

基于目标导向采样的机器人改进概率路图法研究

陈志勇 吴精华

(福州大学机械工程及自动化学院, 福州 350108)

摘要: 鉴于采样的完全随机性, 传统 PRM 算法往往较难适用于具有狭窄通道工作环境下的机器人路径规划。为此, 本文提出了一种融合全局目标导向采样、局部节点增强的改进概率路图法(Improved PRM), 并将其应用于平面栅格地图场景及六自由度机器人的路径规划。首先将全局目标导向采样与随机采样有机结合, 通过混合采样的方式来提高全局采样点落在狭窄通道内的概率, 实现启发式地图增强; 其次, 经由节点权重思想对位于狭窄通道中的节点进行提取, 并利用基于高斯分布的局部节点增强策略在狭窄通道中扩展新节点, 增强地图连通性, 以提高路径规划的成功率; 最后, 采用冗余节点剔除策略对算法规划的初始路径进行优化。Improved PRM 算法在平面栅格地图中的仿真结果表明, 该算法对于机器人路径规划的成功率可达 89.3% 以上, 且综合评价指数及路径质量评价指数均高于其他算法; 在六自由度机器人的仿真实验中, Improved PRM 算法得到的平均路径代价比传统 PRM 算法降低约 42.7%, 成功通过狭窄通道概率也比传统 PRM 提高 68 个百分点。因此, 相比文中所提其他算法, 在具有狭窄通道的工作环境中, 改进概率路图法在提高路径规划成功率、减少路径节点、保证路径质量等方面具有优势。

关键词: 机器人; 改进概率路图法; 狹窄通道; 路径规划; 全局目标导向采样

中图分类号: TP242 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2023)06-0410-09 OSID: 

Improved Probability Path Graph Method for Robots Based on Goal-oriented Sampling

CHEN Zhiyong WU Jinghua

(School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: Due to the complete randomness of sampling, the traditional PRM algorithm was often difficult to be applied to the robot path planning in the working environment, including narrow channels. To this end, an improved probabilistic roadmap method (Improved PRM) integrating global goal-oriented sampling and local node enhancement was proposed and utilized to the path planning of a planar grid map scene and a 6-DOF robot. Firstly, the global goal-directed sampling was combined with the random sampling in the proposed Improved PRM, and the probability of global sampling points falling into narrow channels was raised by the mixed sampling, so as to achieve the heuristic map enhancement. Secondly, nodes in narrow channels were extracted by using the node weight idea, and a local node enhancement strategy based on Gaussian distribution was used to expand new nodes in narrow channels to enhance the connectivity of the map and the success rate of path planning. Finally, the redundant node elimination strategy was presented to optimize the initial path planned by the algorithm. The simulation results of the Improved PRM algorithm in the planar grid map showed that the success rate of the algorithm for robot path planning was more than 89.3%. Besides, the comprehensive evaluation and path quality evaluation were both higher than that of other algorithms. In the simulation experiment of a 6-DOF robot, the average path cost obtained by the Improved PRM algorithm was about 42.7% lower than that of the traditional PRM algorithm. Meanwhile, the probability of successfully passing through the narrow channel was also 68 percentage points higher than that of the traditional PRM algorithm. Therefore, compared with other algorithms, the Improved PRM algorithm had advantages in improving the success rate of path planning, reducing path nodes, and ensuring path quality in the working environment with narrow channels.

Key words: robot; Improved PRM; narrow channels; path planning; global goal-oriented sampling

收稿日期: 2022-10-20 修回日期: 2022-11-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(11502052)

作者简介: 陈志勇(1984—), 男, 副教授, 博士, 主要从事机器人动力学与控制研究, E-mail: chenzhiyong0203@foxmail.com

0 引言

为提高工作效率、保证任务质量,机器人路径规划问题研究一直深受人们的重视。目前,路径规划方法主要包括 Dijkstra 算法^[1-3]、A* 算法^[4-6]、人工势场法^[7-10]、快速扩展随机树 (Rapidly exploring random tree, RRT)^[11-13]、概率路图法 (Probabilistic roadmap method, PRM)^[14-16]等。

Dijkstra 算法^[17]虽然在地图中可以找到一条全局最优路径,但会扩展出大量冗余的节点,导致搜索时间大量增加。而 A* 算法、人工势场法等算法虽在二维路径规划中有着不错的效果,但随着维度增加、空间复杂度提升,算法整体计算量骤增,并可能陷入局部最优值。RRT 算法是一种基于随机采样且可用于高维空间下的路径搜索法,但 RRT 算法存在偏离最优解、局部扩展缓慢等问题,如文献[18]提出了基于双向搜索树的 RRT-Connect 算法,该算法虽可有效提高搜索效率,但在复杂环境中仍然存在随机性强、难以找到路径等问题。与 RRT 算法类似,PRM 算法亦是一种基于随机采样的路径规划算法,该方法同样有助于机器人在高维空间中寻找到一条可行路径,且具有计算量小、实时性好等优点,已被广泛应用于各类机器人的路径规划。不过值得注意的是,传统 PRM 算法采用的是完全随机的采样策略,为保证算法搜索效率,当采样点数量一定时,若其中的多数随机采样点刚好落在障碍物空间中,则会使自由空间中的采样点数变少,地图连通性降低,可能会导致搜索路径失败;尤其当遇到狭窄通道或者大量障碍物时,传统 PRM 算法将更难在工作空间中规划出一条可行路径。为了解决这一问题,最直接的方法就是重新采样并增加更多的采样点,使之在自由空间的采样点数量增多;但该方法难以确定有效增加在狭窄区域的采样点,反而会使路径规划整体时间呈指数性增长,并大大降低其实时性。为此,近年来许多学者针对 PRM 算法又提出了各种改进方法。如文献[19]提出了高斯采样方法,高斯采样是基于障碍物的密度使得狭窄区域中的采样点有效增加,但高斯采样法会在障碍物附近增加许多不必要的节点,造成了节点浪费。文献[20]提出了一种桥梁测试方法,该方法从障碍物中提取两个采样点,如果两个采样点的中点位于自由空间中,则将该点加入到自由点集;该方法虽可有效增加狭窄区域的采样点密度,但会有较多的路标分布在障碍物凹陷处和拐角处,导致路径规划效率变低。

