DOI:10.3969/j.issn.1000-1298.2010.05.042

基于正交标架矢量函数的涡旋机械集成型线研究*

刘 涛[1] 芮执元[1] 邬再新[2] 胡赤兵[1]

(1. 兰州理工大学数字制造技术与应用省部共建教育部重点实验室，兰州 730050；
2. 兰州理工大学机电工程学院，兰州 730050)

【摘要】 基于正交标架矢量函数理论,建立了满足条件的型线方程矢量函数通用表达式。深入研究了涡旋型线的啮合条件,阐述了构成涡旋型线所必须满足的基本啮合条件。从型线的笛卡尔坐标方程出发,以切向角函数集成形式表示曲率半径,推导出了曲率半径函数表示的型线微分方程。以4种典型型线为例,确定了曲率半径函数系数与广义展成半径和广义基圆半径之间的对应关系。示例给出了正三角形渐开线型线的曲率半径函数微分方程。以切向角函数表示的涡旋集成型线不但能涵盖现有型线种类,而且通过对切向角级数系数的优化和控制可构造性能更为优良的型线类型。

关键词: 涡旋型线 正交标架 矢量函数 曲率半径 集成

中图分类号: TH455 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000-1298(2010)05-0209-04

Integration of Profile for Scroll Fluid Machine Based on Vector Function of Orthogonal Frame

Liu Tao[1] Rui Zhiyuan[1] Wu Zaixin[2] Hu Chibing[1]

(1. *Key Laboratory of Digital Manufacturing Technology and Application*, *Ministry of Education*, *Lanzhou University of Technology*, *Lanzhou* 730050, *China*
2. *School of Mechanical and Electronical Engineering*, *Lanzhou University of Technology*, *Lanzhou* 730050, *China*)

Abstract

Based on the theory of orthogonal frame, a general equation in form of vector function was established for scroll profile. Engagement condition of meshed profiles was derived. According to the parameter equation of Cartesian coordinate, the function of curvature radius could be expressed by integration of tangential angle. Curvature radius function based on differential equation of profile was deduced. Furthermore, demonstrated by four typical profiles, the corresponding relation among radius of curvature, general generating radius and general basic radius was determined. The differential equation for the involute of a regular triangle was demonstrated in form of function of radius of curvature. The integration profile could not only cover the existed profiles, but also be used to optimize properties of these profiles by controlling coefficients of series of tangential angles. The conclusions could be applied in flexible design of scroll fluid machine.

Key words Scroll profile, Orthogonal frame, Vector function, Radius of curvature, Integration

引言

涡旋机械开发设计中遇到的一个关键问题是涡旋型线的设计,它对涡旋压缩机性能的影响至关重要[1~4]。良好的型线应使压缩机具有高效、低噪、质轻,易于加工和维护等性能[5~6]。以共轭曲线啮合和型腔容积变化为工作原理的涡旋压缩理论被世界各国研究人员广泛研究,并应用在涡旋压缩机的设

收稿日期: 2009-03-17 修回日期: 2009-07-18

* 国家自然科学基金资助项目(50965011)、甘肃省自然科学基金资助项目(0710RJZA061)和高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20050731002)

作者简介: 刘涛,教授,博士,主要从事机械设计制造及其自动化研究,E-mail: liutao1971@lut.cn

计制造中。

目前在涡旋压缩机型线方面进行的广泛研究，尚有待进一步完善。在建模方面若所建立的型线模型过分依赖于具体的型线方程，将造成一种型线对应一种模型、一种映射的局面，使建模不断重复。其次，因模型的针对性过强，所得结论缺少普遍性和通用性，不利于柔性化设计。

在对国内外现有涡旋型线生成过程研究的基础上，本文提出一种基于正交标架矢量函数涡旋集成型线。根据涡旋型线的广义啮合理论，详细推导啮合条件，得出切向角曲率半径函数形式的涡旋型线方程和切向角参数方程。并研究涡旋型线的共轭型线，为涡旋机械的型线设计和优化提供新的思路。

1 正交标架矢量函数

机械工程的研究对象都是有形的实体，因而它的各个领域都有微分几何的研究对象——曲线与曲面的有关问题。如图1所示，设直角坐标系$\{O,x,y,z\}$的标架[7]为$\{\boldsymbol{O},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，当回转轴为$z$轴，转角为$\theta$时，可以实现$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$绕$z$轴的回转

$$\boldsymbol{B}(\theta)\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{B}(\theta)\boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{bmatrix} \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{B}(\theta)$——回转群

