

基于共形几何代数的并联机器人逆运动学分析方法

柴馨雪¹ 李翔毅¹ 汤陈昕¹ 李秦川¹ 徐灵敏²

(1. 浙江理工大学机械工程学院, 杭州 310018; 2. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

摘要: 运动学分析是并联机器人运动学性能评估和结构尺寸优化的基础。现有并联机器人运动学分析方法存在几何建模与几何计算相分离的问题, 本文利用共形几何代数(Conformal geometric algebra, CGA)集几何表示和计算为一体的优势, 提出一种并联机器人逆运动学分析方法。根据动平台位姿参数给出动平台刚体运动算子, 通过共形几何代数框架下的几何积实现动平台上任意点的刚体变换, 得到任意点在运动过程中的共形几何表达式; 结合机构中尺寸、几何约束, 利用内积运算, 建立机构运动学方程; 根据运动学方程, 进行运动学反解计算和速度分析。以3自由度的3-RPS并联机器人和6自由度6-UPS并联机器人为例, 对所提方法进行验证, 并将逆运动学推导结果与仿真软件所得结果进行了对比, 验证了本文提出方法的正确性。该方法将空间向量和旋转表示等几何对象与矩阵乘法、矢量外积等计算方式相结合, 使得并联机器人空间几何问题统一在一个代数系统中进行处理, 因此分析过程几何直观性较强, 简化了运动学逆解分析计算过程。

关键词: 并联机器人; 共形几何代数; 运动学分析

中图分类号: TH112

文献标识码: A

文章编号: 1000-1298(2024)03-0421-10

OSID:



Inverse Kinematics Analysis Method of Parallel Robot Based on Conformal Geometry Algebra

CHAI Xinxue¹ LI Xiangyi¹ TANG Chenxin¹ LI Qinchuan¹ XU Lingmin²

(1. Faculty of Mechanical Engineering, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

2. State Key Laboratory of Mechanical Systems and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Kinematics analysis is the basis of kinematics performance evaluation and structure size optimization of parallel mechanism. The existing kinematics analysis methods of parallel robots have the problem of separating geometric modeling from geometric calculation. A method for inverse kinematics analysis of parallel robots was proposed by taking advantage of conformal geometric algebra (CGA), which integrated geometric representation and calculation. Firstly, the rigid body transformation of any point on the moving platform was realized by the geometric product under the framework of conformal geometry algebra, and then the conformal geometric expression of any point in the process of motion was obtained. Then the kinematic equation of the mechanism was established by using the inner product operation in combination with the dimension and geometry constraints of the mechanism. Finally, according to the kinematics equation, the inverse kinematics was calculated and the velocity was analyzed. A 3-RPS parallel robot of three degrees of freedom and a 6-UPS parallel robot of six degrees of freedom were taken as examples to verify the correctness of the proposed method, and the results of inverse kinematics were compared with those obtained by simulation software. This method combined the geometric objects such as space vector and rotation representation with the calculation methods such as matrix multiplication and vector outer product, so that the spatial geometry problems of parallel mechanism were handled in a unified algebraic system, so the analysis process was geometrically intuitive, and the analysis and calculation process of inverse kinematics were simplified.

Key words: parallel robot; conformal geometric algebra; kinematic analysis

收稿日期: 2023-10-28 修回日期: 2023-12-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(52205023, 5193000170)、机械系统与振动国家重点实验室开放课题项目(MSV202314)、中国博士后科学基金项目(2021M702123)和中国科协青年人才托举工程项目(2023QNRC001)

作者简介: 柴馨雪(1988—), 女, 副教授, 博士, 主要从事并联机器人机构学研究, E-mail: chaixx@zstu.edu.cn

0 引言

并联机器人由于其高刚度/精度、负载能力强的特性,在运动模拟、加工打磨、物料搬运方面有广泛的应用^[1-4]。运动学分析是并联机器人设计分析的基础,主要分析机构驱动关节和末端位姿的映射关系,为后续性能分析、规划控制奠定基础。

目前并联机器人的运动学分析通常在欧拉坐标系下进行,主要有闭环矢量法、对偶四元数法和螺旋理论法等方法。其中,闭环矢量法^[5-6]以机构的拓扑结构为基础,根据机构运动约束、几何关系建立闭环矢量方程,利用数值计算方法求解闭环矢量方程得到关节变量的解析表达式或数值解,最后结合机器人运动学特性推导运动学方程,该方法通过求解闭环矢量方程,可以精确地得到机构运动学特性,包括位姿、速度和加速度等,但求解闭环矢量方程通常可能涉及到迭代算法或者复杂的数值优化过程,导致计算复杂性较高,且闭环矢量方程是一组非线性方程,因此其求解可能存在多个解或者无解的情况。对偶四元数法^[7-8]利用对偶数学理论,建立表示机构运动的对偶四元数框架,通过关节变量的定义和对偶四元数的运算规则,计算并表示机构姿态,最后推导出描述机构运动学特性的运动学方程,对偶四元数法提供了一种多功能和直观的方式来描述并联机构的运动学特性,然而,对偶四元数表示的物理意义不如欧拉角或旋转矩阵直观,因此在可视化机构运动或进行运动规划时可能需要额外的转换和处理。螺旋理论法^[9-10]通过螺旋运动的概念来描述机构的运动状态,根据螺旋运动和切线速度的关系,建立切线速度与关节变量之间的关系,最后通过微分运算和链式法则来推导出机构的运动学方程,螺旋理论法提供了一种相对直观和几何化的方式来描述并联机构的运动学特性,但应用螺旋理论法进行并联机器人运动学分析时,需要根据具体机器人结构和运动特性设计合适的公式和计算方法,无法得到通用并联机器人运动学求解方法。综上所述,闭环矢量法、对偶四元数法和螺旋理论法这3种传统的并联机器人运动学分析方法在几何建模过程中通常使用欧几里得空间中的向量、矩阵等数据形式来描述机构的几何属性,在使用这种描述方法进行机器人运动学分析时,往往需要将几何模型转化为数学方程或矩阵形式以便进行进一步的计算,导致了几何建模与几何计算之间的分离。此外,欧几里得空间中的向量、矩阵等描述形式虽然能够较好地表达机器人几何属性,但对于复杂并联机器人系统来说,可能无法完全捕捉系统所有几何特性,例如非线性

性效应、奇点和特殊姿态等。因此现有并联机器人运动学分析方法存在几何建模与几何计算相分离的问题,难以全面而准确地描述机器人系统运动学特性。

共形几何代数(Conformal geometric algebra, CGA)是一种扩展了欧几里得空间的代数系统,提供了一致且统一的框架来描述几何建模和几何计算。CGA具有几何直观性^[11],部分学者在CGA框架下对机构运动学开展研究^[12-13]。CGA是一种完全不依赖于坐标的经典几何的统一语言^[14],能可视地表示各种几何实体,包括点、线、平面和球体等。CGA集几何表示和计算为一体^[15],在实现机构运动学问题的几何建模和计算上具有优势,已经被学者用于刚体运动和机器人领域^[16-18]。

文献[19-20]将共形几何用于串联机器人逆运动学求解,把机器人的关节和连杆等部件表示为共形几何构造,将三维刚体运动问题转换为二维几何问题,并通过求解二维平面上的几何问题得到机器人的逆运动学方程。然而,该方法更适用于描述平面内机器人运动。