为实现机器人在具有狭窄通道工作环境下的有效路径规划,本文提出一种融合全局目标导向采样、

局部节点增强的 Improved PRM 算法。该算法采用基于全局目标导向采样及随机采样的混合采样方式来提高全局采样点落在狭窄通道内的概率,以实现启发式地图增强;利用节点权重思想提取位于狭窄区域的节点,并在提取的节点周围通过高斯分布来扩展其附近的节点,以增强地图连通性,提高算法路径规划成功率;通过冗余节点剔除策略,有效减少路径节点数及路径代价,实现算法的路径优化。通过仿真对比实验,对 Improved PRM 算法在机器人路径规划上的可行性及有效性进行验证。

1 PRM 基本原理及六自由度机器人模型

1.1 PRM 基本原理

作为解决高维空间下机器人路径规划问题的主要方法之一,基于全局随机采样及图搜索的 PRM 算法的实现主要分为离线学习阶段和查询阶段。

离线学习阶段是指在给定的工作空间中构建一幅无向路径图。首先,在给定的工作空间中通过全局、完全随机采样得到一定数量的采样点,去除落在障碍物空间中的采样点,保留自由空间中采样点,得到自由节点集 R 。然后,利用局部规划器对自由空间中的两点连线作碰撞检测。局部规划器具体做法是把自由节点集 R 中每个采样点与在其邻域半径范围内的采样点尝试连接,并进行碰撞检测;若两点连线与障碍物干涉,则舍弃该连线;若无干涉,则保留该连线,进而得到点集 R 中每个采样点所对应的邻域点集^[21],并以此构建无向路径图 $\bar{N}(R, E_r)$ 。

查询阶段是指在给定的起始位置和目标位置的条件下,根据离线学习阶段得到的无向路径图上,采用 A* 算法在起始点和目标点之间搜索到一条可行的无碰撞路线。

1.2 六自由度机器人运动学模型

本文以一种六自由度机器人作为 Improved PRM 算法的应用对象。该机器人具有 6 个旋转自由度 $\theta_j (j=1, 2, \dots, 6)$,且 θ_j 表示机械臂连杆 j 相对于前一个连杆 $j-1$ 的关节角。据文献[22],机器人末端操作器连体坐标系相对于基座连体坐标系的齐次变换矩阵为

$${}^0\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}(\theta_1) {}^1_2\mathbf{T}(\theta_2) {}^2_3\mathbf{T}(\theta_3) {}^3_4\mathbf{T}(\theta_4) {}^4_5\mathbf{T}(\theta_5) {}^5_6\mathbf{T}(\theta_6) = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中

$${}^{j-1}_j\mathbf{T}(\theta_j) = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 & a_{j-1} \\ \sin\theta_j \cos\alpha_{j-1} & \cos\theta_j \cos\alpha_{j-1} & -\sin\alpha_{j-1} & -d_j \sin\alpha_{j-1} \\ \sin\theta_j \sin\alpha_{j-1} & \cos\theta_j \sin\alpha_{j-1} & \cos\alpha_{j-1} & d_j \cos\alpha_{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{T}_{j-1}^j(\theta_j)$ ——机器人连杆 j 相对于连杆 $j-1$ 的齐次变换矩阵
 α_{j-1} ——连杆 $j-1$ 与连杆 j 间的连杆扭角
 a_{j-1} ——连杆 $j-1$ 的长度
 d_j ——连杆 $j-1$ 与连杆 j 公法线间的距离
 $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ ——机器人末端操作器的姿态
 \mathbf{p} ——机器人末端操作器的空间位置

利用式(1)对机器人进行逆运动学求解,可容易将其末端操作器位姿映射到系统各关节转角 $\theta_j(j=1,2,\dots,6)$ 上(即反解出机器人各关节转角)。显然,机器人末端操作器的路径规划问题可以转换成关节空间层面上的路径规划问题。

2 融合全局目标导向采样、局部节点增强的 Improved PRM 算法

受采样随机性的限制,传统 PRM 算法在狭窄通道的通过性往往较差。考虑到机器人在特殊情况下又需要经过指定的狭窄通道进行操作,若直接采用传统 PRM 算法对此类机器人进行规划,则算法的成功率将难以得到保证。为此,本文将在传统 PRM 算法框架的基础上,着重对其学习阶段的无向图构建方式进行改进,提出一种基于全局目标导向采样、局部节点增强、冗余节点剔除的机器人 Improved PRM 算法,并将该算法应用于平面栅格地图场景及六自由度机器人路径规划。

2.1 基于全局目标导向采样的启发式地图增强方法

为构建一幅无向图,传统 PRM 算法采用全局随机采样,由于此种采样方式过于随机、单一,在机器人工作空间的狭窄通道中很难获取足够的采样点,因此所得的无向图连通性较差,难以保证后续路径搜索成功率。为此,本文引入了一种目标区域导向采样规则,并将其与随机采样方式相结合,作为 Improved PRM 算法的全局采样方式。首先,以机器人在给定工作空间中的始末位置分别作为算法采样的起始节点及目标节点;接着,从起始节点往目标节点方向确定采样目标区域,并在该区域进行合理的导向采样预处理,以获得一定数量的全局导向采样点,提高采样点落在狭窄通道中的概率;最后,再在工作空间中进行惯常的随机采样,来获得剩下的全局采样点。

设 $\mathbf{q}_{\text{guid}} = (q_1^{\text{guid}}, q_2^{\text{guid}}, \dots, q_n^{\text{guid}})^T$ 表示通过目标区域导向采样得到的 n 维采样节点, $\mathbf{q}_{\text{start}} = (q_1^{\text{start}}, q_2^{\text{start}}, \dots, q_n^{\text{start}})^T$ 表示起始节点, $\mathbf{q}_{\text{goal}} = (q_1^{\text{goal}}, q_2^{\text{goal}}, \dots, q_n^{\text{goal}})^T$ 表示目标节点,则目标区域导向采样方式可设计为

$$\mathbf{q}_{\text{guid}} = \mathbf{q}_{\text{start}} + D_0 \mathbf{F}_{\text{rf}} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{F}_{\text{rf}} = (r_1 f_1, r_2 f_2, \dots, r_n f_n)^T$

式中 D_0 ——从起始节点往目标节点方向辐射采样的算法调控系数
 \mathbf{F}_{rf} ——导向性采样函数列向量
 r_i ——第 $i(i=1,2,\dots,n)$ 维方向上变量的采样步长
 f_i ——第 $i(i=1,2,\dots,n)$ 维方向上变量的采样函数

通过设计不同形式的采样步长 r_i 及采样函数 f_i 来获得各种满足特定采样规则的导向性采样节点。在获得导向采样点后,对采样点进行是否处于自由空间的判定。若该采样点刚好落在障碍物空间中,则舍去该节点;反之,则将其加入到自由节点集 R 中。

