{S}_{a1} = [1, 0, 0; 0, 0, -y_{a1}]^T \quad (10)$$

即驱动螺旋 $\mathcal{S}_{a1}$ 为过 $y$ 轴上点 $[0, y_{a1}, 0]^T$ 且平行于 $x$ 轴的零节距螺旋。换句话说, 驱动螺旋 $\mathcal{S}_{a1}$ 为与 $x$ 轴平行的纯力螺旋(图1)。

### 2.1.2 第1条分支主动螺旋 $\mathcal{S}_{11}$ 的确定

将式(10)代入逆雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{inv}$ 对角线上的第一个元素 $[\mathbf{J}_{inv}]_{11}$ , 得

$$[\mathbf{J}_{inv}]_{11} = \mathcal{S}_{a1} \circ \mathcal{S}_{11} = P_{11} - y_{a1} N_{11} \quad (11)$$

式中 $\mathcal{S}_{11}$ 为第1条分支的主动螺旋, 其表达式为

$$\mathcal{S}_{11} = [L_{11}, M_{11}, N_{11}; P_{11}, Q_{11}, R_{11}]^T \quad (12)$$

由于 $\mathcal{S}_{11}$ 固定于静坐标系, 即其方向矢量 $s_{11} = [L_{11}, M_{11}, N_{11}]^T$ 为常矢量, 而动坐标系 $Oxyz$ 相对于静坐标系 $O'x'y'z'$ 的位置时刻发生变化(尽管方向不变), 因此 $\mathcal{S}_{11}$ 在 $z'$ 轴的任何非零分量( $N_{11}$ )都会使得其对偶量在 $x'$ 轴上的分量( $P_{11}$ )为变量, 致使 $[\mathbf{J}_{inv}]_{11}$ 亦为变量, 所以要满足 $[\mathbf{J}_{inv}]_{11}$ 为常数, 必有 $N_{11} = 0$ 。

故第1条分支的主动螺旋 $\mathcal{S}_{11}$ 只能为2种形式, 即

$$\mathcal{S}_{11} = \begin{cases} [L_{11}, M_{11}, 0; P_{11}, Q_{11}, R_{11}]^T & (h=0) \\ [0, 0, 0; L_{11}, M_{11}, 0]^T & (h=\infty) \end{cases} \quad (13)$$

式中  $h$ ——螺旋节距

由式(13)可知, 主动螺旋 $\mathcal{S}_{11}$ 位于 $O'x'y'$ 平面内, 假定其过静坐标系上的点 $[x_{11}, y_{11}, 0]^T$ , 那么可得到 $P_{11} = 0$ ,  $Q_{11} = 0$ ,  $R_{11} = y_{11}L_{11} - x_{11}M_{11}$ 。

将式(10)和(13)代入式(3)有

$$[\mathbf{J}_{inv}]_{11} = \mathcal{S}_{a1} \circ \mathcal{S}_{11} = \begin{cases} 0 & (h=0) \\ L_{11} & (h=\infty) \end{cases} \quad (14)$$

由于逆雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{inv}$ 对角线上的元素只能为非零常数, 因此应将节距 $h=0$ 的主动螺旋舍去, 并且 $L_{11} \neq 0$ 。根据式(14)可知,  $[\mathbf{J}_{inv}]_{11}$ 的值与元素 $M_{11}$ 无关, 因此可令 $M_{11} = 0$ , 故有

$$\mathcal{S}_{11} = [0, 0, 0; 1, 0, 0]^T \quad (15)$$

即第1条分支的主动螺旋 $\mathcal{S}_{11}$ 为任意平行于 $x$ 轴的无穷大节距螺旋(图1), 这表明该分支的主动副为移动副, 且其移动方向与 $x$ 轴平行。

### 2.1.3 分支中其他可动非主动螺旋的确定

由于驱动螺旋 $\mathcal{S}_{a1}$ 与分支中除主动螺旋 $\mathcal{S}_{11}$ 外的其他所有运动螺旋的互易积恒等于零, 因此第1条分支中可动非主动螺旋的形式有以下3种情况:

(1) 平行于 $x$ 轴的零节距螺旋, 此类螺旋可直

接与 $\mathcal{S}_{11}$ 相连, 且这类螺旋数目至少为2, 最多为3。

(2) 垂直于 $x$ 轴的平面上的无穷大节距螺旋, 其数目最多为2, 且它们的方向互不平行, 可配置在分支中的任何位置。

(3) 与 $\mathcal{S}_{a1}$ 相交且平行于 $y$ 轴的零节距螺旋, 该螺旋可直接通过无穷大节距螺旋与动平台相连, 其数目有且仅有1个。

### 2.1.4 第1条分支运动链的型综合

由于并联机构动平台的运动输出特征矩阵是所有分支运动输出特征矩阵的交集, 即任何一条分支末端构件相对于初始构件的相对运动空间, 都应包含动平台相对于定平台的运动空间, 所以对于本文综合出的所有分支末端构件, 都必须包含有沿 $x$ 、 $y$ 轴方向的移动和绕 $y$ 轴的转动自由度。