CAEBAJAL-ESPINOSA等^[21]在CGA框架下构建了多机构系统的运动学分析模型,灵活地表示机构的几何元素、关节和连接关系,使得分析机构系统的运动学特性更加高效和精确。文献[17,22-27]对空间并联机构进行了运动学分析。综上所述,CGA框架下对空间并联机器人进行运动学分析在几何元素表达和计算简化方面具有优势。但是现有的CGA框架下并联机器人运动学分析研究在通用逆运动学求解方面还具有一定的局限性。

本文以3自由度并联机器人3-RPS^[28]和6自由度并联机器人6-UPS^[29]为对象,基于CGA进行运动学分析。首先根据动平台中心点描述动平台位置,以欧拉角描述动平台位姿,给出动平台上任意点在定坐标系下的共形几何表达式,结合并联机器人的几何特性建立运动学方程。对运动学方程关于时间求全微分得到机构的速度雅可比矩阵。将运动学方程求解得到的结果导入仿真软件中进行运动学仿真,通过对比分析验证计算方法的正确性。

1 几何代数基础知识

1.1 共形几何基本运算法则

五维CGA空间 $G^{3+1,1}$ 是由1个三维欧几里德空间 G^3 和1个二维闵氏空间 $G^{1,1}$ 组成。在共形几何空间中存在5个正交基矢量,包括3个欧几里德正交基向量 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 和另外2个附加正交基向量 $\{e_+, e_-\}$,该正交基满足

$$\begin{cases} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_+^2 = -e_-^2 = 1 \\ e_i e_j = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3, +, -) \end{cases} \quad (1)$$

CGA 中引入 2 个零矢量 e_0 和 e_∞ , 表示原点和无穷远点, 即

$$\begin{cases} e_0 = \frac{1}{2}(e_- - e_+) \\ e_\infty = e_- + e_+ \end{cases} \quad (2)$$

其中矢量 e_0 和 e_∞ 满足

$$\begin{cases} e_0^2 = e_\infty^2 = 0 \\ e_\infty \cdot e_0 = -1 \end{cases} \quad (3)$$

CGA 常用的运算主要包括内积、外积、几何积。对于两个矢量 a, b , 其内积由 $a \cdot b$ 表示, 外积运算由 $a \wedge b$ 表示, 几何积由 ab 表示, 且满足关系

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \quad (4)$$

在 CGA 中, 点的坐标可以表示为

$$P = x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0 \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\ x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

式中 x ——三维欧几里德正交基向量的线性组合
 x^2 ——点对应的标量积

在 CGA 中, 点的内积是标量, 两点的内积可以表示为距离度量。点 P_1 和点 P_2 间距离 L 可以表示为

$$L^2 = (P_1 - P_2)^2 = -2P_1 P_2 \quad (6)$$

1.2 刚体运动在 CGA 的表达

刚体运动主要有平移和旋转, 在 CGA 中, 刚体平移运动如图 1a 所示, 可以用平移算子 T 表示为

$$T = 1 - \frac{1}{2}te_\infty \quad (7)$$

其中

$$t = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3$$

式中 t ——平移向量

刚体旋转运动如图 1b 所示, 可以用旋转算子 R 表示为

$$R = \cos \frac{\theta}{2} - L \sin \frac{\theta}{2} \quad (8)$$

式中 θ ——旋转角

L ——旋转轴单位二向量

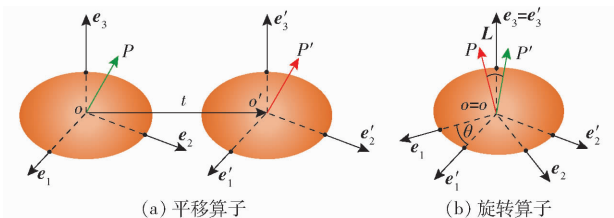


图 1 刚体运动算子

Fig.1 Rigid body motion operator

刚体同时存在平移和旋转的复合运动可以由运动算子 M 表示为

$$M = TR \quad (9)$$

在 CGA 中刚体运动可以通过几何积来计算, 分别用 $^o o$ 和 o 表示刚体变换前后的几何元素, 则变换后几何元素 o 可以表示为

$$o = M^o o \tilde{M} = TR^o o \tilde{R} \tilde{T} \quad (10)$$

其中

$$\tilde{M} = \tilde{R} \tilde{T}$$

$$\tilde{T} = 1 + \frac{1}{2}te_\infty$$

$$\tilde{R} = \cos \frac{\theta}{2} + L \sin \frac{\theta}{2}$$

式中 $\tilde{M}$ —— M 的共轭 $\tilde{T}$ —— T 的共轭

$\tilde{R}$ —— R 的共轭

2 基于 CGA 的并联机器人运动学分析

并联机器人示意图如图 2 所示, 定平台动平台通过 n 条串联支链 $A_n B_n$ 相连, 每条支链由可驱动的移动关节和连接平台的被动关节组成, 且每条支链仅含一个驱动关节。如图 2 所示, 设定坐标系为 $oxyz$, 固定参考坐标系即定坐标系的坐标原点 o 定义为定平台几何中心点, 动坐标系为 $puvw$, 动坐标系坐标原点 p 位于动平台几何中心位置。基于 CGA 对并联机器人进行运动学分析, 具体步骤如下 (图 3):

(1) 由定平台位姿参数给出动平台刚体运动的运动算子。通过分析几何模型可以得到点 A_n 在定坐标系 $oxyz$ 中的相对坐标为 $(x_{A_n}, y_{A_n}, 0)$, 点 B_n 在定坐标系 $oxyz$ 中的相对坐标为 $(x_{B_n}, y_{B_n}, z_{B_n})$, 点 B_n 在动坐标系 $puvw$ 中的坐标为 $(x_{B_n}, y_{B_n}, 0)$, 其中 n 为一般性并联机构的支链序号。

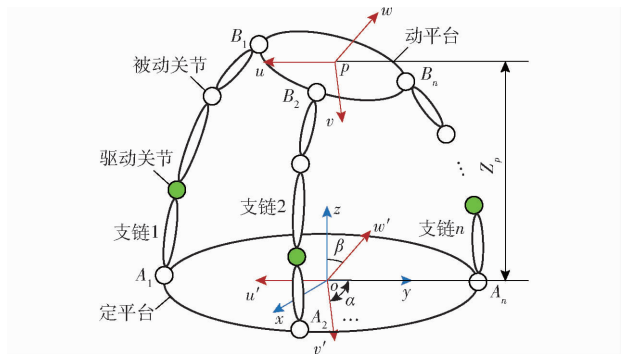


图 2 并联机器人示意图

Fig.2 Parallel robot diagram

在并联机构运动学分析过程中, 以 (x_p, y_p, z_p) 表示动平台位置。即动坐标系 $puvw$ 中的坐标原点 p 在定坐标系 $oxyz$ 中的坐标 (图 2)。以动平台中心点位置坐标给出平移算子 T , 根据动坐标系 $puvw$ 的坐标原点 p 在定坐标系 $oxyz$ 中的坐标为

$^ap(x_p, y_p, z_p)$, 可得

$$T = 1 - \frac{1}{2}(x_p e_1 + y_p e_2 + z_p e_3) e_\infty \tag{11}$$

$$\tilde{T} = 1 + \frac{1}{2}(x_p e_1 + y_p e_2 + z_p e_3) e_\infty \tag{12}$$

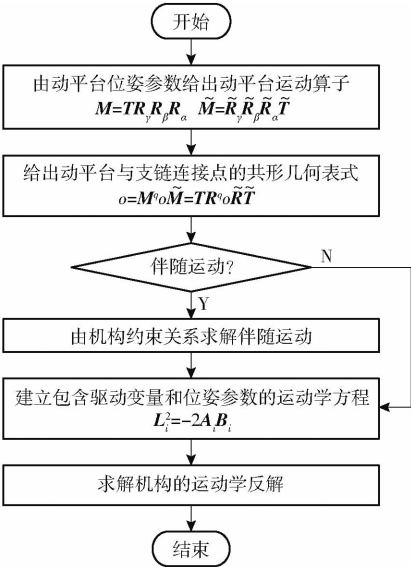


图 3 并联机器人逆运动学分析流程图
Fig. 3 Flowchart of inverse kinematics analysis of parallel robot

