

零耦合度部分运动解耦 2T1R 并联机构拓扑与性能研究

沈惠平 朱晨阳 李菊 李涛

(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要: 根据基于方位特征方程的并联机构拓扑设计理论和方法, 设计、分析了一种零耦合度且部分运动解耦的三自由度非对称两平移一转动(2T1R)并联机构, 包括: 给出机构的拓扑设计过程, 计算其自由度、耦合度 κ 等主要拓扑特性; 其次, 基于拓扑特征运动学建模方法, 求出其符号式位置正反解, 并通过正解进行工作空间计算; 同时导出位置逆解方程, 得到动平台雅可比矩阵, 由此导出机构内各构件的速度、加速度以及奇异性; 又运用基于虚功原理的序单开链法进行逆向动力学建模, 得到该机构主动副的驱动力变化曲线, 同时以子运动链(SKC)为单元, 求解 SKC 连接处运动副的支反力, 并通过 ADAMS 予以动力学仿真验证。最后, 分析了该机构可用作不同高度输送带之间物料自动转运、卸料装置的潜在应用场景, 并给出了其概念设计。本文为两支链大转角并联机构的高效运动学、动力学建模与分析, 以及机构性能优化与样机研发提供了理论依据。

关键词: 并联机构; 拓扑设计; 拓扑特征; 运动学; 动力学; 虚功原理

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2023)02-0419-11

OSID:



Topology and Performance Analysis of 2T1R Parallel Mechanism with Zero Coupling Degree and Motion Decoupling

SHEN Huiping ZHU Chenyang LI Ju LI Tao

(Research Center of Advanced Mechanism, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

Abstract: According to the theory and method of topological structure design of parallel mechanism (PM) based on position and orientation characteristic (POC) equation, a 3-DOF asymmetric two-translation and one-rotation (2T1R) PM with zero coupling-degree and partial motion decoupling was firstly designed and analyzed, including the topological design process of the PM, and the main topological characteristics such as the degree-of-freedom and coupling degree κ . Secondly, according to the kinematic modeling method based on topological characteristics, the forward and inverse solutions of symbolic positions were found, from which the working space calculation of the PM was carried out based on the forward solution. At the same time, the position inverse equation was derived to obtain the Jacobian matrix of the PM, from which the velocity, acceleration and singularity of the PM were derived. Thirdly, the sequential single-chain method based on the principle of virtual work was used to carry out reverse dynamic modeling, and the driving force change curve of the actuated pair of the PM was obtained, the supporting reaction force of the kinematic pair at the sub-kinematic chain (SKC) connection were also obtained, which were then verified by ADAMS dynamic simulation. Finally, the potential application scenarios of this mechanism used as automatic material transfer and unloading device between conveyor belts with different heights were conceptually designed and analyzed. The research result can provide a theoretical basis for the efficient kinematics, dynamic modeling and analysis, performance optimization and prototype development of the two-branch parallel mechanism with larger rotation space and partial motion decoupling.

Key words: parallel mechanism; topological design; topological features; kinematics; dynamics; virtual work principle

0 引言

三自由度两平移—转动并联机器人机构因驱动元件少、制造方便,在工业生产中具有较高实用价值^[1],可用于空间物品的拾取操作、设备的姿态调整等^[2]。国内外机构学研究人员对此类机构已进行广泛深入的研究。HUNT^[3]于1983年设计了一种含2T1R及其奇生运动的3-DOF空间机构;KONG等^[4]研究了含有球面支链或平行四边形子支链的2T1R空间机构;LIU等^[5]提出一组运动学求解和构造均较为简单的2T1R型并联机构;刘艳敏^[6]研究机构的综合方法,并优选了部分2T1R新机型。

机构位置求解是并联机构研究中最基础、最重要的问题之一^[7],目前,大多数学者应用杆副法^[8]、回路法^[9],来建立机构输入—输出位置方程,但为得到一般的非线性一元高次方程,其数学推导、消元过程十分复杂。杨廷力^[10]提出了机构运动学分析的序单开链法;沈惠平^[11]提出了并联机构的拓扑特征运动学建模原理和方法,具有建模方便、计算量大减少等优势。