剩下的全局采样点,采用随机采样方式,即

$$\mathbf{q}_{\text{rand}} = \mathbf{q}_{\min} + (\mathbf{q}_{\max} - \mathbf{q}_{\min}) \text{rand}[0,1] \quad (3)$$

其中 $\mathbf{q}_{\text{rand}} = (q_1^{\text{rand}}, q_2^{\text{rand}}, \dots, q_n^{\text{rand}})^T$

$$\mathbf{q}_{\min} = (q_1^{\min}, q_2^{\min}, \dots, q_n^{\min})^T$$

$$\mathbf{q}_{\max} = (q_1^{\max}, q_2^{\max}, \dots, q_n^{\max})^T$$

式中 \mathbf{q}_{rand} ——通过随机采样得到的 n 维采样节点

\mathbf{q}_{\min} ——由节点各维变量在工作空间中所能取到的最小值组成的列向量

\mathbf{q}_{\max} ——由节点各维变量在工作空间中所能取到的最大值组成的列向量

$\text{rand}[0,1]$ ——在 $[0,1]$ 内选取的随机数

类似地,在获得全局随机采样点后,对采样点进行是否处于自由空间的判定。若该采样点刚好落在障碍物空间中,则舍去该节点;反之,则将其继续加入到自由节点集 R 中。

2.1.1 方法在平面栅格地图场景中的实现

文献[23]提出了一种目标导向采样方法,该方法可实现无人机在特定起始点和特定目标点连线方向上的目标区域外扩辐射圆导向采样;不过由于受采样规则限制,该算法采样时引导方向单一,应用灵活性受到限制。为此,拟通过式(2)中调控系数 D_0 来对原采样规则进行修正,使修正后算法的导向性更加灵活、实用。

为实现平面栅格地图场景下目标区域的导向采样,定义地图左上角位置为原点,地图水平方向为 x 轴方向(水平朝右为正向),垂直方向为 y 轴方向(垂直朝下为正向),起始节点、目标节点及导向采样节点分别为 $\mathbf{q}_{\text{start}} = (x^{\text{start}}, y^{\text{start}})^T$ 、 $\mathbf{q}_{\text{goal}} = (x^{\text{goal}}, y^{\text{goal}})^T$ 及 $\mathbf{q}_{\text{guid}} = (x^{\text{guid}}, y^{\text{guid}})^T$ 。于是,始末两节点连线方向与 x 轴正向的偏角 α 可表示为

$$\alpha = \arctan \frac{y^{\text{goal}} - y^{\text{start}}}{x^{\text{goal}} - x^{\text{start}}} \quad (4)$$

其中, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, 以顺时针转向为正, 且当 $x^{\text{start}} = x^{\text{goal}}$ 时, α 取 $\pi/2$ 。

为实现在栅格地图下的均匀外扩辐射圆采样, 设计采样函数列向量 \mathbf{F}_{rf} 为

$$\mathbf{F}_{\text{rf}} = \begin{pmatrix} r_1 f_1 \\ r_2 f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 n_0 \cos \left(\frac{2\pi m}{kn_0} + \alpha \right) \\ R_0 n_0 \sin \left(\frac{2\pi m}{kn_0} + \alpha \right) \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中 $r_1 = r_2 = R_0$ $m = -i_0 + 1, -i_0 + 2, \dots, i_0 - 1$

式中 R_0 ——辐射圆的外扩步长

m ——辐射圆心角控制系数 ($i_0 \leq k$, 且 i_0 选取越大, 圆心角就越大; 反之亦然)

i_0 —— m 取值范围的调节参数

k ——辐射圆上的采样点数 (k 取值越大, 则在起始点和目标点连线附近的采样点越密集, 在自由空间中的采样占比越大; 反之亦然), 取 $k > 0$

n_0 ——外扩的辐射同心圆序号, $n_0 = 1, 2, \dots, N$

其中辐射圆总数 N 计算式为

$$N = \text{Int} \left[\frac{\sqrt{(x^{\text{goal}} - x^{\text{start}})^2 + (y^{\text{goal}} - y^{\text{start}})^2}}{R_0} \right] \quad (6)$$

式中 $\text{Int}[\cdot]$ ——对计算结果的取整函数

为使采样算法可以自动根据始末节点在平面栅格地图中的具体位置进行方向调控, 选取调控系数 D_0 为

$$D_0 = \begin{cases} 1 & \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} > 0 \right) \\ -1 & \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} < 0 \right) \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{A} = (x^{\text{goal}} - x^{\text{start}}, y^{\text{goal}} - y^{\text{start}})^T$ $\mathbf{B} = (1, 0)^T$

式中 \mathbf{A} ——从起始节点 $\mathbf{q}_{\text{start}}$ 到目标节点 \mathbf{q}_{goal} 的方向矢量

\mathbf{B} —— x 轴基矢量

另外, 当 $\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = 0$ 时 (即当 $x^{\text{start}} = x^{\text{goal}}$ 时), 若 $y^{\text{goal}} - y^{\text{start}} > 0$, 则 D_0 取 1; 若 $y^{\text{goal}} - y^{\text{start}} < 0$, 则 D_0 取 -1。

在随机采样方面, 平面栅格地图的随机采样点可表示为 $\mathbf{q}_{\text{rand}} = (x^{\text{rand}}, y^{\text{rand}})^T$, 取式(3)中的 $\mathbf{q}_{\min} = (0, 0)^T$, $\mathbf{q}_{\max} = (V_1, V_2)^T$ 。其中, V_1 、 V_2 分别为栅格地图水平及垂直方向上的维度。

2.1.2 方法在六自由度机器人中的实现

为实现六自由度机器人在关节空间下的目标区域导向采样, 先利用机器人逆运动学关系将末端操作器的起末位置分别映射到机器人关节空间描述下的始末位置, 进而定义起始节点 $\mathbf{q}_{\text{start}} =$