在并联机器人运动学分析过程中,以动平台坐标系欧拉角 (α, β, γ) 表示动平台姿态,得到动平台位姿为 $(x_p, y_p, z_p, \alpha, \beta, \gamma)$ 。欧拉角 (α, β, γ) 被描述为 $puvw$ 的初始方位和定坐标系 $oxyz$ 相重合,其旋转相对动坐标系 $puvw$ 运动,即先将 $puvw$ 绕 w 旋转 α ,然后绕 v 旋转 β ,最后绕 u 旋转 γ (图 2),以动平台姿态角给出旋转算子 R ,即

$$^wR_\alpha = \cos \frac{\alpha}{2} - e_{23} \sin \frac{\alpha}{2} \tag{13}$$

$$^w\tilde{R}_\alpha = \cos \frac{\alpha}{2} + e_{23} \sin \frac{\alpha}{2} \tag{14}$$

$$^vR_\beta = \cos \frac{\beta}{2} - e_{23} \sin \frac{\beta}{2} \tag{15}$$

$$^v\tilde{R}_\beta = \cos \frac{\beta}{2} + e_{23} \sin \frac{\beta}{2} \tag{16}$$

$$^uR_\gamma = \cos \frac{\gamma}{2} - e_{13} \sin \frac{\gamma}{2} \tag{17}$$

$$^u\tilde{R}_\gamma = \cos \frac{\gamma}{2} + e_{13} \sin \frac{\gamma}{2} \tag{18}$$

动平台刚体运动算子可以表示为

$$\begin{cases} M = TR \\ \tilde{M} = \tilde{R}\tilde{T} \end{cases} \tag{19}$$

(2) 依据式(10)的 CGA 刚体运动公式,给出动平台与支链关节共形几何表达式

$$A_i = x_{Ai} e_1 + y_{Ai} e_2 + z_{Ai} e_3 + \frac{1}{2}(x_{Ai}^2 + y_{Ai}^2 + z_{Ai}^2) e_\infty + e_0 \tag{20}$$

(3) 判断是否存在伴随运动。若存在,则由机构的约束关系求解机构的伴随运动,因为伴随运动会扩大逆运动学解的解空间,判断是否有伴随运动可以在逆运动学求解过程中处理或排除奇异点的问题,此外伴随运动的存在还有可能增加机构的自由度;若不存在,则跳至下一步。

(4) 由机器人结构关系,建立包含驱动变量和位姿参数的运动学方程。

(5) 求解运动学方程,得到机器人位姿参数 $(x_p, y_p, z_p, \alpha, \beta, \gamma)$ 和驱动变量 q_i 的映射关系。

3 3/6 自由度并联机器人运动学分析

3.1 3-RPS 并联机器人结构和运动学分析

3-RPS 并联机器人如图 4a 所示,上下平台由 3 根长度可变杆分别通过球铰和转动副相连,上下平台均为等边三角形。建立如图 4b 所示坐标系,定坐标系原点 o 固定于定平台中心点, x 轴和 y 轴平行或垂直于定平台边线。动坐标系原点 p 固定于动平台中心点, u 轴和 v 轴平行或垂直于动平台边线。点 A_i 在定坐标系下坐标为 (x_{Ai}, y_{Ai}, z_{Ai}) ,位于半径为 l_a 圆上,通过转动副与移动副相连,且转动副轴线与圆相切。点 B_i 坐标为 (u_{Bi}, v_{Bi}, w_{Bi}) ,位于半径为 l_b 的圆上,通过球面副与移动副相连。3-RPS 并联机器人具有 2 个转动自由度和 1 个移动自由度,定义动平台位姿参数为 (α, β, z_p) ,同时机构运动会产生 2 个伴随移动 (x_p, y_p) 和 1 个伴随转动 γ 。

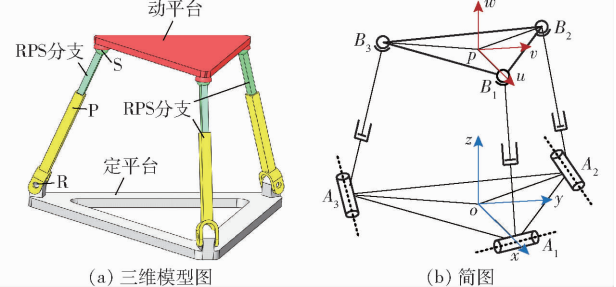


图 4 3-RPS 并联机器人
Fig. 4 3-RPS parallel robot

根据动平台位姿参数给出动平台刚体运动的运动算子,动坐标系 $puvw$ 原点在定坐标系 $oxyz$ 下的位置为 (x_p, y_p, z_p) ,动坐标系姿态角为 (α, β, γ) ,则动平台刚体运动算子为

$$M = TR_\gamma R_\beta R_\alpha \tag{21}$$

$$\tilde{M} = \tilde{R}_\alpha \tilde{R}_\beta \tilde{R}_\gamma \tilde{T} \tag{22}$$

其中 $T = 1 - \frac{1}{2}(x_p e_1 + y_p e_2 + z_p e_3) e_\infty$

$$\begin{aligned} R_\alpha &= c_{\alpha/2} - e_{23} s_{\alpha/2} & R_\beta &= c_{\beta/2} + e_{13} s_{\beta/2} \\ R_\gamma &= c_{\gamma/2} - e_{12} s_{\gamma/2} \end{aligned}$$

式中 c 表示余弦函数, s 表示正弦函数, 下同。

根据式(20), 各转动副 A_i 和球面副 B_i 在 $oxyz$ 和 $puvw$ 中的 CGA 表示分别为

$$\mathbf{A}_i = x_{Ai} \mathbf{e}_1 + y_{Ai} \mathbf{e}_2 + z_{Ai} \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}(x_{Ai}^2 + y_{Ai}^2 + z_{Ai}^2) \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \quad (23)$$

$${}^q \mathbf{B}_i = u_{Bi} \mathbf{e}_1 + v_{Bi} \mathbf{e}_2 + w_{Bi} \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}(u_{Bi}^2 + v_{Bi}^2 + w_{Bi}^2) \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \quad (24)$$

由式(10)的 CGA 刚体运动公式, 给出动平台与支链球副中心点位置表达式为

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{M}^q \mathbf{B}_i \widetilde{\mathbf{M}} = x_{Bi} \mathbf{e}_1 + y_{Bi} \mathbf{e}_2 + z_{Bi} \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}(x_{Bi}^2 + y_{Bi}^2 + z_{Bi}^2) \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} x_{Bi} &= c_\beta c_\gamma u_{Bi} + (s_\alpha s_\beta c_\gamma - s_\gamma c_\alpha) v_{Bi} + \\ &\quad (s_\gamma s_\alpha + s_\beta c_\alpha c_\gamma) w_{Bi} + x_p \\ y_{Bi} &= s_\gamma c_\beta u_{Bi} + (s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) v_{Bi} + \\ &\quad (s_\beta s_\gamma c_\alpha - s_\alpha c_\gamma) w_{Bi} + y_p \\ z_{Bi} &= -s_\beta u_{Bi} + s_\alpha c_\beta v_{Bi} + c_\alpha c_\beta w_{Bi} + z_p \end{aligned}$$