动力学分析是保证机构动力学性能的前提。目前,机构的动力学分析方法主要有:虚功原理法^[12-13]、拉格朗日法^[14-15]、牛顿—欧拉法^[16-17]、凯恩法^[18-19]、动力学普遍方程^[20]、Hamilton正则方程^[21]等。拉格朗日法表现形式简单,但其计算量较大;凯恩法有较为简洁的计算方法,但对于力和力矩的分析相对匮乏^[22];牛顿—欧拉法对于构件较多的机构受力分析较复杂,但在构建动力学模型时易求出运动副的约束反力^[23];虚功原理同拉格朗日法一样,表现形式统一、计算量较大,且无法得到构件的约束反力。

基于虚功原理的序单开链法,以子运动链为基本单元,不仅能求出各驱动副的驱动力,还能求出子运动链(SKC)连接处的支反力,这对机械结构强度设计至关重要^[24]。

本文根据基于方位特征(POC)方程并联机构拓扑设计理论^[25],提出一种零耦合度、含一条混合支链的空间2T1R并联机构;对该机构进行拓扑特性和运动学分析;基于虚功原理的序单开链法建立该机构的逆向动力学模型,求解机构驱动力及部分运动副支反力;最后,对该机构应用于物流领域输送带之间物料的自动转运、卸料装置的应用场景,进行概念设计。

1 机构设计和分析

1.1 机构设计

1.1.1 POC方程

串联、并联机构的POC集计算公式^[25]为

$$M_s = \bigcup_i^m M_{ji} \quad (1)$$

$$M_{Pa} = \bigcap_i^{v+1} M_{bi} \quad (2)$$

式中 M_s ——末端构件 POC 集

M_{ji} ——第 i 个运动副 POC 集

M_{bi} ——第 i 条支链末端 POC 集

M_{Pa} ——机构动平台 POC 集

1.1.2 机构设计思路

大量研究表明,含有混合支链的并联机构一般具有耦合度低、输入—输出(部分)运动解耦、易得符号式位置正解等优点^[11,24],且其运动学、刚度以及动力学综合性能也较好;且含1-DOF、2-DOF混合支链数目越多,机构输入—输出(部分)运动解耦性能越好,其运动学/动力学求解越容易,因为(1~2)-DOF混合支链本身的位姿易求得;另外,两支链并联机构具有结构简单、动平台转动能力强、干涉少等优点^[25]。

根据上述思路,一方面,为设计具有“零耦合度且运动解耦”特性的并联机构,可以通过构造约束度为零、含部分驱动副且可独立求出其位置回路的混合支链,以实现设计目标;另一方面,本文设计的2T1R并联机构采用两支链的结构来实现,这意味着两条支链的末端运动输出最少都须包含2个平移(2T)和1个转动(1R)元素。

1.1.3 支链设计

(1)混合支链Ⓐ设计

设计一个两滑块两平移空间并联机构,如图1a所示,它由分支1($P_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \parallel R_{14}$)、分支2($P_{21} \perp R_{22} \parallel R_{23}$)并联而成,其中,两移动副 P_{11} 和 P_{21} 为重合共线,该机构简记为:2P-5R,为阐述方便,在静平台0上,建立坐标系OXYZ,Y轴平行于 P_{11} (或 P_{21}),Z轴平行于静平台0的法线。

由式(1)可知,分支1、2末端构件的POC集均为

$$M_{b1} = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{array} \right]$$

$$M_{b2} = \left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_{23}) \\ r^1(\parallel R_{23}) \end{array} \right]$$

由式(2)可知,输出构件2的POC集为

$$M_2 = M_{b1} \cap M_{b2} = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^1(\parallel R_{14}) \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^2(\perp R_{23}) \\ r^1(\parallel R_{23}) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} t^2(\parallel \diamond(YOZ)) \\ r^0 \end{array} \right]$$