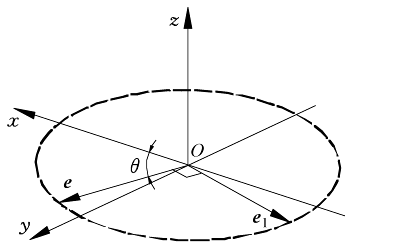

图1 正交矢量函数

Fig. 1 Orthogonal vector function

定义

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}(\theta)=\boldsymbol{B}(\theta)\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{e}_1(\theta)=\boldsymbol{B}(\theta)\boldsymbol{j}\end{cases} \tag{3}$$

为正交矢量函数。

显然，$\boldsymbol{e}_1(\theta)=\boldsymbol{e}\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\boldsymbol{e}(\theta)$与$\boldsymbol{e}_1(\theta)$正交，当$\theta$连续变化时，它们的矢端轨迹为$xOy$平面内的单位圆。

2 涡旋型线的啮合条件

过平面曲线上的任一个给定点B，都有正交的单位切向量$\boldsymbol{\alpha}$与单位法向量$\boldsymbol{\beta}$，如图2所示，在B点处建立Frenet活动标架，并使正交矢量函数分别与$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$方向平行，用活动的Frenet标架取代固定的笛卡尔直角坐标系，这样基圆渐开线方程可表示为

$$\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}(\varphi)-a\varphi\boldsymbol{e}_1(\varphi) \tag{4}$$

式中 a——基圆半径

φ——切向角，即切向量与x轴的夹角

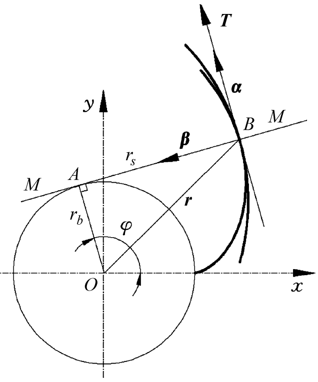

图2 涡旋型线

Fig. 2 Schematic of scroll profile

如果曲线型线满足正定性条件，其内、外法线等距线不交叉，壁厚非负；且曲线上各点的极径须随极角的增大而增大；能形成一定的回转圈数，各点法向角呈周期性变化，则这类曲线也可作为涡旋型线[4]。仿照基圆渐开线方程(4)，型线方程的矢量函数通用表达式可以写成

$$\boldsymbol{r}=r_b\boldsymbol{e}(\varphi)-r_s\boldsymbol{e}_1(\varphi) \tag{5}$$

式中 r_b——广义基圆半径

r_s——广义展成半径

由于

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}=\boldsymbol{e}_1(\varphi)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}=-\boldsymbol{e}(\varphi)\end{cases} \tag{6}$$

对式(5)方程两边求导，得

$$\boldsymbol{T}=\frac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{e}(\varphi)+r_b\boldsymbol{e}_1(\varphi)-\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{e}_1(\varphi)+r_s\boldsymbol{e}(\varphi) \tag{7}$$

根据共轭啮合原理，在共轭啮合点处，与两个型线相切的矢量共同垂直于动涡旋偏置的方向，即切向量$\boldsymbol{T}$与矢量$\boldsymbol{e}(\varphi)$平行，与矢量$\boldsymbol{e}_1(\varphi)$垂直，式(7)两边点乘$\boldsymbol{e}_1(\varphi)$

$$\boldsymbol{e}_1(\varphi)\cdot\boldsymbol{T}=$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{e}(\varphi)+r_b\boldsymbol{e}_1(\varphi)-\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{e}_1(\varphi)+r_s\boldsymbol{e}(\varphi)\right]\cdot\boldsymbol{e}_1(\varphi)=0$$

化简后得到

$$r_b=\frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\varphi} \tag{8}$$

此即为广义展成半径与广义基圆半径表示的型线啮合条件。

3　涡旋型线集成函数方程

将矢量方程展开，可以得到切向角 φ 表示的坐标表达式为

$$\begin{cases} x = r_b\cos\varphi + r_s\sin\varphi \\ y = r_b\sin\varphi - r_s\cos\varphi \end{cases} \tag{9}$$

对式(9)分别求导，可得

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi - r_b\sin\varphi + \dfrac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi + r_s\cos\varphi = \\ \quad \left(\dfrac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\varphi} - r_b\right)\sin\varphi + \left(\dfrac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s\right)\cos\varphi \\ y' = \dfrac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi}\sin\varphi + r_b\cos\varphi - \dfrac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi + r_s\sin\varphi = \\ \quad \left(\dfrac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s\right)\sin\varphi + \left(r_b - \dfrac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\varphi}\right)\cos\varphi \end{cases} \tag{10}$$

由于 $r_b = \dfrac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\varphi}$，可得

$$\begin{cases} x' = \left(\dfrac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s\right)\cos\varphi \\ y' = \left(\dfrac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s\right)\sin\varphi \end{cases} \tag{11}$$