$(\theta_1^{\text{start}}, \theta_2^{\text{start}}, \dots, \theta_6^{\text{start}})^T$, 目标节点 $\mathbf{q}_{\text{goal}} = (\theta_1^{\text{goal}}, \theta_2^{\text{goal}}, \dots, \theta_6^{\text{goal}})^T$, 导向采样节点 $\mathbf{q}_{\text{guid}} = (\theta_1^{\text{guid}}, \theta_2^{\text{guid}}, \dots, \theta_6^{\text{guid}})^T$ 。由于机器人 6 个关节均为独立旋转关节铰, 故目标导向采样函数可选用对各关节转角进行独立、始末范围内的定向采样方式。为此, 将式(2)中的算法调控系数 D_0 直接选取为 1 (即进行定向采样)。同时, 采样函数列向量 \mathbf{F}_{rf} 可设计为

$$\mathbf{F}_{\text{rf}} = \begin{pmatrix} r_1 f_1 \\ \vdots \\ r_6 f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\theta_1^{\text{goal}} - \theta_1^{\text{start}}}{u_1} \text{rand}[0, u_1] \\ \vdots \\ \frac{\theta_6^{\text{goal}} - \theta_6^{\text{start}}}{u_6} \text{rand}[0, u_6] \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\text{其中 } r_j = \frac{\theta_j^{\text{goal}} - \theta_j^{\text{start}}}{u_j} \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

式中 r_j ——机械臂第 j 个关节的采样步长

u_j ——用于第 j 个关节始末角度等分的正整数

$\text{rand}[0, u_j]$ ——随机在 $0 \sim u_j$ 中选取的整数, 主要用于控制第 j 个关节在始末范围内的定向采样位置

在随机采样方面, 六自由度机器人的随机采样点可表示为 $\mathbf{q}_{\text{rand}} = (\theta_1^{\text{rand}}, \theta_2^{\text{rand}}, \dots, \theta_6^{\text{rand}})^T$, 取式(3)中的 $\mathbf{q}_{\min} = (\theta_1^{\text{min}}, \theta_2^{\text{min}}, \dots, \theta_6^{\text{min}})^T$, $\mathbf{q}_{\max} = (\theta_1^{\text{max}}, \theta_2^{\text{max}}, \dots, \theta_6^{\text{max}})^T$, 且 θ_j^{min} 和 θ_j^{max} 分别为机器人第 j 个关节的转角下限值和上限值。

2.2 基于高斯分布的局部节点增强策略

传统 PRM 算法利用局部规划器对自由节点集 R 中各节点与其邻域半径 ρ_0 范围内的其他节点作碰撞检测, 以获得各节点的邻域点集, 进而得到无向图。前述基于全局目标导向采样的地图增强方法虽可在工作空间狭窄通道内增加一定的采样点, 但数量仍有限且各节点间的连通性依然较差。为进一步提高算法连通性, 有必要利用狭窄通道内已有节点来扩展出更多的狭窄通道局部新节点。为此, 本文结合节点权重思想^[24] 对位于狭窄区域的节点进行提取, 并给出一种基于高斯分布的局部节点增强策略。

设全局采样得到的自由节点集 R 包含有 N_1 个节点, \mathbf{q}_γ 表示第 γ ($\gamma = 1, 2, \dots, N_1$) 个节点。首先, 利用局部规划器在自由节点集 R 中所有采样点邻域内作碰撞检测; 其次, 根据碰撞检测结果, 计算 \mathbf{q}_γ 位于狭窄区域的权重 $w(\mathbf{q}_\gamma)$ 为

$$w(\mathbf{q}_\gamma) = \frac{P(\mathbf{q}_\gamma)}{\sum_{\gamma=1}^{N_1} P(\mathbf{q}_\gamma)} \quad (9)$$

其中

$$P(\mathbf{q}_\gamma) = \frac{\bar{f}(\mathbf{q}_\gamma)}{s(\mathbf{q}_\gamma) + 1}$$

式中 $P(\mathbf{q}_\gamma)$ ——节点 \mathbf{q}_γ 的局部规划失败率

$\bar{f}(\mathbf{q}_\gamma)$ ——局部规划器连接失败的次数

$s(\mathbf{q}_\gamma)$ ——局部规划器尝试连接节点 \mathbf{q}_γ 到其他节点的总次数

设狭窄区域权重判定阈值为 w_0 , 当 $w(\mathbf{q}_\gamma) > w_0$ 时, 则可认为节点 \mathbf{q}_γ 位于狭窄区域内; 反之亦然。最后, 将所有位于狭窄区域的点放入狭窄区域节点集 W 中。

若狭窄区域节点集 W 共有 N_2 个节点, 则在点集 W 的各节点 \mathbf{q}_ζ ($\zeta = 1, 2, \dots, N_2$) 周围通过高斯分布规律来扩展一定数量的新节点, 即

$$\mathbf{q}_{\text{new}} = \mathbf{q}_\zeta + \mathbf{g} \text{Gaussian}[0, 1] \quad (10)$$

式中 Gaussian[0, 1]——标准正态分布的随机数

\mathbf{g} —— n 维高斯分布采样的范围幅值列向量以此来增加狭窄通道中的节点数, 增强狭窄通道的连通性。

对于新扩展出来的局部节点, 去除位于障碍物空间的节点, 保留位于自由空间中的节点, 并将这些节点再次加入自由节点集 R 中。利用局部规划器再次对更新后的自由节点集 R 进行碰撞检测, 得到各采样点的邻域点集 E_γ , 并最终得到更新后的无向图。

2.3 基于冗余节点剔除的路径优化策略

鉴于前述无向图中的多数节点仍是通过随机方式产生的, 所以改进 PRM 算法若直接利用 A* 算法进行路径搜索, 得到的初始路径将存在有较多的冗余节点。为了减少路径节点、缩短路径长度, Improved PRM 算法通过剔除冗余节点、提取关键节点来优化 A* 算法得到的初始路径。

以图 1 为例进行简单说明。设图中黑色表示障碍物, A* 算法得到的初始路径点集为 $Q = \{\mathbf{q}_{\text{start}}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5, \mathbf{q}_6, \mathbf{q}_{\text{goal}}\}$ (图中的黑色实线路径)。首先, 以起始节点 $\mathbf{q}_{\text{start}}$ 为基础建立关键节点集 $Q' = \{\mathbf{q}_{\text{start}}\}$; 之后, 将关键节点 $\mathbf{q}_{\text{start}}$ 与初始点集 Q 中的后续节点进行连接, 如果两个路径节点连线没有与障碍物干涉, 则继续连接下一个节点; 如果碰撞到障碍物, 则把前一个节点放入到关键节点集 Q' 中, 并把该节点作为新的关键节点与 Q 中剩余节点逐个进行尝试连接并进行相应的碰撞检测; 重复以上步骤, 直至遍历到目标节点 \mathbf{q}_{goal} ; 最后将得到的关键节点集 $Q' = \{\mathbf{q}_{\text{start}}, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_5, \mathbf{q}_{\text{goal}}\}$ 中的各节点依次连接起来, 即可得到最终的优化路径(图中的虚线路径)。