根据螺旋的相关性可知, 空间无穷大节距螺旋的最大线性无关的数目为3, 空间平行的零节距螺旋的最大线性无关的数目也为3。按照分支连接度 $F_C$ 的不同可列举出所有符合要求的第1条分支运动链的结构形式(表1)。为了简化运动链的结构形式, 假定同一分支中相邻运动副的轴线相互平行或垂直。

表1 第1条分支运动链结构

Table 1 Structures of the first kinematic chain				
$F_C$	类型	序号	基本分支结构	含有多自由度运动副的分支结构
3	2P1R	1~3	$P_u P_v R_w$ $P_u R_v P_w$	$P_u C_v$
4	3P1R	4~9	$P_u P_v P_w R_v$ $P_u P_v R_v P_w$ $P_u P_w R_v P_v$ $P_u R_v P_v P_w$	$P_u C_v P_w$ $P_u P_w C_v$
	1P4R	10~13	$P_u R_u R_u R_u R_v$	$P_u R_u R_u U_{uv}$ $C_u R_u R_u R_v$ $C_u R_u U_{uv}$ $P_u P_n R_u U_{uv}$
5	2P3R	14~24	$P_u P_n R_u R_u R_v$ $P_u R_u P_n R_u R_v$ $P_u R_u R_u P_n R_v$ $P_u R_u R_u R_v P_n$	$P_u R_u R_u C_v$ $C_u R_u R_v P_n$ $C_u P_n R_u R_v$ $C_u R_u P_n R_v$ $C_u P_n U_{uv}$ $C_u R_u C_v$

表1中各条运动链的第1个运动副为主动副(运动副的排列顺序为自左至右), 若第1个运动副为C副, 则以C副的线性自由度为主动输入。下标字母 $u$ 、 $v$ 、 $w$ 表示运动副的移动方向或转动轴线方向, 其单位矢量分别为 $u$ 、 $v$ 、 $w$ 。对于下标为 $n$ 的移动副, 其移动方向为垂直于 $u$ 的任意方向, 但与相邻的运动副轴线保持平行或垂直。

令 $u = x$ ,  $v = y$ ,  $w = z$ , 则表1中的运动链即为向

动平台  $x$  轴方向移动提供直接驱动的第 1 条分支。

## 2.2 第 2 条分支运动链的型综合

### 2.2.1 第 2 条分支驱动螺旋 $\$_{a2}$ 的确定

假设机构第 2 条分支仅对动平台沿  $y$  轴方向的移动提供直接驱动。由于正雅可比矩阵  $J_{dir}$  的第 2 行中仅第 2 个元素  $[J_{dir}]_{22}$  为非零常数, 所以第 2 条分支的驱动螺旋  $\$_{a2}$  表示形式为

$$\$_{a2} = [0, M_{a2}, N_{a2}; P_{a2}, 0, R_{a2}]^T \quad (16)$$

同样, 由于该分支只对动平台沿  $y$  轴方向的移动提供直接驱动, 所以有  $N_{a2} = 0$ , 故而  $\$_{a2}$  又可写为

$$\$_{a2} = [0, 1, 0; P_{a2}, 0, R_{a2}]^T \quad (17)$$

设  $\$_{a2}$  过动坐标系  $Oxyz$  中的点  $[x_{a2}, y_{a2}, z_{a2}]^T$ , 则有  $P_{a2} = -z_{a2}$  和  $R_{a2} = x_{a2}$ , 即  $\$_{a2}$  过  $Oxz$  平面上的点  $[x_{a2}, 0, z_{a2}]^T$ , 所以式(17)又可变形为

$$\$_{a2} = [0, 1, 0; -z_{a2}, 0, x_{a2}]^T \quad (18)$$

因此, 第 2 条分支驱动螺旋  $\$_{a2}$  为过点  $[x_{a2}, 0, z_{a2}]^T$  且平行于  $y$  轴的零节距螺旋。

### 2.2.2 第 2 条分支主动螺旋 $\$_{12}$ 的确定

将式(18)代入逆雅可比矩阵  $J_{inv}$  对角线上的第 2 个元素, 得

$$[J_{inv}]_{22} = \$_{a2} \circ \$_{12} = Q_{12} - z_{a2}L_{12} + x_{a2}N_{12} \quad (19)$$