3-RPS 并联机器人存在伴随运动, 需根据机构

几何约束对伴随运动进行求解。由于 3-RPS 并联机器人转动副的约束, 各球副在转动副和移动副张成的约束平面内运动, 得到对应于约束平面的约束方程为

$$\begin{cases} y_{B1} = 0 \\ y_{B2} = -\sqrt{3}x_{B2} \\ y_{B3} = \sqrt{3}x_{B3} \end{cases} \quad (26)$$

将球副位置式(25)代入约束方程(26)中得到伴随运动表达式为

$$\begin{cases} l_\gamma = \frac{s_\alpha s_\beta}{c_\alpha + c_\beta} \\ x_p = \frac{l_b(c_\beta c_\gamma - c_\alpha c_\gamma - s_\alpha s_\beta s_\gamma)}{2} \\ y_p = -l_b s_\gamma c_\beta \end{cases} \quad (27)$$

根据并联机器人结构关系, 通过共形几何建立包含驱动变量和位姿参数的运动学方程

$$\mathbf{L}_i^2 = (x_{Ai} - x_{Bi})^2 + (y_{Ai} - y_{Bi})^2 + (z_{Ai} - z_{Bi})^2 = -2\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \quad (28)$$

代入点的坐标求解出机器人运动学反解为

$$\begin{aligned} q_1 = & \left\{ \left\{ x_{A1} - \frac{(-l_b c_\alpha^2 + 2l_b + 2u_{B1})c_\beta^2 + [2(w_{B1}s_\beta + u_{B1})c_\alpha + 2s_\alpha v_{B1}s_\beta]c_\beta + 2w_{B1}s_\beta - l_b}{2(c_\alpha c_\beta + 1)} \right\}^2 + \right. \\ & \left\{ y_{A1} - \frac{(-s_\alpha w_{B1}c_\alpha + c_\alpha^2 v_{B1} - v_{B1})c_\beta^2 + \{v_{B1}c_\alpha - [(l_b - u_{B1})s_\beta + w_{B1}]s_\alpha\}c_\beta + v_{B1}}{c_\alpha c_\beta + 1} \right\}^2 + \\ & \left. [z_{A1} - (v_{B1}c_\beta s_\alpha + w_{B1}c_\beta c_\alpha - u_{B1}s_\beta + z_p)]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} q_2 = & \left\{ \left\{ x_{A2} - \frac{(-l_b c_\alpha^2 + 2l_b + 2u_{B2})c_\beta^2 + [2(w_{B2}s_\beta + u_{B2})c_\alpha + 2s_\alpha v_{B2}s_\beta]c_\beta + 2w_{B2}s_\beta - l_b}{2(c_\alpha c_\beta + 1)} \right\}^2 + \right. \\ & \left\{ y_{A2} - \frac{(-s_\alpha w_{B2}c_\alpha + c_\alpha^2 v_{B2} - v_{B2})c_\beta^2 + \{v_{B2}c_\alpha - [(l_b - u_{B2})s_\beta + w_{B2}]s_\alpha\}c_\beta + v_{B2}}{c_\alpha c_\beta + 1} \right\}^2 + \\ & \left. [z_{A2} - (v_{B2}c_\beta s_\alpha + w_{B2}c_\beta c_\alpha - u_{B2}s_\beta + z_p)]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} q_3 = & \left\{ \left\{ x_{A3} - \frac{(-l_b c_\alpha^2 + 2l_b + 2u_{B3})c_\beta^2 + [2(w_{B3}s_\beta + u_{B3})c_\alpha + 2s_\alpha v_{B3}s_\beta]c_\beta + 2w_{B3}s_\beta - l_b}{2(c_\alpha c_\beta + 1)} \right\}^2 + \right. \\ & \left\{ y_{A3} - \frac{(-s_\alpha w_{B3}c_\alpha + c_\alpha^2 v_{B3} - v_{B3})c_\beta^2 + \{v_{B3}c_\alpha - [(l_b - u_{B3})s_\beta + w_{B3}]s_\alpha\}c_\beta + v_{B3}}{c_\alpha c_\beta + 1} \right\}^2 + \\ & \left. [z_{A3} - (v_{B3}c_\beta s_\alpha + w_{B3}c_\beta c_\alpha - u_{B3}s_\beta + z_p)]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (31)$$

对运动学方程两边关于时间求全微分可得

$$\mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} \quad (32)$$

其中

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} J_{q11} & & \\ & J_{q22} & \\ & & J_{q33} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \quad (34)$$

令 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{G}$, 可得到驱动速度与输出速度的映射关系

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} \quad (35)$$

3.2 3-RPS 并联机器人仿真实验

并联机器人尺寸参数为 $l_a = 85\text{ mm}$, $l_b = 51\text{ mm}$, 使 3-RPS 并联机器人行走圆柱面直径为 10 mm 、导程为 2 mm 的圆柱螺旋线。在动平台上取坐标为 ${}^qH = (0, 0, h)$ 的点, 其中 $h = 17\text{ mm}$, 机器人运动过程中, 其在定坐标系下的坐标的 CGA 表示为

$$\begin{aligned} H &= M^q H \widetilde{M} = x_h e_1 + y_h e_2 + z_h e_3 + \\ &\frac{1}{2}(x_h^2 + y_h^2 + z_h^2) e_\infty + e_0 \end{aligned} \tag{36}$$

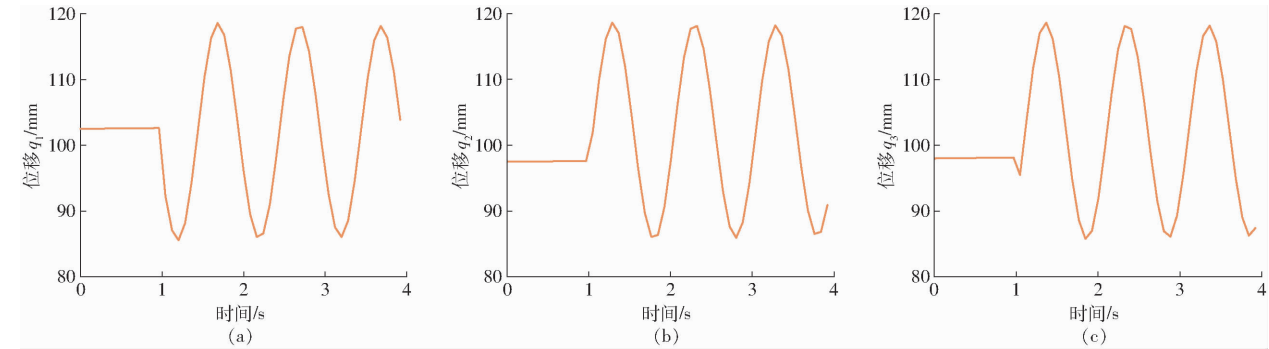


图5 3-RPS 并联机器人运动学反解值

Fig. 5 Inverse solution of 3-RPS parallel robot kinematics

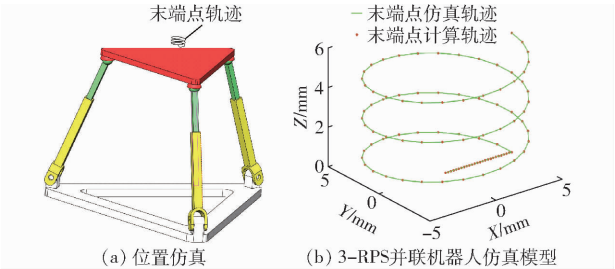


图6 运动学仿真验证

Fig. 6 Kinematic simulation verification

的轨迹相对比,如图 6b 所示,可以发现二者一致,验证了 3-RPS 并联机构运动学模型的正确性。

根据驱动速度与输出速度的映射关系求解出该运动轨迹下 3-RPS 并联机器人驱动副的运动速度。将仿真得到的驱动副速度和计算得到的驱动副速度进行对比验证,结果如图 7 所示,得到了准确的驱动副运动速度,可以发现仿真结果和计算结果二