2.4 路径规划实现步骤

Improved PRM 算法的路径规划步骤如下:

(1) 在工作空间中, 设 $\mathbf{q}_{\text{start}}$ 为起始点, \mathbf{q}_{goal} 为目

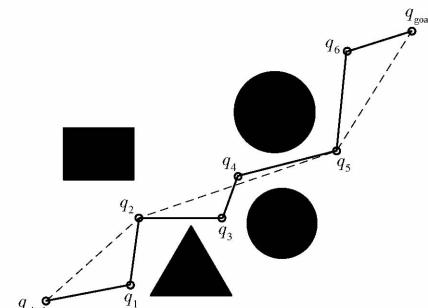


图 1 兀余节点剔除示意图

Fig. 1 Redundant node removal diagram

标点, 算法邻域半径为 ρ_0 。

(2) 根据目标导向采样规则 $\mathbf{q}_{\text{guid}} = \mathbf{q}_{\text{start}} + D_0 \mathbf{F}_{\text{rf}}$, 在工作空间中获得一定数量的目标区域采样点, 并将其中位于自由空间的采样点加入到自由节点集 R 中。

(3) 根据随机采样规则 $\mathbf{q}_{\text{rand}} = \mathbf{q}_{\text{min}} + (\mathbf{q}_{\text{max}} - \mathbf{q}_{\text{min}}) \text{rand}[0, 1]$, 在工作空间中进行一定数量的随机采样, 并将位于自由空间的采样点也加入到自由节点集 R 中。

(4) 利用局部规划器对自由节点集 R 中每个采样点 \mathbf{q}_γ 和其邻域半径 ρ_0 范围内的其他采样点的连线与障碍物作碰撞检测; 若连线与障碍物干涉, 则舍弃 \mathbf{q}_γ 与其邻域 ρ_0 范围内采样点的连线; 反之, 则保留; 遍历完 \mathbf{q}_γ 邻域范围内的所有采样点后, 得到采样点 \mathbf{q}_γ 的邻域点集 E_γ 。

(5) 不断重复步骤(4), 待遍历完自由节点集 R 中每个节点后, 得到无向图 $\bar{N}(R, E_\gamma)$ 。

(6) 计算自由节点集 R 中每个采样点 \mathbf{q}_γ 位于狭窄区域的权重 $w(\mathbf{q}_\gamma)$, 若 $w(\mathbf{q}_\gamma) > w_0$, 则将该点加入到狭窄区域节点集 W ; 反之亦然。

(7) 不断重复步骤(6), 待遍历完 R 中所有节点后, 得到最终更新后的狭窄区域节点集 W 。

(8) 利用节点增强策略 $\mathbf{q}_{\text{new}} = \mathbf{q}_\zeta + \mathbf{g} \text{Gaussian}[0, 1]$ 对点集 W 中的节点 \mathbf{q}_ζ 进行周围新节点扩展, 并将位于自由空间的新节点也加入到自由节点集 R 中。

(9) 不断重复步骤(8), 待遍历完狭窄区域节点集 W 中每个节点后, 得到更新后的自由节点集 R 。

(10) 利用步骤(4)~(5), 得到更新后的无向图 $\bar{N}(R, E_\gamma)$ 后, 跳转至步骤(11)。

(11) 使用 A* 算法在无向图 $\bar{N}(R, E_\gamma)$ 中搜索出一条从起始点到目标点的初始路径。

(12) 使用冗余节点删除策略, 删除初始路径中冗余的节点, 得到最终路径。

3 仿真实验

首先对传统 PRM 算法、Gaussian PRM 算法、

RRT-Connect 算法、Improved PRM 算法在平面栅格地图场景中进行仿真实验,通过不同算法在路径规划成功率、时间、路径质量的分析来检验 Improved PRM 算法的有效性。其次,在 ROS 仿真平台上建立六自由度机器人仿真模型及具有狭窄通道的仿真环境,并将 Improved PRM 算法应用于机器人路径规划仿真实验。通过 Improved PRM 算法与传统 PRM 算法的仿真结果对比,证实所提算法的可行性。

3.1 平面栅格地图仿真实验

如图 2 所示,给定的平面栅格地图尺寸为 $500 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$,图中符号“ \times ”表示机器人起始点 $q_{\text{start}} = (1 \text{ mm}, 1 \text{ mm})^T$, 符号“ \triangle ”代表目标点 $q_{\text{goal}} = (450 \text{ mm}, 400 \text{ mm})^T$, 狹窄通道用椭圆形框框出。实验中,RRT-Connect 算法的采样步长设为 50 mm , 传统 PRM、Gaussian PRM、Improved PRM 算法在地图中的总采样点数均设为 300 个,邻域半径 ρ_0 设为 70 mm 。同时,Gaussian PRM 算法中的高斯分布采样的范围幅值列向量设为 $\mathbf{g} = (25.0 \text{ mm}, 25.0 \text{ mm})^T$; Improved PRM 算法的其他参数设为 $R_0 = 50 \text{ mm}$, $\mathbf{g} = (25.0 \text{ mm}, 25.0 \text{ mm})^T$, $w_0 = 0.015$ 。在相同环境下,每种算法各进行 150 次仿真实验,仿真结果见表 1。图 2 分别给出了传统 PRM、Gaussian PRM、RRT-Connect、Improved PRM 算法仿真中某

次成功规划的路径图;需要指出的是,图 2 中绿色点均表示各算法通过随机采样得到的采样点,图 2d 中蓝色点表示全局目标导向采样得到辐射圆采样点,红色点为狭窄通道内通过局部高斯扩展出的采样点。在前述 Improved PRM 算法仿真中,利用狭窄区域节点集 W 中节点扩展出来的满足高斯分布的部分增强节点参数见表 2。