其中  $\$_{12}$  为第 2 条分支的主动螺旋, 且有

$$\$_{12} = [L_{12}, M_{12}, N_{12}; P_{12}, Q_{12}, R_{12}]^T \quad (20)$$

由于主动螺旋  $\$_{12}$  固定于静坐标系, 即其方向矢量  $s_{12} = [L_{12}, M_{12}, N_{12}]^T$  为常矢量,  $\$_{12}$  沿  $x$  和  $z$  轴方向上的任何非零分量 ( $L_{12}$  和  $N_{12}$ ) 都会使得其对偶量在  $y$  轴上的分量 ( $Q_{12}$ ) 为变量, 从而导致  $[J_{inv}]_{22}$  的值为变量。因此, 要保证  $[J_{inv}]_{22}$  为常数, 必满足条件  $L_{12} = 0$  和  $N_{12} = 0$ 。故主动螺旋  $\$_{12}$  的形式为

$$\$_{12} = \begin{cases} [0, 1, 0; P_{12}, 0, R_{12}]^T & (h = 0) \\ [0, 0, 0; 0, 1, 0]^T & (h = \infty) \end{cases} \quad (21)$$

即主动螺旋  $\$_{12}$  为平行于  $y$  轴的零节距螺旋或无穷大节距螺旋。

将式(18)和(21)代入逆雅可比矩阵  $J_{inv}$  对角线上的第 2 个元素, 得

$$[J_{inv}]_{22} = \$_{a2} \circ \$_{12} = \begin{cases} 0 & (h = 0) \\ 1 & (h = \infty) \end{cases} \quad (22)$$

由于  $[J_{inv}]_{22}$  应非零常数, 所以节距  $h = 0$  的螺旋不符合要求, 故第 2 条分支的主动螺旋  $\$_{12}$  只能为平行于  $y$  轴的无穷大节距螺旋。

### 2.2.3 分支中其他可动非主动螺旋的确定

同理, 根据互易积原理可确定出该分支中可动非主动螺旋的形式:

(1) 平行于  $y$  轴的零节距螺旋, 此类螺旋可直接与  $\$_{11}$  相连或通过无穷大节距螺旋与  $\$_{11}$  相连, 且

其数目至少有 1 个, 最多为 3 个。

(2) 垂直于  $y$  轴的平面上的无穷大节距螺旋, 可配置在分支中的任意位置, 其数目最多为 2。

### 2.2.4 第 2 条分支运动链的型综合

当分支中主动螺旋和可动非主动螺旋确定后, 按照分支连接度  $F_c$  的数目以及各类运动螺旋的最大线性无关数的不同, 可列举出该分支各种可能的运动链结构(表 2)。表 2 中各条运动链的第 1 个运动副为主动副, 若第 1 个运动副为 C 副, 则以 C 副的线性自由度为主动输入。当表 2 中各运动链的下标取  $v = y$  时即可得到第 2 条分支的运动链。

表 2 第 2 条分支运动链结构

Tab. 2 Structures of the second kinematic chain

$F_c$	类型	序号	基本支链结构	含有多自由度运动副的支链结构
3	2P1R	1 ~ 3	$P_v P_u R_v$ $P_v R_v P_u$	$C_v P_u$
		4 ~ 5	$P_v R_v R_v R_v$	$C_v R_v R_v$
4	2P2R	6 ~ 13	$P_v P_u R_v R_v$ $P_v R_v P_u R_v$ $P_v R_v R_v P_u$	$C_v P_u R_v$ $C_v R_v P_u$
		14 ~ 21	$P_v P_u P_u R_v$ $P_v P_u R_v P_u$ $P_v R_v P_u P_u$	$C_v P_u P_u$

## 2.3 第 3 条分支运动链的型综合

### 2.3.1 第 3 条分支驱动螺旋 $\$_{a3}$ 和主动螺旋 $\$_{13}$ 的确定

假设该分支运动链仅对动平台绕  $y$  轴方向的转动提供直接驱动, 因此该分支的驱动螺旋  $\$_{a3}$  应为 1 个纯力偶的形式, 且  $\$_{a3}$  的方向矢量  $s_{a3}$  在  $y$  轴上的分量不为零, 那么该分支驱动螺旋的表达式为

$$\$_{a3} = [0, 0, 0; L_{a3}, M_{a3}, N_{a3}]^T \quad (23)$$

$$\text{且有} \quad M_{a3} = s_{a3}^T \cdot j \neq 0 \quad (24)$$

式中  $j$ ——沿  $y$  轴方向的单位矢量

根据逆雅可比矩阵  $J_{inv}$  对角线上的第 3 个元素  $[J_{inv}]_{33}$  的计算公式有

$$[J_{inv}]_{33} = \$_{a3} \circ \$_{13} = s_{a3}^T \cdot s_{13} = L_{a3}L_{13} + M_{a3}M_{13} + N_{a3}N_{13} \quad (25)$$

式中  $\$_{13}$  为该分支的主动螺旋,  $s_{13}$  为其方向矢量, 且

$$\$_{13} = [L_{13}, M_{13}, N_{13}; P_{13}, Q_{13}, R_{13}]^T \quad (26)$$

由于  $[J_{inv}]_{33}$  为非零常数, 所以主动螺旋  $\$_{13}$  不能为无穷大节距螺旋, 同时  $s_{13}$  不能垂直于  $s_{a3}$ 。由于这里只考虑移动和转动两种基本运动副, 故  $\$_{13}$  只能为与  $\$_{a3}$  非垂直的零节距螺旋。