因此,输出构件2将产生垂直于 R_{22} 轴线的平面(YOZ)内的两维移动(2T)。

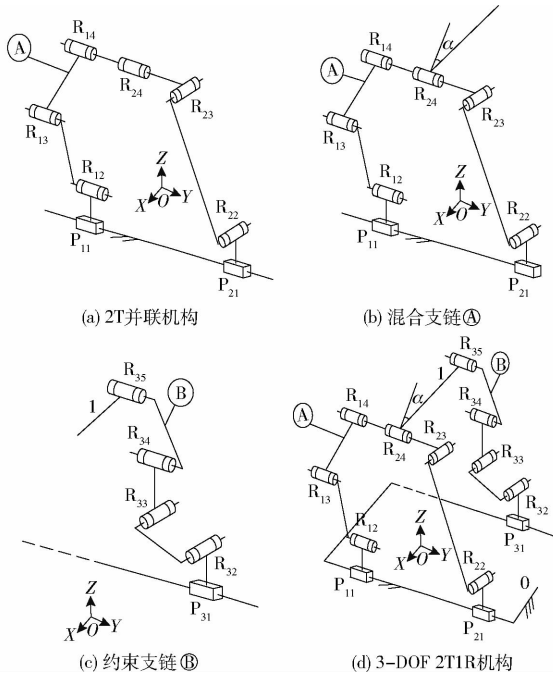


图 1 3-DOF 2T1R 机构的设计过程

Fig. 1 Design process of 3-DOF 2T1R mechanism

在输出构件 2 的轴线上,直接串联一个转动副 R_{24} ,如图 1b 所示,即转动副 R_{24} 与 R_{14} 共轴线(均平行于 Y 轴),则构成另一条混合支链 A,它将连接动平台 1 左端,由式(1)可知

$$M_A = M_2 \cup M_{R_{24}} = \begin{bmatrix} t^2(\parallel \diamond(YOZ)) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^0 \\ r^1(\parallel R_{24}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{23}) \\ r^1(\parallel R_{24}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)表明,混合支链 A 的输出运动为沿 YOZ 平面内的二维移动和绕 Y 轴的一维转动,这正是待设计并联机构动平台的 POC。

(2) 支链 B 设计

连接动平台 1 右端的第 2 条支链 B 至少包含 2 个平移(2T)和 1 个转动(1R);因机构自由度为 3,第 2 条支链必须含 1 个驱动副,为此,设计为 1 条简单约束支链 $\{P \perp R \parallel R \perp R \parallel R\}$,具体为:移动副 P_{31} 依次串联 2 个轴线平行的转动副组 ($R_{32} \parallel R_{33}$) 和 ($R_{34} \parallel R_{35}$),但 $P_{31} \perp R_{32}, R_{33} \perp R_{34}$,这样,设计的约束支链为 $P_{31} \perp R_{32} \parallel R_{33} \perp R_{34} \parallel R_{35}$,如图 1c 所示。显然,由式(1)得该约束支链末端 POC 集为

$$M_B = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{33}) \\ r^1(\parallel R_{33}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{35}) \\ r^1(\parallel R_{35}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{33}, R_{34})) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(4)表明,约束支链 B 的输出运动为 3T2R,它包含了 2 个平移(2T)和 1 个转动(1R)。

使动平台 1 上转动副 $R_{35} \parallel R_{24}$,且 $P_{31} \parallel P_{11}$,从而设计出由混合支链 A、约束支链 B 连接的 2T1R 并联机构^[26],如图 1d 所示;由式(2)知,其动平台 1 的 POC 集为

$$M_{Pa} = M_A \cap M_B = \begin{bmatrix} t^2(\parallel \diamond(YOZ)) \\ r^1(\parallel R_{24}) \end{bmatrix}$$

因此,设计的并联机构具有沿 YOZ 平面内的二维移动和绕 Y 轴的一维转动。

1.2 拓扑分析

1.2.1 机构自由度

(1) 机构全周自由度计算公式^[25]为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{lj} \quad (5)$$