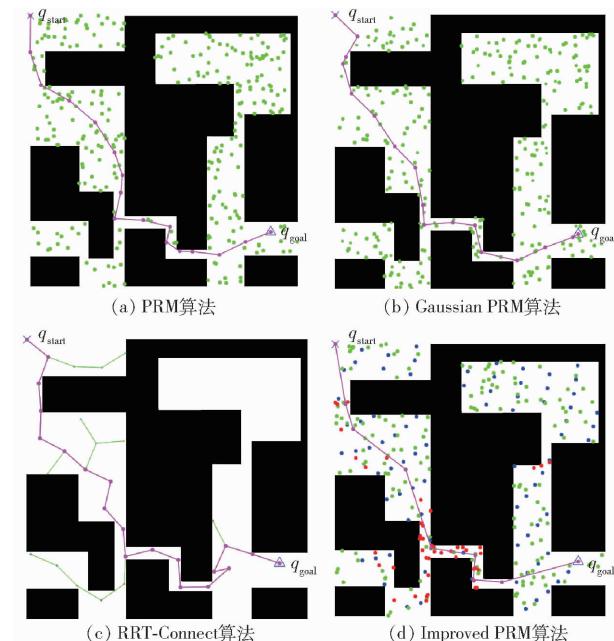


图 2 4 种算法得到的路径图

Fig. 2 Path graphs obtained by four algorithms

表 1 4 种算法仿真结果数据对比

Tab. 1 Comparison of simulation results of four algorithms

算法	参数 k	平均路径规划成功率/%	平均规划时间/s	平均路径节点数	平均路径代价/mm	综合评价指数	全局目标区域导向采样总点数与总采样点数比值/%
PRM		47.6	0.981	15.474	784.300	16.509	
Gaussian PRM		72.0	0.954	15.464	782.336	25.754	
RRT-Connect		29.6	0.890	19.788	903.662	9.825	
Improved PRM	18	100	0.956	8.847	766.537	36.430	42
Improved PRM	16	100	0.957	8.687	765.280	36.465	38
Improved PRM	14	95.3	0.964	8.986	765.633	34.494	32
Improved PRM	12	89.3	0.996	8.863	765.873	31.264	28

表 2 基于高斯分布扩展的部分节点参数

Tab. 2 Parameters of some nodes extended by Gaussian distribution

狭窄区域节点集 W 的部分节点坐标	基于高斯分布扩展的节点坐标
(266,416)	(237,374), (258,412), (269,374)
(162,358)	(159,353), (178,376), (158,329)
(254,397)	(224,392), (243,379), (269,385)
(185,377)	(162,378), (173,393), (184,382)
(263,410)	(265,415), (256,414), (260,448)

为了判断算法规划路径的性能,定义综合评价指数 E_1 为

$$E_1 = \frac{0.4SL_{\min}}{0.3L_{\text{now}} \times 0.3t} \times 10 \quad (11)$$

式中 S ——算法路径规划成功率

L_{\min} ——起始点到目标点连线的始末长度

L_{now} ——路径代价

t ——算法路径规划时间

由表 1 可知,RRT-Connect 算法的路径规划成功率最低,只有 29.6%,这说明 RRT-Connect 算法在这种存在狭窄通道的工作环境中较难规划出一条可行的路径。Gaussian PRM 算法的成功率较传统 PRM 算法高 24.4 个百分点,说明 Gaussian PRM 算法可在一定程度上提高路径规划的成功率。由于采

样密度不一样(即参数 k 选取), Improved PRM 算法的成功率最高值为 100%, 最低值为 89.3%, 均高于其他算法, 这说明 Improved PRM 算法可以大幅提高路径规划成功率。

在算法平均规划时间上, 4 种算法的平均规划用时差距不明显, 传统 PRM 算法用时最多, RRT - Connect 算法用时最少。所以在相同的环境下, Improved PRM 算法在不多耗费时间的基础上, 可以有效地提高机器人路径规划的成功率, 保证算法路径规划的稳定性。

从综合评价指数来看, Improved PRM 的综合评价指数均比其他算法高。Improved PRM 综合评价指数最高值 36.465 比其他算法最高值 25.754 高 41.59%, 则说明 Improved PRM 较其他算法能够更有效地在具有狭窄通道的复杂环境中找到一条无碰撞的较优路径。从表 1 可知, 当全局目标区域导向采样占比为 32% ~ 42% 时, 路径规划的成功率较高, 综合评价指数也较高。

传统 PRM、Gaussian PRM、RRT - Connect、Improved PRM 算法均涉及随机采样, 寻找的路径随机性较强, 所以规划出来的路径会存在较多的冗余节点, 导致机器人的运行时间会随之增加, 因此优化路径质量显然很有必要。本文路径质量评价指数 E_2 计算式为

$$E_2 = \left(1 - \frac{L_{\text{now}} - L_{\min}}{L_{\min}} \right) \frac{10}{N_{\text{sum}}} \quad (12)$$

式中 N_{sum} —— 路径节点数

表 3 为 4 种算法得到的路径质量对比情况。由表 3 可以看出, RRT - Connect 的平均路径代价最大, 路径节点数最多, 路径质量评价指数最低, 仅有 25.0%。Gaussian PRM 的路径质量评价指数比传统 PRM 的路径质量评价指数高 0.2 个百分点, Improved PRM 的路径质量评价指数最高值 83.6% 比 Gaussian PRM 高 38.5 个百分点, 这说明 Improved PRM 找到的路径质量更优。

表 3 路径质量对比

Tab. 3 Path quality comparison

算法	参数 k	平均路径 节点数	平均路径 代价/mm	路径质量评 价指数/%
PRM		15.474	784.300	44.9
Gaussian PRM		15.464	782.336	45.1
RRT - Connect		19.788	903.662	25.0
Improved PRM	18	8.847	766.537	81.8
Improved PRM	16	8.687	765.280	83.6
Improved PRM	14	8.986	765.633	80.7
Improved PRM	12	8.863	765.873	81.8

上述分析可知, 本文所提 Improved PRM 算法可以大幅地提高路径规划的成功率, 有效减少路径节点数, 降低路径代价, 比传统的 PRM、Gaussian PRM 及 RRT - Connect 算法能够更容易地找到一条无碰撞的可行路径。

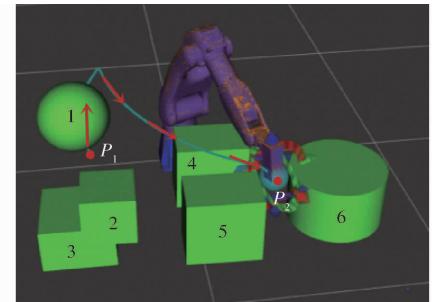
3.2 基于 ROS 平台的六自由度机器人仿真实验

为进一步验证 Improved PRM 算法的可行性, 本文在 ROS 仿真平台中选用 MOTOMAN - GP7 型六自由度机器人作为仿真对象, 该机器人的 D - H 参数见表 4, 同时构造具有狭窄通道的复杂仿真环境, 见图 3a; 并继续利用 Improved PRM 及传统 PRM 算法对机器人做路径规划仿真对比实验。在图 3a 中, 参考坐标系建立在机器人基座中心处, 各障碍物形状、尺寸及位置信息见表 5。