因为完全各向同性并联机构的输入-输出之间存在一一对应的线性映射关系, 故机构动平台绕  $y$  轴的输出角速度  $\omega_y$  与第 3 条分支中主动副的输入

速度  $\dot{q}_{13}$  之间的运动学关系可写为

$$\omega_y = c\dot{q}_{13} \quad (27)$$

式中  $c$ ——非零常数

联立方程(1)、(23)、(24)和(27),可得

$$c = \frac{\$_{a3}^{\circ} \$_{13}}{s_{a3}^T \cdot \mathbf{j}} = \frac{s_{a3}^T \cdot s_{13}}{s_{a3}^T \cdot \mathbf{j}} \quad (28)$$

由于主动螺旋  $\$_{13}$  固定于静坐标系,因此该螺旋的方向矢量  $s_{13}$  为常矢量,而  $\mathbf{j}$  也为常矢量,所以要使得  $c$  为常数,则可能存在以下两种情况:

(1)  $s_{a3}$  为常矢量

当  $s_{a3}$  为常矢量时,假设 1 个零节距螺旋  $\$_0$  直接与动平台相连,一方面要求该螺旋的轴线绕  $\mathbf{j}$  转动,另一方面又要求其轴线在整个运动过程中始终垂直于  $s_{a3}$ ,所以必有  $s_{a3} = \mathbf{j}$ 。

若零节距螺旋  $\$_0$  直接与该分支的主动螺旋  $\$_{13}$  相连,那么其轴线在绕  $s_{13}$  转动的同时,还要始终垂直于  $\mathbf{j}$ ,因此必定满足  $s_{13} = \mathbf{j}$ 。

综上所述,可得

$$s_{a3} = s_{13} = \mathbf{j} \quad (29)$$

将式(29)代入式(28),得  $c = 1$ ,所以第 3 条分支驱动螺旋  $\$_{a3}$  的形式为

$$\$_{a3} = [0, 0, 0; 0, 1, 0]^T \quad (30)$$

由式(30)可以看出,  $\$_{a3}$  为任意平行于  $y$  轴的无穷大节距螺旋,即该分支的主动螺旋仅对动平台施加了 1 个绕  $y$  轴方向转动的纯力偶矩。

(2)  $s_{13} = \mathbf{j}$

在这种情况下,无论  $s_{a3}$  为何矢量,只要满足条件  $s_{a3}$  不垂直于  $s_{13}$  (如图 1),都有  $c = 1$ 。

上述分析表明,第 1 种情况只是第 2 种情况的特例。一般情况下,  $s_{a3}$  并非为常矢量,但要满足条件  $s_{a3}^T s_{13} \neq 0$ 。因而主动螺旋  $\$_{13}$  的形式为

$$\$_{13} = [0, 1, 0; P_{13}, 0, R_{13}]^T \quad (31)$$

因此,  $\$_{13}$  为平行于  $y$  轴的零节距螺旋(图 1),即第 3 条分支的主动副应为轴线平行于  $y$  轴的 R 副。

### 2.3.2 分支中其他可动非主动螺旋的确定

当驱动螺旋  $\$_{a3}$  确定后,该分支中其他可动非主动螺旋即可确定,它们可能的形式为:

(1) 沿任意方向的无穷大节距螺旋,即任何线性无关的移动副,其数目最多为 3。

(2) 轴线与  $s_{a3}$  垂直的零节距螺旋。如果分支中零节距螺旋的数目为 2 或 3,它们的轴线必须相互平行,否则会出现惰性副。

### 2.3.3 第 3 条分支运动链的型综合

当分支主动螺旋和非主动螺旋的可能形式通过上述方法确定后,按照分支连接度  $F_c$  的不同,可列举出所有可行的支路运动链结构(表 3)。同样各条

运动链的第 1 个运动副为主动副,若第 1 个运动副为 C 副,则选取其转动自由度为主动输入。令表 3 中下标字母  $v = y$  即可得到机构的第 3 条分支运动链。

## 3 完全各向同性 2T1R 型并联机构型综合

当利用上述方法综合出空间 2T1R 型并联机构的 3 条分支运动链后,从表 1~3 中各取 1 条运动链,按照每条分支主动副轴线(或移动方向)的装配方位将动平台和静平台联接起来即可得到具有预期运动输出特性的 2T1R 型完全各向同性空间并联机构,机构的每条分支分别控制着动平台沿某一方向上的运动。由于机构动平台的输出运动是所有分支运动螺旋系的交集,所以必须保证 3 条分支运动螺旋系的交集为由两个分别沿  $x$ 、 $y$  轴方向的无穷大节距螺旋和一个平行于  $y$  轴的零节距螺旋组成的一个运动螺旋系。因此,对于一个 2T1R 型无奇异完全各向同性空间并联机构,其前两条分支中至少有一条分支的连接度为 3,而第 3 条分支可从表 3 中任取。

