

## 圆管表面斜裂纹应力强度因子和临界裂纹长度仿真分析\*

朱命怡<sup>1</sup> 李成<sup>2</sup> 铁瑛<sup>2</sup>

(1. 河南机电高等专科学校汽车系, 新乡 450002; 2. 郑州大学机械工程学院, 郑州 450001)

**【摘要】** 针对圆管表面斜裂纹,建立基于弹性断裂理论和复变函数理论的计算模型。研究圆管表面斜裂纹发生扩展时临界状态所对应的应力强度因子和裂纹临界尺寸在各种相关因素影响下的变化规律。以 I、II 型复合裂纹为例,采用应变能密度理论对其进行了分析。对开裂角、裂纹所处角度及裂纹的几何尺寸等因素的影响进行仿真计算。得到裂纹所处角度对复合型裂纹两个应力强度因子影响的曲线,并对其影响的程度进行了比较。另外,对裂纹所处角度和开裂角对临界裂纹长度的影响进行了仿真分析。结果表明:随着裂纹所处角度的增加,两个应力强度因子( $K_I$ 、 $K_{II}$ )的最大和最小值是相同的,但趋势相反。并且对于 I 型裂纹,在  $\beta = 0$  和  $\beta = 2\pi$  的地方,其应力强度因子为零。

**关键词:** 表面斜裂纹 应力强度因子 临界裂纹长度 应变能密度 复变函数

**中图分类号:** O346.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2010)07-0210-04

## Simulation of Stress Intensity Factors and Critical Crack Length of Surface Oblique Crack on Round Tube

Zhu Mingyi<sup>1</sup> Li Cheng<sup>2</sup> Tie Ying<sup>2</sup>

(1. Department of Automobile, Henan Mechanical and Electrical Engineering College, Xinxiang 450002, China

2. School of Mechanical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

### Abstract

Calculation models were established based on the elastic fracture theory and complex function theory for the surface oblique crack on round tube. Change in stress intensity factors and critical crack length were investigated when surface oblique crack on round tube developing propagation considering different influencing factors. Take crack type-I and type-II for example, by using the strain energy density theory, a complete analysis was performed. The influence of crack initiation angle, crack angle and size on the stress intensity factors was calculated. The influence curves of crack angle on two stress intensity factors of the mixed-mode crack were obtained. Then, the influence extent was compared. Moreover, the complete analysis on the influence which cracked initiation angle, crack angle on the critical crack length was performed. The results showed that with the increase of the crack angle, the maximal and minimal values of the two stress intensity factors ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ) were same, however, the tendency was opposite. Moreover, to type-I crack, the stress intensity factors on the position of  $\beta = 0$  and  $\beta = 2\pi$  were equal to zero.

**Key words** Surface oblique crack, Stress intensity factor, Critical crack length, Strain energy density, Complex function

### 引言

近几十年来,表面裂纹得到了深入研究,大量的

研究成果已经大大地扩展了表面裂纹的研究领域<sup>[1-3]</sup>。但是已有的文献主要对各种情况已知时的应力强度因子进行解析计算,而对各种因素对应力

强度因子的影响的解析分析研究较少。关于这方面的研究主要是用实验方法和有限元法以及边界元法来进行<sup>[4-5]</sup>。但用有限元法对裂纹进行分析,由于裂纹尖端存在奇异单元,所得到的结果往往误差较大<sup>[6-7]</sup>。

本文以裂纹所处位置不对称的 I、II 型复合裂纹为例,对圆管表面斜裂纹进行讨论。采用应变能密度理论,建立基于弹性断裂理论和复变函数理论的计算模型。对所研究的圆管表面斜裂纹尖端应力强度因子进行仿真分析。研究圆管表面斜裂纹发生扩展时的临界状态所对应的应力强度因子和裂纹的临界尺寸在各种相关因素影响下的变化规律。并对开裂角、裂纹所处角度和开裂角对临界裂纹长度的影响进行仿真分析。

## 1 应变能密度理论

对于复合型裂纹,目前在实际工程应用中被广泛采用的断裂判据之一是应变能密度理论。

在工程上常见的管类构件裂纹并不是贯穿裂纹,而是在工件表面有一些非贯穿的浅裂纹。这种情况下应力强度因子的确定是断裂力学中的重要问题之一,因为它是结构安全评价的重要指标之一。对圆管表面斜裂纹这类复合型裂纹进行分析,借助复变函数

$$\begin{cases} \Phi(z) = Az^\lambda \\ \Psi(z) = Bz^\lambda \end{cases} \quad (1)$$