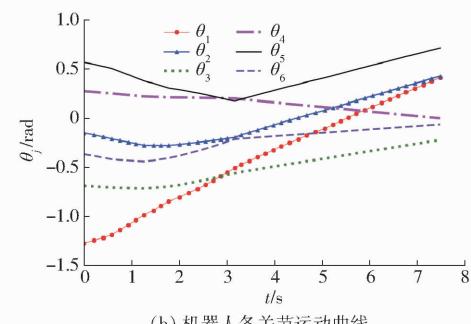
表 4 MOTOMAN - GP7 的 D - H 参数

Tab. 4 D - H parameters of MOTOMAN - GP7

关节 j	α_{j-1} /rad	a_{j-1} /mm	d_j /mm	θ_j /rad	可动范围/rad
1	0	0	330	0	-2.97 ~ 2.97
2	-1.57	40	0	-1.57	-1.22 ~ 3.32
3	3.14	445	0	0	-2.02 ~ 4.45
4	-1.57	40	-440	0	-3.32 ~ 3.32
5	1.57	0	0	-1.57	-2.36 ~ 2.36
6	-1.57	0	-80	0	-6.28 ~ 6.28



(a) 运动过程



(b) 机器人各关节运动曲线

图 3 传统 PRM 算法仿真结果

Fig. 3 Simulation results of traditional PRM algorithm

仿真时, 要求机器人末端操作器从起始点 P_1 (位置坐标为 $(0.17 \text{ m}, -0.45 \text{ m}, 0.43 \text{ m})$ 、RPY 角为 $(0.13 \text{ rad}, -3.13 \text{ rad}, 2.02 \text{ rad})$) 尽可能经由障

表5 障碍物信息

Tab. 5 Obstacles' information

障碍物序号	形状	尺寸/m	位置/(m × m × m)
1	球体	0.15(半径)	(0.39, -0.49, 0.56)
2	长方体	0.2(长), 0.2(宽), 0.2(高)	(0.86, -0.38, 0.44)
3	长方体	0.3(长), 0.2(宽), 0.3(宽)	(0.61, -0.50, 0.14)
4	长方体	0.3(长), 0.2(宽), 0.3(高)	(0.44, 0.07, 0.28)
5	长方体	0.3(长), 0.2(宽), 0.3(高)	(0.80, 0.06, 0.28)
6	圆柱体	0.2(半径), 0.25(高)	(0.65, 0.57, 0.25)

碍物2、4、5所形成的狭窄通道抵达目标点 P_2 (位置坐标为(0.65 m, 0.29 m, 0.35 m)、RPY角为(-3.08 rad, -0.06 rad, 0.41 rad))。为此,利用ROS平台的KDL逆运动学求解器将机器人末端始末位姿转换为关节空间下各关节的始末位置,进而得到算法的起始节点 $q_{start} = (-1.27 \text{ rad}, -0.15 \text{ rad}, -0.69 \text{ rad}, 0.28 \text{ rad}, 0.57 \text{ rad}, -0.37 \text{ rad})^T$ 和目标节点 $q_{goal} = (0.41 \text{ rad}, 0.43 \text{ rad}, -0.22 \text{ rad}, 0 \text{ rad}, 0.72 \text{ rad}, -0.06 \text{ rad})^T$ 。

仿真时,传统PRM、Improved PRM算法的邻域半径 ρ_0 均设为2 rad,此外,Improved PRM算法进行全局导向性采样概率设为37%, $u_j = 6$ ($j = 1, 2, \dots, 6$), $w_0 = 0.002$, $g = (0.8 \text{ rad}, 0.8 \text{ rad})^T$ 。

利用传统PRM算法及Improved PRM算法分别对ROS平台中的机器人进行50次成功的路径规划仿真实验,并记录下2种算法每次路径规划所得到的路径代价、规划时间及狭窄通道的通过频次。此外,为保证机器人能够平稳地从初始位置运动到目标位置,采用三次样条插值法来生成机器人各个关节的运动曲线^[25]。图3为利用传统PRM进行某次路径规划得到的机器人运动过程图及各关节转角变化曲线,图4为利用Improved PRM进行某次路径规划得到的机器人运动路径图及各关节转角变化曲线。

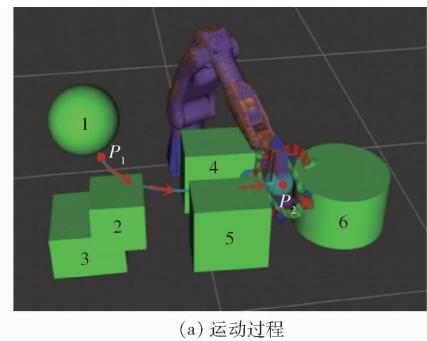
利用曼哈顿距离定义机器人总路径代价为

$$L_d = \sum_{i_z=1}^{N_z-1} \sum_{j_z=1}^6 |\theta_{j_z}^{(i_z+1)} - \theta_{j_z}^{(i_z)}| \quad (13)$$

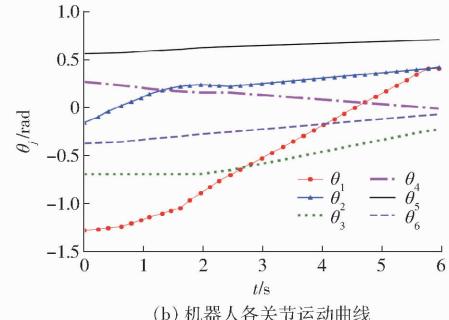
式中 N_z ——每次路径规划得到的总节点数

计算两种算法50次仿真实验的平均路径代价、平均耗时及通过狭窄通道次数,见表6。

由表6可知,在50次仿真实验中,两种算法在平均路径规划时间上并无太大差别,但Improved PRM算法得到的平均路径代价比传统PRM算法降低42.7%,成功通过狭窄通道的概率也比传统PRM提高68个百分点。