实际应用中,在满足机构运动学及其性能的基础上,应使机构的结构简单、紧凑,以减小机构所占用的空间,减少各分支间以及与动平台间的干涉现象发生,所以尽量使用构件数较少的分支运动链,并合理地调整各分支运动链的装配位置。对于本文综合出的完全各向同性并联机构的 3 条分支运动链的装配条件还有如下限制:前 2 条分支中最接近于动平台的 2 个 R 副的轴线平行或重合,第 3 条分支中最接近于动平台的 R 副的轴线垂直于  $y$  轴。图 2 给出综合所得的 4 种新型 2T1R 空间并联机器人机构。

## 4 机构运动输出特性和速度分析

以图 2a 机构为例,对其动平台的运动输出特性和速度作简要分析。

### 4.1 机构运动输出特性分析

图 2a 所示机构的 3 条分支运动链分别为  $P_x P_y R_y$ 、 $C_y R_y R_y$  和  $R_y R_u U_{uu} U_{uu}$ ,下标  $x$ 、 $y$ 、 $u$ 、 $w$  分别为相应运动副轴线在静坐标系  $Oxyz$  中的方向。根据螺旋理论可知,该机构的第 2 条分支的运动螺旋为

$$\begin{cases} \$_{21} = [0, 0, 0; 0, 1, 0]^T \\ \$_{22} = [0, 1, 0; 0, 0, 0]^T \\ \$_{23} = [0, 1, 0; a_{23}, 0, c_{23}]^T \\ \$_{24} = [0, 1, 0; a_{24}, 0, c_{24}]^T \end{cases} \quad (32)$$

表 3 第 3 条分支运动链结构

Tab. 3 Structures of the third kinematic chain

$F_c$	类型	序号	基本支链结构	含有多自由度运动副的支链结构
4	3P1R	1~2	$R_v P_v P_u P_w$	$C_v P_u P_w$
	1P4R	3~9	$R_v P_u R_u R_u R_u$ $R_v R_u P_u R_u R_u$ $R_v R_u R_u P_u R_u$ $R_v R_u R_u R_u P_u$	$R_v C_u R_u R_u$ $R_v R_u C_u R_u$ $R_v R_u R_u C_u$
5	2P3R	10~40	$R_v P_v P_w R_u R_u$ $R_v P_v R_u P_w R_u$ $R_v P_v R_u R_u P_w$ $R_v R_u R_u P_w P_v$ $R_v P_w R_u R_u P_v$ $R_v R_u P_w R_u P_v$ $R_v R_u P_w P_w R_u$ $R_v R_u P_w R_u P_u$	$C_v P_w R_u R_u$ $R_v P_w C_u R_u$ $C_v R_u P_w R_u$ $C_v R_u R_u P_w$ $R_v R_u C_u P_v$ $R_v R_u C_u P_v$ $R_v R_u P_w C_u$ $R_v C_u P_w R_u$ $C_v C_u R_u$ $C_v R_u C_u$
	0P6R	41~51	$R_v R_u R_u R_u R_u R_w$ $R_v R_u R_u R_w R_u R_u$ $R_v R_u R_u R_u R_u R_u$ $R_v R_w R_u R_u R_u R_u$ $R_v R_w R_u R_u R_u R_w$	$R_v R_u R_u U_{uw} R_w$ $R_v R_u U_{uw} R_w R_u$ $R_v R_u R_u R_w U_{uw}$ $R_v R_w U_{uw} R_u R_u$ $R_v R_u U_{uw} U_{uw}$ $R_v U_{uw} R_u U_{uw}$
6	1P5R	52~88	$R_v P_n R_u R_u R_w R_w$ $R_v R_u P_n R_u R_w R_w$ $R_v R_u R_u P_n R_w R_w$ $R_v R_u R_u R_w P_n R_w$ $R_v P_n R_u R_w R_w R_u$ $R_v P_n R_u R_w R_w R_u$ $R_v R_u P_n R_w R_w R_u$ $R_v R_u P_n R_w R_w R_u$ $R_v R_u R_w P_n U_{uw}$ $R_v R_u R_w C_w P_n$ $R_v P_n U_{uw} U_{uw}$ $R_v U_{uw} P_n U_{uw}$ $R_v C_u R_w U_{uw}$ $R_v R_u C_w U_{uw}$ $R_v U_{uw} C_w R_u$ $R_v U_{uw} R_w C_u$ $R_v U_{uw} C_w R_u$ $R_v C_u U_{uw} R_w$ $C_v R_u U_{uw} R_w$ $C_v R_u R_w U_{uw}$ $C_v U_{uw} R_w R_u$ $C_v U_{uw} U_{uw}$	$R_v C_u R_w R_w R_w$ $C_v R_u R_w R_w R_w$ $R_v P_n U_{uw} R_w$ $C_v R_u R_w R_w R_u$ $R_v P_n R_w R_w U_{uw}$ $R_v C_u R_w R_w R_u$ $R_v P_n U_{uw} R_w R_u$ $R_v C_u R_w R_w R_u$ $R_v R_u C_w R_w R_u$ $R_v R_u P_n R_w U_{uw}$ $R_v U_{uw} P_n R_w R_u$ $R_v U_{uw} R_w P_n R_u$ $R_v R_u R_w R_w C_u$ $R_v R_u R_w P_n U_{uw}$ $R_v R_u R_w C_w P_n$ $R_v P_n U_{uw} U_{uw}$ $R_v U_{uw} P_n U_{uw}$ $R_v C_u R_w U_{uw}$ $R_v R_u C_w U_{uw}$ $R_v U_{uw} C_w R_u$ $R_v U_{uw} R_w C_u$ $R_v U_{uw} C_w R_u$ $R_v C_u U_{uw} R_w$ $C_v R_u U_{uw} R_w$ $C_v R_u R_w U_{uw}$ $C_v U_{uw} R_w R_u$ $C_v U_{uw} U_{uw}$