其中

$$\begin{aligned} x_h &= -l_b(1 + c_\alpha^2 c_\beta^2 - 2c_\alpha^2 c_\beta^2)/(2c_\alpha c_\beta + 2) + h s_\beta \\ y_h &= -l_b s_\alpha s_\beta c_\beta/(c_\beta c_\alpha + 1) - h s_\alpha c_\beta \\ z_h &= z_p + h c_\alpha c_\beta \end{aligned}$$

由式(35)求解螺旋线轨迹下 3-RPS 并联机器人的位姿参数 (α, β, z_p) , 通过运动学反解方程求解出移动副杆长即运动学反解值,如图 5 所示。

将求解的移动副杆长导入 Solidworks 软件中进行运动学仿真,见图 6a。通过将 Solidworks 中仿真得到点 H 的输出轨迹与运动学反解计算得到点 H

者一致,说明所建立的映射关系正确,验证了 3-RPS 并联机器人运动学模型的正确性。

3.3 6-UPS 并联机器人结构和运动学分析

6-UPS 并联机器人如图 8a 所示,上下平台由 6 根长度可变杆分别通过球铰和虎克铰相连,上下平台均为 6 边形。建立如图 8b 所示坐标系,定坐标系原点 o 固定于定平台中心点, x 轴和 y 轴平行或垂直于定平台边线。动坐标系原点 p 固定于动平台中心点, u 轴和 v 轴平行或垂直于动平台边线,点 A_i 在定坐标系下的坐标为 (x_{Ai}, y_{Ai}, z_{Ai}) , 点 B_i 在动坐标系下的坐标为 (u_{Bi}, v_{Bi}, w_{Bi}) 。6-UPS 并联机器人具有 6 个自由度,即动平台具有绕 u 轴、 v 轴和 w 轴 3 个转动自由度和 3 个分别沿着坐标轴方向的移动自由度,定义动平台的位姿参数为 $(\alpha, \beta, \gamma, x_p, y_p, z_p)$ 。

根据动平台的位姿参数给出动平台刚体运动的运动算子,动坐标系 $puvw$ 原点在定坐标系 $oxyz$ 下的

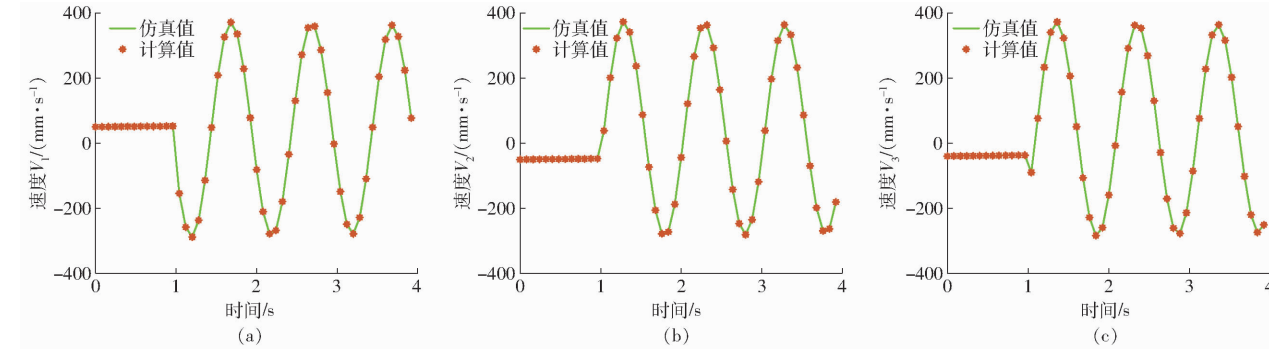


图7 速度仿真对比验证结果

Fig. 7 Speed simulation and comparison results

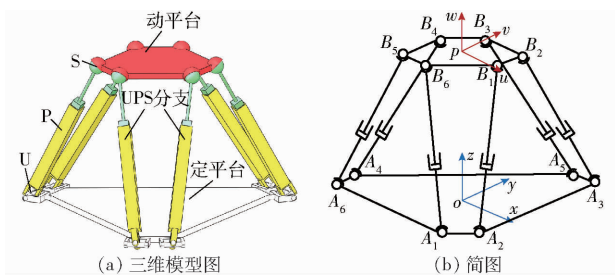


图8 6-UPS 并联机器人

Fig. 8 6-UPS parallel robot

位置为 (x_p, y_p, z_p) , 动坐标系姿态角为 (α, β, γ) , 则动平台刚体运动算子为

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\alpha \quad (37)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \widetilde{\mathbf{R}}_\alpha \widetilde{\mathbf{R}}_\beta \widetilde{\mathbf{R}}_\gamma \widetilde{\mathbf{T}} \quad (38)$$

其中

$$\mathbf{T} = \mathbf{1} - \frac{1}{2}(x_p \mathbf{e}_1 + y_p \mathbf{e}_2 + z_p \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_\infty$$

$$\mathbf{R}_\alpha = c_{\alpha/2} - \mathbf{e}_{23} s_{\alpha/2} \quad \mathbf{R}_\beta = c_{\beta/2} + \mathbf{e}_{13} s_{\beta/2}$$

$$\mathbf{R}_\gamma = c_{\gamma/2} - \mathbf{e}_{12} s_{\gamma/2}$$

基于 CGA 的几何代数表达, 各 U 副 A_i 和 S 副 B_i 在 xyz 和 uvw 中的 CGA 表示分别为

$$\mathbf{A}_i = x_{Ai} \mathbf{e}_1 + y_{Ai} \mathbf{e}_2 + z_{Ai} \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}(x_{Ai}^2 + y_{Ai}^2 + z_{Ai}^2) \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \quad (39)$$

$${}^q \mathbf{B}_i = u_{Bi} \mathbf{e}_1 + v_{Bi} \mathbf{e}_2 + w_{Bi} \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}(u_{Bi}^2 + v_{Bi}^2 + w_{Bi}^2) \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \quad (40)$$

由 CGA 刚体运动式 (40), 给出动平台与支链连接点位置表达式为

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{M}^q \mathbf{B}_i \widetilde{\mathbf{M}} = x_{Bi} \mathbf{e}_1 + y_{Bi} \mathbf{e}_2 + z_{Bi} \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}(x_{Bi}^2 + y_{Bi}^2 + z_{Bi}^2) \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \quad (41)$$

其中

$$\begin{aligned} x_{Bi} &= c_\beta c_\gamma u_{Bi} + (s_\alpha s_\beta c_\gamma - s_\gamma c_\alpha) v_{Bi} + \\ &\quad (s_\gamma s_\alpha + s_\beta c_\alpha c_\gamma) w_{Bi} + x_p \\ y_{Bi} &= s_\gamma c_\beta u_{Bi} + (s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) v_{Bi} + \\ &\quad (s_\beta s_\gamma c_\alpha - s_\alpha c_\gamma) w_{Bi} + y_p \\ z_{Bi} &= -s_\beta u_{Bi} + s_\alpha c_\beta v_{Bi} + c_\alpha c_\beta w_{Bi} + z_p \end{aligned}$$