(a) 运动过程



(b) 机器人各关节运动曲线

图4 Improved PRM算法仿真结果

Fig. 4 Simulation results of Improved PRM algorithm

表6 两种算法仿真结果对比

Tab. 6 Comparison of simulation results of two algorithms

算法	平均路径代价/rad	平均规划时间/s	通过狭窄通道次数
PRM	7.550	5.008	7
Improved PRM	4.325	5.021	41

68个百分点。显然,融合目标导向采样及局部节点增强的Improved PRM比传统PRM算法更适于机器人在具有狭窄通道的复杂环境中进行有效地路径规划。

4 结束语

针对具有狭窄通道的工作环境,本文提出了一种融合全局目标导向、局部节点增强的机器人Improved PRM算法。该算法中基于全局目标导向采样及随机采样的混合采样方式,可提高全局采样点落在狭窄通道内自由空间的概率,实现启发式地图增强;基于高斯分布的局部节点增强策略,可有效增强算法在狭窄空间下连通性,提高路径规划的成功率;冗余节点删除策略又可在一定程度上减少路径节点及路径代价,对算法规划的路径起到优化作用。仿真结果表明,文中所提算法在平面栅格场景下的路径规划成功率可达89.3%以上,且综合评价指数及路径质量评价指数亦高于其他算法;在六自由度机器人路径规划仿真场景下,Improved PRM算法得到的平均路径代价比传统PRM算法降低42.7%,成功通过狭窄通道概率也比传统PRM提高68个百分点。

参考文献

- [1] LU Yipeng, XU Xian, LUO Yaozhi. Path planning for rolling locomotion of polyhedral tensegrity robots based on Dijkstra algorithm[J]. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 2019, 60(4): 273–286.
- [2] 程凝怡, 刘志乾, 李昱奇. 一种基于 Dijkstra 的多约束条件下智能飞行器航迹规划算法[J]. 西北工业大学学报, 2020, 38(6): 1284–1290.
- CHENG Ningyi, LIU Zhiqian, LI Yuqi. Path planning algorithm of Dijkstra-based intelligent aircraft under multiple constraints [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2020, 38(6): 1284–1290. (in Chinese)
- [3] XU Yan, GUAN Guofei, SONG Qingwu, et al. Heuristic and random search algorithm in optimization of route planning for robot's geomagnetic navigation[J]. Computer Communications, 2020, 154: 12–17.
- [4] HART P E, NILSSON N J, RAPHAEL B. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths[J]. IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, 1968, 4(2): 100–107.
- [5] 劳彩莲, 李鹏, 冯宇. 基于改进 A* 与 DWA 算法融合的温室机器人路径规划[J]. 农业机械学报, 2021, 52(1): 14–22.
- LAO Cailian, LI Peng, FENG Yu. Path planning of greenhouse robot based on fusion of improved A* algorithm and dynamic window approach[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(1): 14–22. (in Chinese)
- [6] WANG Huanwei, QI Xuyan, LOU Shangjie, et al. An efficient and robust improved A* algorithm for path planning[J]. Symmetry, 2021, 13(11): 2213.
- [7] SUDHAKARA P, GANAPATHY V, PRIYADHARSHINI B, et al. Obstacle avoidance and navigation planning of a wheeled mobile robot using amended artificial potential field method[J]. Procedia Computer Science, 2018, 133: 998–1004.
- [8] 曹博, 毕树生, 郑晶翔, 等. 改进人工势场法的冗余机械臂避障算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2019, 51(7): 184–191.
- CAO Bo, BI Shusheng, ZHENG Jingxiang, et al. Obstacle avoidance algorithm of redundant manipulator of improved artificial potential field method[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2019, 51(7): 184–191. (in Chinese)
- [9] LIN X, WANG Z Q, CHEN X Y. Path planning with improved artificial potential field method based on decision tree[C]// Proceedings of the 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). IEEE, 2020.
- [10] SZCZEPANSKI R, BEREIT A, TARCZEWSKI T. Efficient local path planning algorithm using artificial potential field supported by augmented reality[J]. Energies, 2021, 14(20): 6642.
- [11] 李洋, 徐达, 周诚. 基于自适应步长 RRT 的双机器人协同路径规划[J]. 农业机械学报, 2019, 50(3): 358–367.
- LI Yang, XU Da, ZHOU Cheng. Cooperation path planning of dual-robot based on self-adaptive stepsize RRT [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(3): 358–367. (in Chinese)
- [12] SHI Wubin, WANG Ke, ZHAO Chong, et al. Obstacle avoidance path planning for the dual-arm robot based on an improved RRT algorithm[J]. Applied Sciences, 2022, 12(8): 4087.
- [13] ZHANG Xiao, ZHU Tong, XU Yu, et al. Local path planning of the autonomous vehicle based on adaptive improved RRT algorithm in certain lane environments[J]. Actuators, 2022, 11(4): 109.
- [14] AKBARIPOUR H, MASEHIAN E. Semi-lazy probabilistic poadmap: a parameter-tuned, resilient and robust path planning method for manipulator robots[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 89(5–8): 1401–1430.
- [15] 曾国奇, 赵民强, 刘方圆, 等. 基于网格 PRM 的无人机多约束航路规划[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(10): 2310–2316.
- ZENG Guoqi, ZHAO Minqiang, LIU Fangyuan, et al. Multi-constrained UAV path planning based on grid PRM[J]. System Engineering and Electronic, 2016, 38(10): 2310–2316. (in Chinese)
- [16] 田洪清, 王建强, 黄荷叶, 等. 越野环境下基于势能场模型的智能车概率图路径规划方法[J]. 兵工学报, 2021, 42(7): 1496–1505.
- TIAN Hongqing, WANG Jianqiang, HUANG Heye, et al. Probabilistic roadmap method for path planning of intelligent vehicle based on artificial potential field model in off-road environment[J]. Acta Armamentarii, 2021, 42(7): 1496–1505. (in Chinese)
- [17] DIJKSTRA E W. A note on two problems in connexion with graphs[J]. Numerische Mathematik, 1959, 1(1): 269–271.
- [18] KUFFNER J J, LAVALLE S M. RRT – Connect: an efficient approach to single-query path planning[C]// 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2000: 995–1001.
- [19] BOOR V, OVERMARS M H, VAN DER STAPPEN A F. The gaussian sampling strategy for probabilistic roadmap planners [C]// Proceedings of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1999: 1018–1023.
- [20] HSU D, JIANG T T, REIF J, et al. The bridge test for sampling narrow passages with probabilistic roadmap planners[C]// Proceedings of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 2003: 4420–4426.
- [21] 马江涛, 刘检华, 徐联杰, 等. 基于 LTL-PRM 算法的分支管路自动布局方法[J]. 机械工程学报, 2018, 54(15): 160–170.
- MA Jiangtao, LIU Jianhua, XU Lianjie, et al. Method of automatic branch-pipe routing based LTL-PRM algorithm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(15): 160–170. (in Chinese)
- [22] DENAVIT J, HARTENBERG R S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices[J]. Journal of Applied Mechanics, 1955, 22: 215–221.