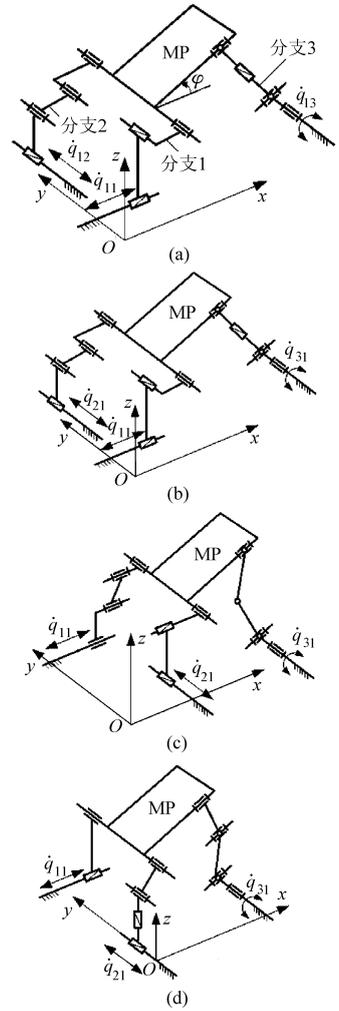


图 2 完全各向同性 2T1R 空间并联机器人机构

Fig. 2 Fully-isotropic 2T1R spatial parallel manipulators

- (a) PPR-CRR-RRUU (b) PPR-PRRR-RUPU
- (c) CRRR-PPR-RURU (d) PC-PPRR-RUUR

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{21}^r = [0, 0, 0; 1, 0, 0]^T \\ \mathcal{S}_{22}^r = [0, 0, 0; 0, 0, 1]^T \end{cases} \quad (33)$$

式(33)表明该分支的两个约束螺旋均为无穷大节距螺旋,因此它们分别约束了动平台绕  $x$  轴和  $z$  轴的转动自由度。

同理,可求出第 1 条分支的约束螺旋系

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{11}^r = [0, 0, 0; 1, 0, 0]^T \\ \mathcal{S}_{12}^r = [0, 0, 0; 0, 0, 1]^T \\ \mathcal{S}_{13}^r = [0, 0, 1; 0, -c_{13}, 0]^T \end{cases} \quad (34)$$

根据式(34)可知,第 1 条分支约束了动平台绕  $x$ 、 $z$  轴的转动自由度和沿  $z$  轴方向的移动自由度。

由于第 3 条分支为非冗余 6 自由度的运动链,故其对动平台不提供任何约束。因此,机构的前两条分支共同约束了动平台绕  $x$ 、 $z$  轴的转动自由度和沿  $z$  轴的移动自由度,故该机构动平台只能沿  $x$ 、 $y$  轴方向移动和绕  $y$  轴转动。由上述分析可知该机构为过约束机构,且其过约束数为 2。

式中  $\mathcal{S}_{ij}$  为第  $i$  条分支中第  $j$  个单自由度关节的单位运动螺旋; $a_{ij}$  和  $c_{ij}$  为第  $i$  条分支中第  $j$  个单自由度关节的位置参数。

由螺旋理论可求出第 2 条分支的反螺旋,即

由文献[15]知,并联机构的自由度计算公式为

$$F = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v + \zeta \quad (35)$$

式中  $F$ ——机构自由度数

$d$ ——机构阶数,对于空间机构  $d = 6$

$n$ ——机构构件数

$g$ ——机构运动副数

$f_i$ ——第  $i$  个运动副的自由度

$v$ ——过约束数

$\zeta$ ——局部自由度

对于图 2a 所示机构,  $d = 6, n = 9, g = 10, \sum f_i = 13, v = 2, \zeta = 0$ 。将上述数据代入式(35)得,  $F = 3$ 。