根据并联机器人结构关系, 通过共形几何建立包含驱动变量和位姿参数的运动学方程

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i^2 &= (x_{Ai} - x_{Bi})^2 + (y_{Ai} - y_{Bi})^2 + \\ &\quad (z_{Ai} - z_{Bi})^2 = -2\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \end{aligned} \quad (42)$$

代入点的坐标求解出机器人运动学反解为

$$\begin{aligned} q_1 &= \{ [x_{A1} - c_\beta c_\gamma u_{B1} - (s_\alpha s_\beta c_\gamma - s_\gamma c_\alpha) v_{B1} - \\ &\quad (s_\gamma s_\alpha + s_\beta c_\alpha c_\gamma) w_{B1} - x_p]^2 + \\ &\quad [y_{A1} - s_\gamma c_\beta u_{B1} - (s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) v_{B1} - \\ &\quad (s_\beta s_\gamma c_\alpha - s_\alpha c_\gamma) w_{B1} - y_p]^2 + \\ &\quad (z_{A1} + s_\beta u_{B1} - s_\alpha c_\beta v_{B1} - c_\alpha c_\beta w_{B1} - z_p)^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \{ [x_{A2} - c_\beta c_\gamma u_{B2} - (s_\alpha s_\beta c_\gamma - s_\gamma c_\alpha) v_{B2} - \\ &\quad (s_\gamma s_\alpha + s_\beta c_\alpha c_\gamma) w_{B2} - x_p]^2 + \\ &\quad [y_{A2} - s_\gamma c_\beta u_{B2} - (s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) v_{B2} - \\ &\quad (s_\beta s_\gamma c_\alpha - s_\alpha c_\gamma) w_{B2} - y_p]^2 + \\ &\quad (z_{A2} + s_\beta u_{B2} - s_\alpha c_\beta v_{B2} - c_\alpha c_\beta w_{B2} - z_p)^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} q_3 &= \{ [x_{A3} - c_\beta c_\gamma u_{B3} - (s_\alpha s_\beta c_\gamma - s_\gamma c_\alpha) v_{B3} - \\ &\quad (s_\gamma s_\alpha + s_\beta c_\alpha c_\gamma) w_{B3} - x_p]^2 + \\ &\quad [y_{A3} - s_\gamma c_\beta u_{B3} - (s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) v_{B3} - \\ &\quad (s_\beta s_\gamma c_\alpha - s_\alpha c_\gamma) w_{B3} - y_p]^2 + \\ &\quad (z_{A3} + s_\beta u_{B3} - s_\alpha c_\beta v_{B3} - c_\alpha c_\beta w_{B3} - z_p)^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} q_4 &= \{ [x_{A4} - c_\beta c_\gamma u_{B4} - (s_\alpha s_\beta c_\gamma - s_\gamma c_\alpha) v_{B4} - \\ &\quad (s_\gamma s_\alpha + s_\beta c_\alpha c_\gamma) w_{B4} - x_p]^2 + \\ &\quad [y_{A4} - s_\gamma c_\beta u_{B4} - (s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) v_{B4} - \\ &\quad (s_\beta s_\gamma c_\alpha - s_\alpha c_\gamma) w_{B4} - y_p]^2 + \\ &\quad (z_{A4} + s_\beta u_{B4} - s_\alpha c_\beta v_{B4} - c_\alpha c_\beta w_{B4} - z_p)^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} q_5 &= \{ [x_{A5} - c_\beta c_\gamma u_{B5} - (s_\alpha s_\beta c_\gamma - s_\gamma c_\alpha) v_{B5} - \\ &\quad (s_\gamma s_\alpha + s_\beta c_\alpha c_\gamma) w_{B5} - x_p]^2 + \\ &\quad [y_{A5} - s_\gamma c_\beta u_{B5} - (s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) v_{B5} - \\ &\quad (s_\beta s_\gamma c_\alpha - s_\alpha c_\gamma) w_{B5} - y_p]^2 + \\ &\quad (z_{A5} + s_\beta u_{B5} - s_\alpha c_\beta v_{B5} - c_\alpha c_\beta w_{B5} - z_p)^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} q_6 &= \{ [x_{A6} - c_\beta c_\gamma u_{B6} - (s_\alpha s_\beta c_\gamma - s_\gamma c_\alpha) v_{B6} - \\ &\quad (s_\gamma s_\alpha + s_\beta c_\alpha c_\gamma) w_{B6} - x_p]^2 + \\ &\quad [y_{A6} - s_\gamma c_\beta u_{B6} - (s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma) v_{B6} - \\ &\quad (s_\beta s_\gamma c_\alpha - s_\alpha c_\gamma) w_{B6} - y_p]^2 + \\ &\quad (z_{A6} + s_\beta u_{B6} - s_\alpha c_\beta v_{B6} - c_\alpha c_\beta w_{B6} - z_p)^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (48)$$

对运动学方程两边关于时间求全微分可得

$$\mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} \quad (49)$$

其中

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} J_{11} & & & & & \\ & J_{22} & & & & \\ & & J_{33} & & & \\ & & & J_{44} & & \\ & & & & J_{55} & \\ & & & & & J_{66} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} & G_{64} & G_{66} \end{bmatrix}$$

(51)

令 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_q^{-1} \boldsymbol{G}$, 可得到驱动速度与操作速度的映射关系为

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z}_p \end{bmatrix}$$

(52)

3.4 6-UPS 并联机器人仿真实验

设并联机器人尺寸参数为 $l_a = 2\,345\text{ mm}$, $l_b = 1\,000\text{ mm}$, 使 6-UPS 并联机器人行走圆柱面直径为 200 mm、导程为 50 mm 的圆柱螺旋线。通过移动副求解方程求解移动副杆长即运动学反解值, 如图 9 所示。

将求解得的移动副杆长导入 Solidworks 软件中进行运动学仿真, 如图 10a 所示。通过将 Solidworks 中仿真得到的点 P 的输出轨迹与运动学反解计算得到点 P 的轨迹相对比, 如图 10b 所示, 可以发现二者一致, 验证了 6-UPS 并联机器人运动学模型的正确性。

根据驱动速度与输出速度的映射关系求解出该运动轨迹下 6-UPS 并联机器人驱动副的运动速度。将仿真得到的驱动副运动速度和计算得到的驱动副运动速度进行对比验证, 结果如图 11 所示, 得到了准确的驱动副运动速度, 可以发现仿真结果和