式中  $A, B$  为复常数,由边界条件确定。 $\lambda$  是大于零的实常数。

由式(1)并根据弹性理论

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi + i\tau_\varphi &= \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\Phi''(z) + \\ \Psi'(z)\frac{z}{z} &= A\lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\varphi} + \overline{A\lambda r^{\lambda-1} e^{-i(\lambda-1)\varphi}} + \\ &A\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\varphi} + B\lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda+1)\varphi} \end{aligned} \quad (2)$$

沿裂纹的边界  $\varphi = \pm\pi$ , 有以下条件

$$\begin{cases} A\lambda e^{-i\lambda\pi} + \overline{A\lambda e^{i\lambda\pi}} + B\lambda e^{i\lambda\pi} = 0 \\ A\lambda e^{i\lambda\pi} + \overline{A\lambda e^{-i\lambda\pi}} + B\lambda e^{-i\lambda\pi} = 0 \\ A\lambda e^{-i\lambda\pi} + \overline{A\lambda e^{i\lambda\pi}} + \overline{B\lambda e^{-i\lambda\pi}} = 0 \\ A\lambda e^{i\lambda\pi} + \overline{A\lambda e^{-i\lambda\pi}} + \overline{B\lambda e^{i\lambda\pi}} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

对于 I、II 型复合裂纹,其裂纹尖端应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I (3 - \cos\varphi) \cos \frac{\varphi}{2} + \right. \\ &\left. K_{II} (3\cos\varphi - 1) \sin \frac{\varphi}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} [K_I (1 + \cos\varphi) - 3K_{II} \sin\varphi]$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} [K_I \sin\varphi + K_{II} (3\cos\varphi - 1)] \quad (4)$$

所谓应变能密度理论,它是基于局部应变能密度场断裂概念的复合型判据。认为复合型裂纹扩展的临界条件取决于裂纹尖端区的能量状态和材料性能。

在弹性条件下,微元体的应变能为

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \\ &\frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \\ &\frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ——3 个方向的正应力

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ——3 个方向的剪应力

$E$ ——材料弹性模量

$G$ ——材料剪切模量  $\nu$ ——泊松系数

将式(4)代入式(5)可得到应变能密度

$$H = \frac{1}{r} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2) \quad (6)$$

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2 \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{16\pi G} (1 + \cos\theta) (k - \cos\theta) \\ a_{12} = \frac{1}{16\pi G} \sin\theta (2\cos\theta - k + 1) \\ a_{22} = \frac{1}{16\pi G} [(k+1)(1 - \cos\theta) + \\ (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)] \\ a_{33} = \frac{1}{4\pi G} \end{cases}$$

$S$  就是应变能密度因子,它表示裂纹尖端应变能密度场的强弱程度。式中  $k$  取不同的值时,对应平面应力或平面应变问题。

## 2 表面斜裂纹应力强度因子的仿真分析

考虑一个带有表面斜裂纹的圆管,所受外荷载如图 1 所示。

图中既是一个 I-II 型复合裂纹问题( $a$  为裂纹长度、 $\beta$  裂纹所处角度、 $\theta$  裂纹张开角),其临界扩展时的裂纹尺寸和应力强度因子等可用应变能密度因子理论确定。整个的分析过程前边已经给出。对于本文所要研究的问题,其 I 型、II 型应力强度因子为

$$K_I = \tau \sqrt{\pi a} \sin(2\beta) \quad (8)$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \cos(2\beta) \quad (9)$$

式中  $\tau$ ——圆管所受扭矩(图 1)所引起的裂纹周围的剪应力

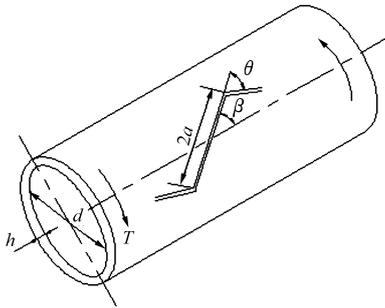


图1 带有表面斜裂纹的圆管

Fig. 1 Round tube with surface oblique crack

根据应变能密度理论,将式(8)、(9)代入式(7)

得

$$\frac{16G}{a}S = (3 - 4\nu - \cos\theta)(1 + \cos\theta)\sigma_y^2 + 4\sin\theta[\cos\theta - (1 - 2\nu)]\sigma_y\tau_{xy} + 4(1 - \nu) \cdot (1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)\tau_{xy}^2 \quad (10)$$