#### 4.2 机构速度分析

假定动坐标系  $Puvw$  的坐标原点  $P$  固结于前两条分支末端转动副的轴线上,如图 2a 所示,  $v$  轴与该转动副的轴线重合,  $u$  轴位于动平台上,  $w$  轴可根据右手准则确定。选取与动平台直接相连的 3 个运动副为主动副,对于第 2 条分支,以 C 副的线性输入为主动输入。图 2a 中  $\varphi$  为机构动平台绕  $y$  轴转动的姿态角,  $\dot{q}_{ij}$  为第  $j$  条分支主动关节的输入速度。根据机构的结构形式容易分析出,第 1、第 2 条分支分别单独控制了动平台沿  $x$  和  $y$  轴的移动输出,因此动平台沿这两坐标轴方向的速度表达式为

$$v_x = \dot{q}_{11} \quad (36)$$

$$v_y = \dot{q}_{12} \quad (37)$$

机构动平台的转动输出速度表达式很难直接通过观察看出,本文将利用螺旋理论对其求解。

通过将 U 副转换成两个轴线相互垂直的转动副,第 3 条分支的结构如图 3 所示。子坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  的坐标原点  $O_1$  在转动副 R31 和 R32 轴线

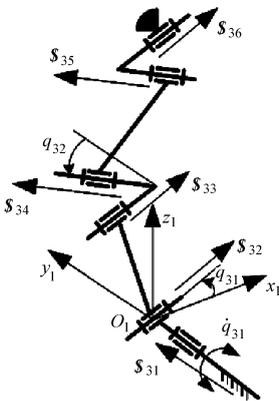


图 3 第 3 条分支结构示意图

Fig. 3 Structure of the third limb

的交点上,而其 3 条轴线分别对应平行于坐标系  $Oxyz$  坐标轴。  $q_{31}$  和  $q_{32}$  分别为转动副 R31 和 R32 绕各自轴线转过的角度。那么该分支中各运动副在子坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  下的运动螺旋可表示为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31} = [0, 1, 0; 0, 0, 0]^T \\ \mathcal{S}_{32} = [cq_{31}, 0, -sq_{31}; 0, 0, 0]^T \\ \mathcal{S}_{33} = [cq_{31}, 0, -sq_{31}; a_{33}, b_{33}, c_{33}]^T \\ \mathcal{S}_{34} = [sq_{31}cq_{32}, sq_{32}, cq_{31}cq_{32}; a_{34}, b_{34}, c_{34}]^T \\ \mathcal{S}_{35} = [sq_{31}cq_{32}, sq_{32}, cq_{31}cq_{32}; a_{35}, b_{35}, c_{35}]^T \\ \mathcal{S}_{36} = [cq_{31}, 0, -sq_{31}; a_{36}, b_{36}, c_{36}]^T \end{cases} \quad (38)$$

式中  $c, s$  分别表示方向余弦和正弦。

并联机器人机构动平台的瞬时运动可以通过其分支运动链的运动螺旋系表示,即

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^{F_i} \dot{q}_{ij} \mathcal{S}_{ij} \quad (39)$$

式中  $\mathbf{V}$ ——机构动平台的输出速度矢量

$\dot{q}_{ij}$ ——第  $i$  条分支中第  $j$  个单自由度关节的速度

$\mathcal{S}_{ij}$ ——相应单自由度关节的单位运动螺旋

$F_i$ ——第  $i$  条分支的连接度

对于图 2a 所示机构,若用其第 3 条分支驱动螺旋  $\mathcal{S}_{a3}$  (详见文献[16])与式(39)作互易积,有

$$\mathcal{S}_{a3}^\circ \mathbf{V} = \dot{q}_{31} \mathcal{S}_{a3}^\circ \mathcal{S}_{31} \quad (40)$$

式中  $\mathcal{S}_{31}$  为该分支中第 1 个关节的运动螺旋,由于该关节为主动副,所以其对应的运动螺旋即为主动螺旋;  $\mathbf{V} = [0, w_y, 0; v_x, v_y, 0]^T$ , 为动平台的输出速度矢量。因此,式(40)中最关键的问题是确定驱动螺旋  $\mathcal{S}_{a3}$ 。利用相关知识<sup>[16]</sup>可求出第 3 条分支的驱动螺旋为

$$\mathcal{S}_{a3} = [0, 0, 0; sq_{31}sq_{32}, cq_{32}, cq_{31}sq_{32}]^T \quad (41)$$

其方向垂直于 U 副的两个轴线所确定的平面。

将以上各矢量  $\mathcal{S}_{a3}$ 、 $\mathbf{V}$  和  $\mathcal{S}_{31}$  代入式(40),并进一步整理得

$$\omega_y = \dot{q}_{31} \quad (42)$$

至此,该机构的速度方程全部求出,进一步将 3 个速度方程整理成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{11} \\ \dot{q}_{21} \\ \dot{q}_{31} \end{bmatrix} \quad (43)$$