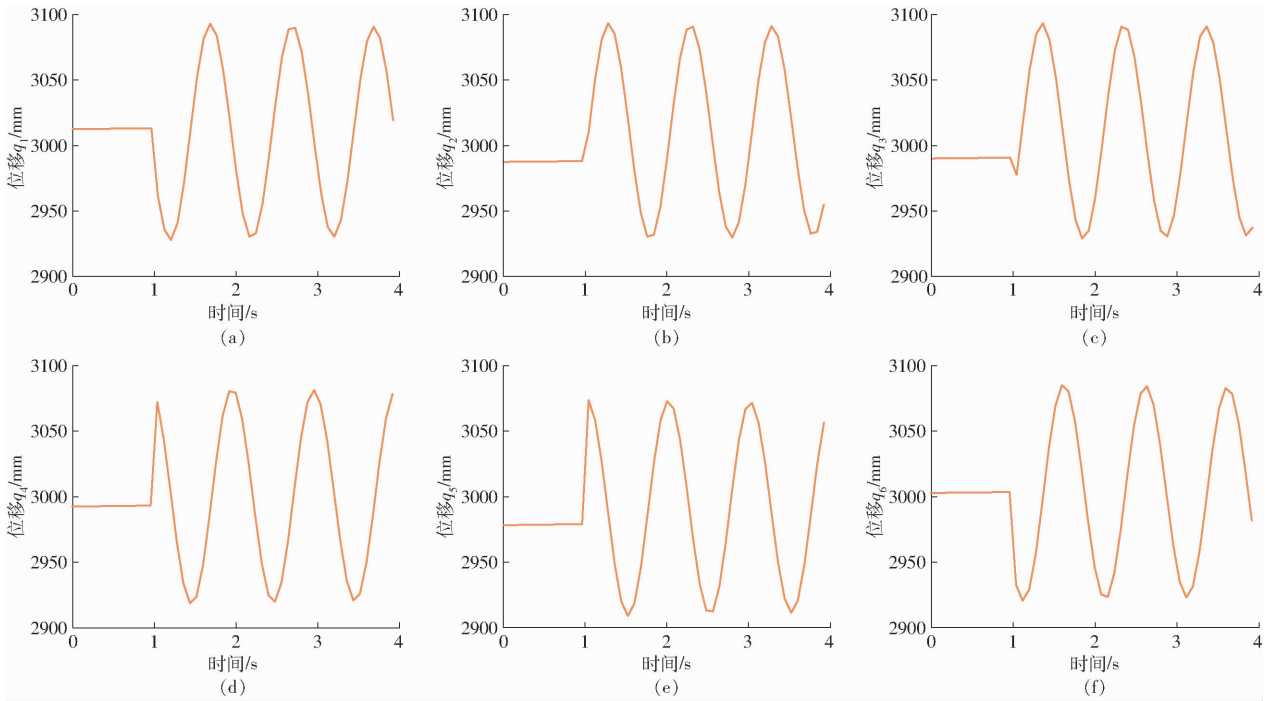


图 9 6-UPS 并联机器人运动学反解值

Fig. 9 6-UPS parallel robot kinematics inverse solution

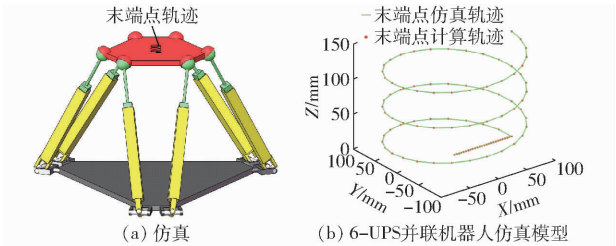


图 10 6-UPS 运动学仿真验证

Fig. 10 6-UPS kinematics simulation verification

计算结果二者一致, 说明所建立的映射关系正确, 验证了 6-UPS 并联机器人运动学模型的正确性。

4 结论

(1) 提出一种基于 CGA 的空间并联机器人逆运动学分析方法, 该方法将并联机器人的空间几何问题统一在一个代数系统中进行处理, 使用点、直线、平面和圆等基本几何元素来描述空间和运动, 通过并联机器人位姿参数和机构约束关系, 给出动平台上任意点的共形几何表达式, 再通过结构关系建立包含驱动变量和位姿参数运动学方程。

(2) 以 3-RPS 和 6-UPS 两种并联机器人为

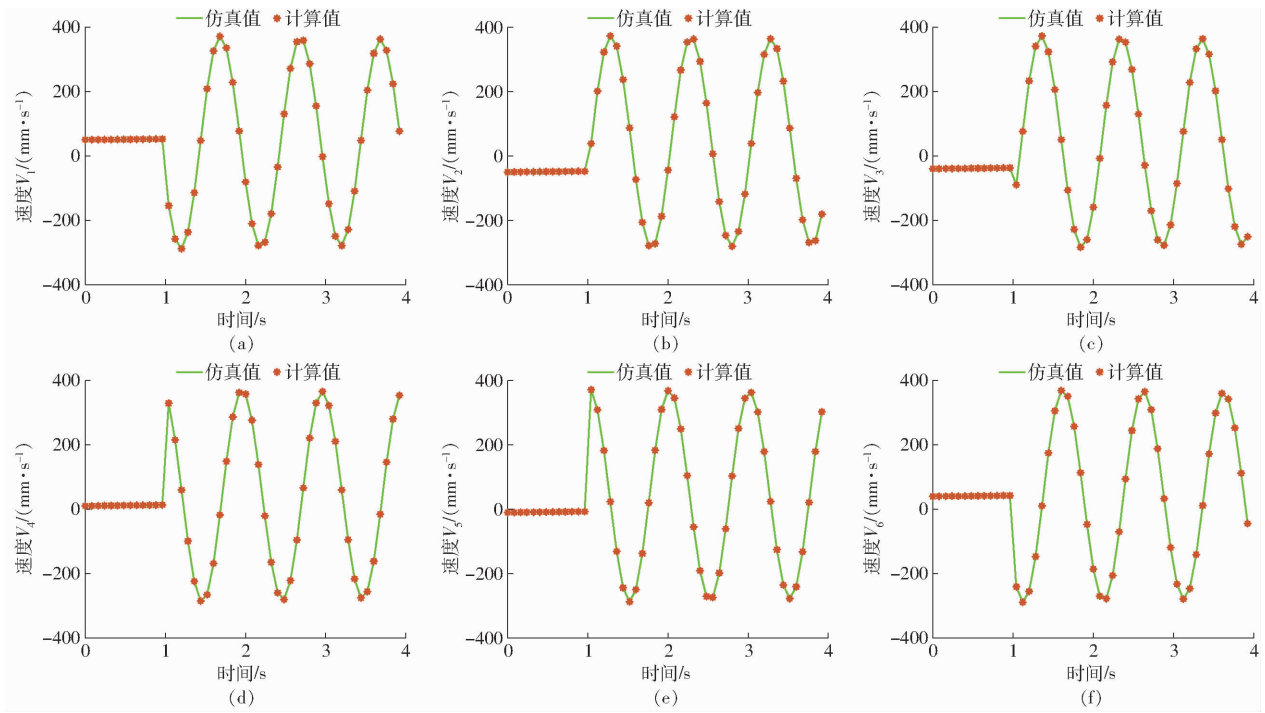


图 11 6-UPS 速度仿真对比验证结果

Fig. 11 Speed simulation and comparison results of 6-UPS

例,计算给定轨迹下机器人的运动学反解,进一步对反解表达式关于时间求导,得到速度雅可比矩阵。最后将得到的结果代入 Solidworks 进行仿真验证,通过仿真对比进一步验证了求解方法的正确性。

参 考 文 献

[1] GOUGH V. Contribution to discussion of papers on research in automobile stability[J]. Control and Tyre Performance, 1957, 171(1):1-18.

[2] GREGORIO R D, PARENTI-CASTELLI V. Mobility analysis of the 3UPU parallel mechanism assembled for a pure translational motion[C]//Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2002: 1-12.

[3] CHABLAT D, WENGER P. Architecture optimization of a 3-DOF translational parallel mechanism for machining applications [J]. The Orthoglide, 2003, 19(3): 403-410.

[4] YANG G, CHEN I M, CHEN W, et al. Kinematic design of a SIX-DOF parallel-kinematics machine with decoupled-motion architecture[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2004, 20(5): 876-887.