由式(10)即可对不同因素对裂纹尺寸的影响进行分析。对于不同因素的影响,由解析表达式,可以对扩展时的临界裂纹尺寸进行全面的仿真计算,其结果如图2~4所示。

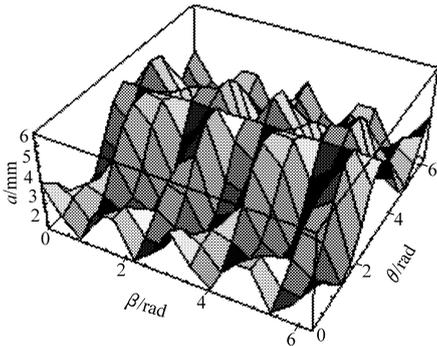


图2 裂纹的尺寸与裂纹所处位置及开裂角之间的关系

Fig. 2 Relationship between size of crack, position of crack and opening angle

图3 裂纹的尺寸与外荷载及开裂角之间的关系

Fig. 3 Relationship between size of crack, external load and opening angle

由图2和3可以看出裂纹的大小随着裂纹所处位置及开裂角变化、外荷载及开裂角变化、外荷载及裂纹所处位置变化的情况。裂纹尺寸,随着裂纹所

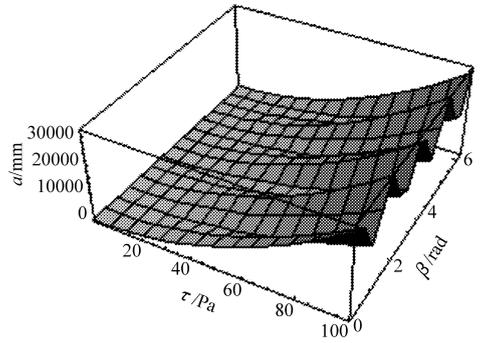


图4 裂纹的尺寸与外荷载及裂纹所处位置之间的关系

Fig. 4 Relationship between size of crack, external load and position of crack

处角度和开裂角呈周期变化,在一定范围内,随着裂纹所处角度和开裂角增大,裂纹也增大、且趋势较明显。当外荷载增大时,裂纹也随之增大。当外荷载一定时,由图2可以看出,在 $0 \sim \pi$ 范围内,裂纹尺寸随着开裂角的增加而增大。当开裂角为 $\pi$ 时,裂纹尺寸达到最大。由图4可以看出,在 $0 \sim \frac{\pi}{4}$ 范围内,当外荷载一定时,裂纹尺寸随着裂纹所处角度的增加而减小。当裂纹所处角度在 $\frac{\pi}{4}$ 附近,裂纹尺寸达到最小。

由式(8)、(9)可对外荷载及裂纹所处角度对应力强度因子的影响进行较全面的仿真分析,结果如图5~6所示。

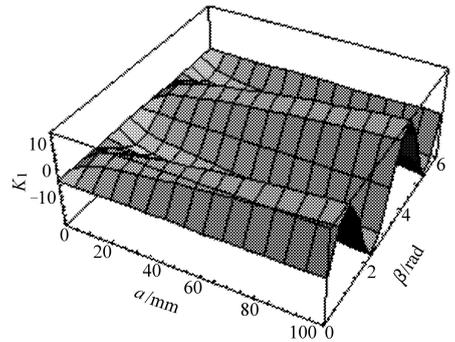


图5 应力强度因子( $K_I$ )与裂纹所处位置及裂纹尺寸之间的关系

Fig. 5 Relationship between stress intensity factor  $K_I$ , position of crack and size of crack

由图5可以看出应力强度因子( $K_I$ )随着裂纹所处位置及裂纹尺寸变化的情况。在一定取值范围内,当裂纹尺寸增大时,应力强度因子也随之增加。但随着裂纹所处角度的增加,应力强度因子显著增大。可以看出,当裂纹尺寸一定时,裂纹强度因子随着裂纹所处角度呈周期变化,在 $0 \sim \frac{\pi}{4}$ 范围内,应力强度因子随着裂纹所处角度的增加而增大。当裂纹

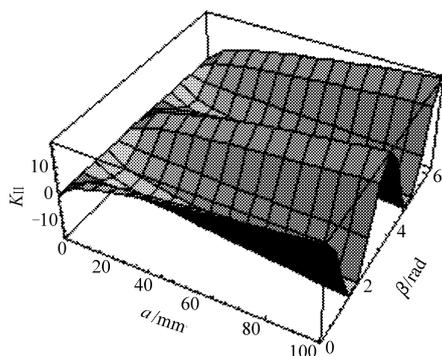


图6 应力强度因子( $K_{II}$ )与裂纹所处位置及裂纹尺寸之间的关系

Fig.6 Relationship between stress intensity factor  $K_{II}$ , position of crack and size of crack