由式(43)可以看出,该机构的速度雅可比矩阵为单位阵,因此运动条件数在整个工作空间内恒等于 1,即该机构为无奇异完全各向同性并联机构,从而验证了提出的型综合方法的正确性。

#### 4.3 应用实例

图 2a 所示机构可作为工业坐标测量机的末端执行机构。将测量探头安装在机构矩形动平台的中心位置,其前 2 条分支的线性输入选取直线伺服电

动机控制,第 3 条分支的转动输入则选取电动机带动的减速器控制。当机构的 3 个驱动器工作时,将带动平台沿  $x$ 、 $y$  轴方向移动和绕  $y$  轴转动。由于测量探头安装于动平台的中心位置,所以当动平台绕  $y$  轴转动的同时,也使得测量探头在  $z$  轴方向产生一定的位移,从而可实现坐标测量机的空间三维移动。另外,由于机构动平台具有转动自由度,因此该坐标测量机可以方便地实现多角度的测量作业。

## 5 结束语

型综合是并联机器人机构设计开发过程中最关键和最困难的一个环节。本文基于互易螺旋理论提出了 2T1R 型无奇异完全各向同性空间并联机器人机构型综合的系统方法,综合出多种新型机构。利用螺旋理论对综合出的一种机构进行了运动学分析,验证了所提出型综合方法的正确性。同时给出了此类机构在工业上的一种应用实例。

## 参 考 文 献

- 1 Heaa-Coelho T A. Topological synthesis of a parallel wrist mechanism [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2006, 128(1): 230 ~ 235.
- 2 Jin Q, Yang T L. Theory for topology synthesis of parallel manipulators and its application to three-dimension-translation parallel manipulators [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2004, 126(4): 625 ~ 639.
- 3 韩亚丽, 马履中, 杨廷力, 等. 基于 VB 编程的并联机器人机构型综合研究[J]. *农业机械学报*, 2007, 38(5): 139 ~ 142.  
Han Yali, Ma Lüzhong, Yang Tingli, et al. Structural synthesis study on paralleled robot mechanism by visual basic [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2007, 38(5): 139 ~ 142. (in Chinese)
- 4 Hervé J M. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, 34(5): 719 ~ 730.
- 5 Lee C-C, Hervé J M. Translational parallel manipulators with doubly planar limbs [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41(4): 433 ~ 455.
- 6 Kong X W, Gosselin C M. Type synthesis of 3-Dof PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2005, 127(6): 1113 ~ 1121.
- 7 Portman V T, Sandler B-Z, Zahavi E. Rigid 6-Dof parallel platform for precision 3-D micromanipulation [J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2001, 41(9): 1229 ~ 1250.
- 8 Heaa-Coelho T A. Topological synthesis of a parallel wrist mechanism [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2006, 128(1): 230 ~ 235.
- 9 吴鑫, 陈美丽, 张彦斌. 2T1R 并联机构位置及奇异性分析[J]. *农业机械学报*, 2010, 41(2): 208 ~ 213.  
Wu Xin, Chen Meili, Zhang Yanbin. Analysis of position and singularity of a parallel mechanism with three degrees of freedom [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2010, 41(2): 208 ~ 213. (in Chinese)
- 10 Refaat S, Hervé J M. Asymmetrical three-dofs rotational-translational parallel-kinematics mechanisms based on Lie group theory [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2006, 25(3): 550 ~ 558.
- 11 Zhang Y, Liu H, Wu X. Kinematics analysis of a novel parallel manipulator [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(9): 1648 ~ 1657.
- 12 Gogu G. Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2004, 23(6): 1021 ~ 1039.
- 13 Carricato M. Fully-isotropic four degrees-of-freedom parallel mechanisms for Schöönflies motion [J]. *International Journal of Robotic Research*, 2005, 24(5): 397 ~ 414.
- 14 张彦斌, 刘宏昭, 吴鑫. 基于互易螺旋理论的无奇异完全各向同性移动并联机构型综合[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(10): 83 ~ 88.  
Zhang Yanbin, Liu Hongzhao, Wu Xin. Type synthesis of non-singular fully-isotropic translational parallel mechanisms based on theory of reciprocal screw [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(10): 83 ~ 88. (in Chinese)
- 15 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社, 2006.
- 16 原大宇, 张彦斌, 刘宏昭. 3 自由度空间并联机器人机构设计与分析[J]. *农业机械学报*, 2009, 40(11): 208 ~ 211.  
Yuan Daning, Zhang Yanbin, Liu Hongzhao. Design and analysis of a 3-DOF spatial parallel robotic mechanism [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2009, 40(11): 208 ~ 211. (in Chinese)