[5] 董玉红,田素玲,王志忠. 基于闭环矢量法的骨盆位姿机构运动学分析[J]. 机电一体化,2012,18(11):26-29,39. DONG Yuhong, TIAN Suling, WANG Zhizhong. Kinematics analysis of pelvis position mechanism based on closedloop vector method[J]. Mechatronics, 2012,18(11):26-29,39. (in Chinese)

[6] 张晓超,董玉红,张立勋. 基于闭环矢量法的五杆合作机器人运动学建模及仿真[J]. 自动化技术与应用,2006(5):16-17,81. ZHANG Xiaochao, DONG Yuhong, ZHANG Lixun. Kinematics modeling and simulation of a five-bar cobot by using closed loop vector method[J]. Control Theory and Applications, 2006(5):16-17,81. (in Chinese)

[7] 金国光,张旭阳,李博. 基于对偶四元数法的空间四连杆引纬机构运动学分析[J]. 天津工业大学学报,2019,38(5): 82-88. JIN Guoguang, ZHANG Xuyang, LI Bo. Kinematics analysis of spatial four-bar linkage weft insertion mechanism based on dual quaternion[J]. Journal of Tiangong University, 2019, 38(5): 82-88. (in Chinese)

[8] 葛为民,宇旭东,王肖锋,等. 基于对偶四元数的机械臂运动学建模及分析[J]. 机械传动,2018,42(7):112-117. GE Weimin, YU Xudong, WANG Xiaofeng, et al. Kinematics modeling and analysis of manipulator based on dual quaternion [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2018, 42(7): 112-117. (in Chinese)

[9] 朱大昌,严智敏,崔祥府,等. 基于螺旋理论对 3-RPS 并联机器人运动学分析及仿真[J]. 机械科学与技术, 2013, 32(1): 28-31. ZHU Dachang, YAN Zhimin, CUI Xiangfu, et al. Kinematics analysis and simulation of 3-RPS-type parallel robot based on screw theory[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2013, 32(1): 28-31. (in Chinese)

[10] 陈伟海,周杰,于守谦,等. 基于螺旋理论模块化机器人运动学分析与仿真[J]. 北京航空航天大学学报,2005,31(7):814-818.

- CHEN Weihai, ZHOU Jie, YU Shouqian, et al. Kinematic analysis and simulation for modular manipulators based on screw theory[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(7): 814–818. (in Chinese)
- [11] LI H, HESTENES D, ROCKWOOD A. Generalized homogeneous coordinates for computational geometry[M]. Springer: Geometric Computing with Clifford Algebras, 2001: 27–59.
- [12] BAYRO-CORROCHANO E, ZAMORA-ESQUIVEL J. Differential and inverse kinematics of robot devices using conformal geometric algebra[J]. Robotica, 2007, 25(1): 1–82.
- [13] PITT J, HILDENBRAND D, STELZER M, et al. Inverse kinematics of a humanoid robot based on conformal geometric algebra using optimized code generation[C]//Proceedings of the Humanoid Robots, 2008: 1–3.
- [14] 石赫, 李洪波. 几何代数 and 几何计算(一)[J]. 科学, 2005, 57(5): 3–7.
- [15] PERWASS C, EDELSBRUNNER H, KOBELT L, et al. Geometric algebra with applications in engineering[M]. Springer: Geometric Computing with Clifford Algebras, 2009: 1–18.
- [16] ROSENHAHN B, PERWASS C, SOMMER G J A. Free-form pose estimation by using twist representations[J]. Robotica, 2004, 38(1): 91–113.
- [17] ZHU G, WEI S, ZHANG Y, et al. Direct kinematic analysis of the spatial parallel mechanism with 3-R(P)S structure based on the point pair relationship[J]. Geometric Algebra Journal of Mechanical Engineering, 2021, 38(1): 1–23.
- [18] 李洪波. 共形几何代数——几何代数的新理论和计算框架[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(11): 3–13. LI Hongbo. Conformal geometric algebra—a new framework for computational geometry[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(11): 3–13. (in Chinese)
- [19] ZAMORA J, BAYRO-CORROCHANO E. Inverse kinematics fixation and grasping using conformal geometric algebra[C]//Proceedings of the 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2004.
- [20] 黄昔光, 刘聪聪, 黄旭, 等. 空间连杆机构位移分析的共形几何代数方法[J]. 机械工程学报, 2021, 57(9): 39–50. HUANG Xiguang, LIU Congcong, HUANG Xu, et al. Displacement analysis of spatial linkage mechanisms based on conformal[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(9): 39–50. (in Chinese)
- [21] CARBAJAL-ESPINOSA O, LOUKIANOV A, E BAYRO-CORROCHANO. Obstacle avoidance for a humanoid arm using conformal geometric algebra[C]//2010: 10th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, Humanoids 2010: 524–529.
- [22] 张忠海, 李端玲. 空间并联机构运动学分析的共形几何代数方法[J]. 农业机械学报, 2015, 46(4): 325–330. ZHANG Zhonghai, LI Duanling. Conformal geometric algebra method for kinematics analysis of spatial parallel mechanisms[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(4): 325–330. (in Chinese)
- [23] 朱小蓉, 赵磊, 沈惠平. 3T1R 解耦并联机构动力学与惯量耦合特性分析[J]. 农业机械学报, 2023, 54(9): 448–458. ZHU Xiaorong, ZHAO Lei, SHEN Huiping. Analysis of dynamics and inertia coupling characteristics of 3T1R decoupling parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(9): 448–458. (in Chinese)
- [24] 李永泉, 蔡俊, 李玉昆, 等. 运动分岔并联机构运动学性能分析[J]. 农业机械学报, 2023, 54(4): 447–458. LI Yongquan, CAI Jun, LI Yukun, et al. Kinematic performance analysis of kinematic bifurcation parallel mechanisms[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(4): 447–458. (in Chinese)
- [25] 刘晓飞, 刘洋, 何阳, 等. 2RPU + 2UPR + RPR 多冗余驱动并联机构运动学分析与优化[J]. 农业机械学报, 2023, 54(3): 440–450. LIU Xiaofei, LIU Yang, HE Yang, et al. Kinematic analysis and optimization of 2RPU + 2UPR + RPR multi redundant drive parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(3): 440–450. (in Chinese)
- [26] 李菊, 朱忠顺, 沈惠平, 等. 三平移并联机构拓扑设计与运动学分析[J]. 农业机械学报, 2022, 53(9): 425–433, 442. LI Ju, ZHU Zhongqi, SHEN Huiping, et al. Topological design and kinematic analysis of novel three-translational parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(9): 425–433, 442. (in Chinese)
- [27] 周亚杰, 李仕华, 徐奇, 等. 3-PUS-PU 柔顺并联机构运动学分析与优化设计[J]. 农业机械学报, 2022, 53(9): 417–424. ZHOU Yajie, LI Shihua, XU Qi, et al. Kinematic analysis and optimal design of 3-PUS-PU compliant parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(9): 417–424. (in Chinese)
- [28] 方跃法, 黄真. 三自由度 3-RPS 并联机器人机构的运动分析[J]. 机械科学与技术, 1997(1): 86–92. FANG Yuefa, HUANG Zhen. Kinematic analysis of 3-RPS parallel robot mechanism[J]. Mechanical Science and Technology, 1997(1): 86–92. (in Chinese)
- [29] MOUSAVI M A, KARIMI A, MASOULEH M T. On the approximated and maximal singularity-free workspace of 6-UPS parallel mechanisms using convex optimization[C]//Proceedings of the Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2013.