所处角度增大到 $\frac{\pi}{4}$ 时,应力强度因子达到最大。当应力强度因子达到其临界值时,就导致材料破坏。由图6可以看出应力强度因子( $K_{II}$ )随着裂纹所处位置及裂纹尺寸变化的情况。在一定取值范围内,当裂纹尺寸增大时,应力强度因子也随之增加。当裂纹尺寸一定时,裂纹强度因子随着裂纹所处角度呈周期变化,在 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 范围内,应力强度因子随着裂纹所处角度的增加而减小。当裂纹所处角度增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时,应力强度因子达到最小。

通过以上的分析可以对I型和II型同时存在的复合裂纹的两个应力强度因子进行比较,结果如图7所示。

图7给出了I、II型复合裂纹两个应力强度因子随裂纹所处角度变化的情况。由图中可以看出,随着裂纹所处角度的增加,两个应力强度因子( $K_I$ 、 $K_{II}$ )的最大和最小值是相同的,但趋势相反。并且

对于I型裂纹,在 $\beta=0$ 和 $\beta=2\pi$ 的地方,其应力强度因子为零。

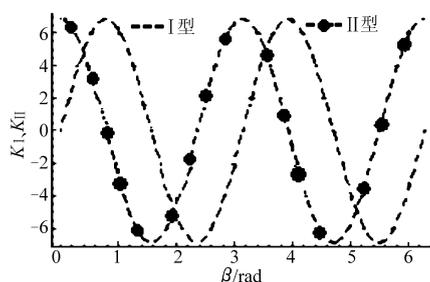


图7 I、II型复合裂纹两个应力强度因子与裂纹所处角度之间的关系比较

Fig.7 Comparison of relationship between stress intensity factor and position angle of crack for types I, II mixed mode crack

### 3 结论

(1)基于弹性断裂理论和复变函数理论的圆管表面斜裂纹裂纹尺寸和应力强度因子的计算模型,研究复合型裂纹发生扩展时的开裂角、临界裂纹长度在各种相关因素影响下的变化规律。并由所建立的计算模型,对复合裂纹尖端应力强度因子进行了仿真分析。

(2)研究结果表明在 $0 \sim \pi$ 范围内,裂纹尺寸随着开裂角的增加而增大。当开裂角为 $\pi$ 时,裂纹尺寸达到最大。在 $0 \sim \pi/4$ 范围内,当外荷载一定时,裂纹尺寸随着裂纹所处角度的增加而减小。当裂纹所处角度在 $\pi/4$ 附近,裂纹尺寸达到最小。

(3)随着裂纹所处角度的增加,两个应力强度因子( $K_I$ 、 $K_{II}$ )的最大和最小值是相同的,但趋势相反。并且对于I型裂纹,在 $\beta=0$ 和 $\beta=2\pi$ 处,其应力强度因子为零。

### 参 考 文 献

- 1 黄小平,崔维成,石德新. 潜艇锥柱结合壳焊趾表面裂纹疲劳寿命计算[J]. 船舶力学, 2002,6(4):62~68.  
Huang Xiaoping, Cui Weicheng, Shi Dexin. Calculation of fatigue life of surface cracks at weld toe of submarine cone-cylinder shell[J]. Journal of Ship Mechanics, 2002,6(4):62~68. (in Chinese)
- 2 卢炎麟,张淑佳,俞志清. 焊趾表面裂纹应力强度因子计算的基本模式法[J]. 应用力学学报,1998,15(4):73~81.  
Lu Yanlin, Zhang Shujia, Yu Zhiqing. Elementary modes method for evaluating SIFs along fronts of surface cracks at weld toes[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1998,15(4):73~81. (in Chinese)
- 3 李成,常向前,郑艳萍. 拉扭组合轴圆周表面裂纹应力强度因子仿真[J]. 农业机械学报,2008,39(2):167~169.  
Li Cheng, Chang Xiangqian, Zheng Yanping. Simulation on stress intensity factor of circumference surface crack in the axis under pulling force and torque [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(2): 167~169. (in Chinese)
- 4 刘荣佩. 弯扭组合轴表面裂纹应力强度因子修正系数的光弹性确定[J]. 机械强度,1997,19(2):76~80.  
Liu Rongpei. Photo-elastic determination for the correction coefficient of SIF of the surface crack of a shaft subjected to momene and torsional loading [J]. Journal of Mechanical Strength, 1997, 19 (2):76~80. (in Chinese)