代入弧长公式，得

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\varphi} \left(\frac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s\right)\mathrm{d}\varphi \tag{12}$$

曲率半径

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s \tag{13}$$

将式(13)代入式(11)并对 φ 积分，得到以曲率半径表示的型线微分方程

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int_0^{\varphi} \rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ y = \displaystyle\int_0^{\varphi} \rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{cases} \tag{14}$$

根据式(8)和式(13)，r_b 至少是一阶可微的函数。

为便于用参数样条构造涡旋型线，可将曲率半径表示成切向角 φ 的集成函数形式

$$\rho(\varphi) = C_0 + C_1\varphi + C_2\varphi^2 + C_3\varphi^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{n} C_i\varphi^i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{15}$$

根据泰勒级数，任意函数曲线的数学表达式都可以展开为切向角函数的级数表达式，只要是关于切向角的递增函数，那么就可以通过切向角函数表示的曲率半径函数来表示任意满足啮合条件的涡旋型线。型线的几何形状和某些动力学特性可以通过对切向角参数的级数系数的优化得以实现[3,10]。

4　典型型线及两种方程的转换关系

(1) 当 $i = 0$ 时

此时集成函数式 $\rho = C_0$，其余级数系数为零；在笛卡尔坐标表达式中，$r_s = C_0$，$r_b = 0$。型线方程代表的曲线是半径为 C_0 的圆，如图 3a 所示。

(2) 当 $i = 1$ 时

当曲率集成函数式 $\rho = \varphi$ 时，$C_0 = 0$，$C_1 = 1$，其余级数系数为零；在笛卡尔坐标表达式中，$r_s = \varphi$，$r_b = 1$，型线方程代表的曲线是圆渐开线，其基圆半径为 1，如图 3b 所示。

(3) 当 $i = 2$ 时

当曲率集成函数式 $\rho = \varphi^2$ 时，$C_0 = 0$，$C_1 = 0$，$C_2 = 1$，其余级数系数为零；$r_s = -2 + \varphi^2$，$r_b = 2\varphi$，型线方程代表的曲线是Ⅱ次渐开线，如图 3c 所示。

(4) 当 $i = 3$ 时

当 $\rho = \varphi^3$ 时，$C_0 = 0$，$C_1 = 0$，$C_2 = 0$，$C_3 = 1$，其余级数系数为零；$r_s = -6\varphi + \varphi^3$，$r_b = -6 + 3\varphi^2$，型线方程代表的曲线是Ⅲ次渐开线，如图 3d 所示。

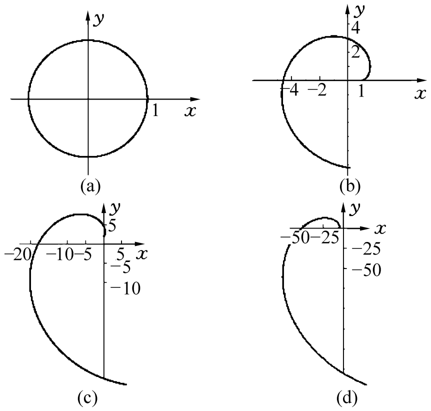

图 3　4 种典型型线

Fig. 3　Four typical scroll profiles

(a) $i = 0$　(b) $i = 1$　(c) $i = 2$　(d) $i = 3$

5　正三角形型线举例

涡旋机械的型线可以由一种或几种典型型线来构成，例如正多边形渐开线、线段渐开线等可以看作是特殊的圆弧类型线，对应于式(15)中 $i = 0$ 的情形。

以正三角形渐开线为例，该型线可以看成是若干段不同曲率半径的圆弧首尾相接组成，以曲率半径表示的型线微分方程为

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int_{\varphi_0+(N-1)\frac{2\pi}{3}}^{\varphi} NC_0\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \sum_{r=1}^{N-1}\int_{\varphi_0+\frac{2\pi}{3}(r-1)}^{\varphi_0+\frac{2\pi}{3}r} rC_0\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ y = \displaystyle\int_{\varphi_0+(N-1)\frac{2\pi}{3}}^{\varphi} NC_0\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \sum_{r=1}^{N-1}\int_{\varphi_0+\frac{2\pi}{3}(r-1)}^{\varphi_0+\frac{2\pi}{3}r} rC_0\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{cases} \tag{16}$$