墨层使树脂结合剂受热被蚀除。但图 5b 所示的砂轮表面热影响区域的面积明显大于图 5a 所示的砂轮表面热影响区域。这说明脉冲宽度的大小影响单个脉冲放电能量,进而影响单位时间砂轮材料的蚀除量。但由于在修整时砂轮以一定的速度运动,因此脉冲宽度对修整区域的最高温度值影响不明显,脉冲宽度的加大没有明显使金刚石磨粒发生氧化反

应,失去原有的形状特征。

### 3 结论

(1) 提出的树脂结合剂砂轮表面涂覆一层辅助放电材料后再进行表面放电修整的技术方案是可行的,辅助放电材料附近的树脂结合剂能吸收足够热量发生碳化分解,使金刚石磨粒露出形成一定的容屑空间。

(2) 峰值电流  $i_e$  是影响单个脉冲放电能量和砂轮表面修整区域温度场的重要因素;随着峰值电流的增大,修整区域温度场的最高温度也逐渐增大。适合修整树脂结合剂金刚石砂轮的放电峰值电流  $i_e$  不高于 3 A。

(3) 被修整砂轮以一定速度运动时,脉冲宽度对修整区域的最高温度值影响不明显,但影响单位时间砂轮材料的蚀除量。

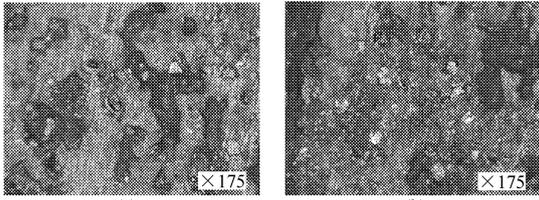


图 5 雾状乳化液中电火花放电修整后树脂结合剂金刚石砂轮表面形貌( $i_e = 1 \text{ A}$ ,  $T = 10 \text{ min}$ )

Fig. 5 Resin-bonded diamond wheel surface topographies after dressing( $i_e = 1 \text{ A}$ ,  $T = 10 \text{ min}$ )

(a)  $t_e = 10 \mu\text{s}$  (b)  $t_e = 20 \mu\text{s}$

### 参 考 文 献

- 1 滕燕,盖玉先,董申. 超精密磨削中的超硬砂轮修整技术[J]. 航空精密制造技术,2000,36(1):17~20.  
Teng Yan, Gai Yuxian, Dong Shen. Super-abrasive grinding wheel dressing for ultra-precision grinding [J]. Aviation Precision Manufacturing Technology, 2000,36(1):17~20. (in Chinese)
- 2 Ortega N, Sanchez J A, Aranceta J, et al. Optimisation of grit protrusion in the electro-discharge dressing process of large grit size CBN grinding wheels [J]. Journal of Materials Processing Technology, 2004, 149(1~3):524~529.
- 3 蔡兰蓉. 雾状介质中放电修整金刚石砂轮技术及机理研究[D]. 上海:上海交通大学,2008.  
Cai Lanrong. Research on technology and it's mechanism of mist-jetting electrical discharge dressing diamond wheels [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2008. (in Chinese)
- 4 Kunieda M, Yoshida M, Taniuchi N. Electrical discharge machining in gas[J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 1997, 46(1):143~146.
- 5 Suzuki K, Uematsu T, Nakagawa T. On-machine truing/dressing of metal bond grinding wheels by electro-discharge machining [J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 1987,36(1):115~118.

(上接第 213 页)

- 5 刘云忠. 边界元法计算厚板表面裂纹问题的应力强度因子[J]. 固体火箭技术,1996,19(3):64~70.  
Liu Yunzhong. Calculation for stress intensity factor of thick plate with cracks using boundary element method [J]. Journal of Solid Rocket Technology, 1996,19(3):64~70. (in Chinese)
- 6 Gross D. Bruchmechanik[M]. Berlin:Springer Verlag, 1996.
- 7 张伟,孙波. 自紧厚壁筒表面裂纹的应力强度因子研究[J]. 船舶力学,2000,4(4):43~47.  
Zhang Wei, Sun Bo. Calculation of stress intensity factor about an autofrettage thick-walled cylinder with an internal surface crack [J]. Journal of Ship Mechanics, 2000,4(4):43~47. (in Chinese)