式中　N——圆弧段个数

C_0——型线初始段圆弧半径

φ_0——初始段圆弧起始点的切向角

当 $N=4$, $\varphi_0=\pi/3$, $C_0=5.2$ mm 时所形成的正三角形型线如图4所示。

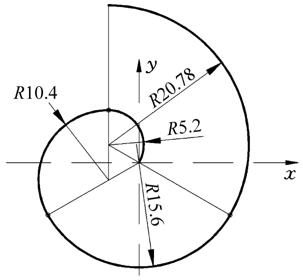

图4 正三角形型线

Fig. 4 Profile of regular triangle

通常采用的涡旋齿端双圆弧修正型线,则是将圆弧型线与基圆渐开线两类典型型线组合应用的特例。在型线设计中引入Ⅱ次渐开线和Ⅲ次渐开线,并将其与其他典型型线组合使用,将会得到更多特性多样的型线类型。

6 共轭啮合型线方程

根据型线的共轭啮合原理,型线与其共轭型线是具有相同公法线的曲线族,当动涡旋型线的法向偏置距离等于回转半径 R_{or}时,就与静涡旋型线在接触点处共轭啮合。如图5所示,设动涡旋型线 C 的方程为式(13),型线曲率半径在啮合点的法向量方向上,故静涡旋型线 C_f 与 C 是法向距离为 R_{or}的两条共轭曲线,其方程为

$$\begin{cases} x = \int_0^{\varphi} (\rho(\varphi) + R_{or})\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \\ y = \int_0^{\varphi} (\rho(\varphi) + R_{or})\sin\varphi \mathrm{d}\varphi \end{cases} \tag{17}$$

当 C_f 相对于坐标原点偏置 R_{or}时,便实现与 C 的啮合。

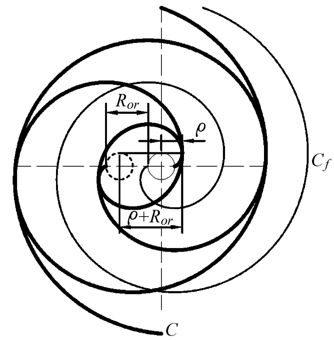

图5 动、静涡旋型线啮合图

Fig. 5 Engagement of orbiting and the fixed scroll profiles

7 结论

(1)针对目前国内外对涡旋型线设计理论的研究现状,利用微分几何有关正交矢量函数和Frenet活动标架理论,对涡旋型线的啮合条件进行了深入研究,提出了涡旋型线的集成表达形式,并以4种典型涡旋型线为例,研究了曲率半径函数微分方程与笛卡尔坐标方程之间的转换关系。可以通过调整曲率半径函数式中切向角参数的级数系数对型线的特性进行优化和控制。

(2)提出的涡旋集成型线方程突破了一种型线对应一种模型的固有框架,将微分几何有关理论引入型线设计中,以简洁的通用方程形式表征涡旋型线,不但能涵盖圆弧、圆渐开线、正多边形等型线种类,而且通过引入Ⅱ次渐开线和Ⅲ次渐开线等,还能对现有型线进行优化设计并构造新的型线类型,为实现涡旋流体机械的柔性化设计打下理论基础。

参 考 文 献

1 Morishita E, Sugihara M. Some design problems of scroll compressors[J]. Bulletin of JSME, 1986,29(258):4 139~4 146.

2 Gravesen J, Christian H. The geometry of the scroll compressor[J]. SIAM Review, 2001, 43(1):113~126.

3 陈进,张永栋,宋立权,等. 基于多目标遗传算法的涡旋型线形状优化[J]. 机械工程学报,2005, 41(1):172~175.
Chen Jin, Zhang Yongdong, Song Liquan, et al. Profile optimization of scrolls based on multiobjective genetic algorithms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(1):172~175. (in Chinese)

4 刘涛,邬再新,刘振全. 法向等距线法生成涡旋压缩机型线的研究[J]. 机械工程学报,2004,40(1): 55~58.
Liu Tao, Wu Zaixin, Liu Zhenquan. Study on generating profile with normal-equidistant-curve method for scroll compressor [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004,40(1):55~58. (in Chinese)

5 刘振全,杜桂荣. 涡旋压缩机理论机构模型[J]. 机械工程学报,1999,35(2):38~41.
Liu Zhenquan, Du Guirong. Mechanical model of scroll compressor[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1999, 35(2):38~41. (in Chinese)

6 Winandy E O, Saavedra C, Jean L. Experimental analysis and simplified modeling of a hermetic scroll refrigeration compressor[J]. Applied Thermal Engineering, 2002,22(2):107~120.

7 梅向明,黄敬之. 微分几何[M]. 北京: 高等教育出版社,1998.

8 Bush J W, Beagle W P, Housman M E. Maximizing scroll compressor displacement using generalized wrap geometry[C]// Proceedings of International Compressor Engineering Conference at Purdue University. West Lafayette, Indiana, USA: Ray W. Herrick Laboratories Press,1994: 205~210.