其中 $\xi_{lj} = \dim. \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^j M_{bi} \right) \cup M_{b(j+1)} \right\} \quad (6)$

$$v = m - n + 1$$

式中 F ——机构自由度

f_i ——第 i 个运动副自由度

m ——运动副数

v ——独立回路数

n ——构件数

ξ_{lj} ——第 j 个独立回路独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{bi}$ ——前 j 条支链组成的子并联机构的 POC 集

$M_{b(j+1)}$ ——前 $j+1$ 条支链末端构件的 POC 集

第 1 回路为 2P-5R 空间机构,由式(6)得其独立位移方程数为

$$\xi_{l1} = \dim. \{ M_{b1} \cup M_{b2} \} =$$

$$\dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{23}) \\ r^1(\parallel R_{23}) \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{12}, R_{23})) \end{bmatrix} \right\} = 5$$

由式(5)得其自由度为

$$F_1 = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{lj} = 7 - 5 = 2$$

第 2 个回路由上述子并联机构、转动副 R_{24} 及支链 B 构成,由式(6)得其独立位移方程数为

$$\xi_{l2} = \dim. \{ M_A \cup M_B \} =$$

$$\dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{23}) \\ r^1(\parallel R_{24}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{33}, R_{34})) \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\dim. \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{33}, R_{34})) \end{bmatrix} \right\} = 5$$

因此,由式(5)得机构自由度

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{lj} = (7+6) - (5+5) = 3$$

因此,当选取静平台0上移动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 作为驱动副,该机构动平台1可实现 YOZ 平面内的二维平移以及绕 Y 轴的一维转动的输出运动。

1.2.2 机构耦合度

由基于序单开链(SOC)的机构组成原理^[25]知,机构均可划分为若干(SKC),而SKC又可分解为若干单开链(SOC),第 j 个SOC _{j} 的约束度为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{lj} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (7)$$

式中 m_j ——第 j 个SOC _{j} 运动副数

I_j ——第 j 个SOC _{j} 驱动副数

则SKC耦合度 κ 为

$$\kappa = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (8)$$

式中SKC分解为 v 个SOC(Δ_j),有多种分解方案,

取 $\sum_{j=1}^v |\Delta_j|$ 为最小者。

1.2.1节已计算出 $\xi_{l1} = 5$ 、 $\xi_{l2} = 5$,因此,由式(7)可分别求出第1、2回路的单开链约束度为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_1 - \xi_{l1} = 7 - 2 - 5 = 0$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_2 - \xi_{l2} = 6 - 1 - 5 = 0$$

易知,上述2个回路可分别独立构成子运动链,即SKC₁及SKC₂,由式(8)可得其耦合度为

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = 0$$

因此,SKC₁、SKC₂可独立求解,从而可使机构求得符号式位置正解^[26]。

至此,该机构主要拓扑性能(DOF、 κ)已求出,并到达所期望的设计目标,其具有优点:①由低副组成,加工制造容易。②机构为零耦合度,因此具有符号式位置正解。③含两个子运动链且分别含有驱动副,因此具有部分运动解耦特性,从而有利于该机构运动学和动力学的建模与性能求解。

2 并联机构运动学分析

机构运动学模型如图2所示,静平台0上两个导轨之间距离为 l_8 。静坐标系 $OXYZ$ 的坐标原点 O 在导轨所在两条直线的中线上, Y 轴方向平行于 A_1A_2 连线, Z 轴平行于导轨所在平面的法线方向,并

指向动平台1;动坐标系 $O'X'Y'Z'$ 的原点位于动平台1的 R_{24} 几何中心, X' 、 Y' 轴分别重合、垂直于 D_2D_3 连线,而 X 轴、 Z' 轴方向均由右手定则确定。

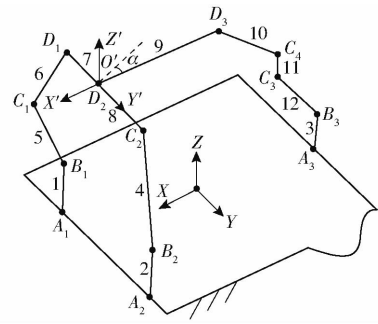


图2 机构运动学模型

Fig.2 Kinematics modeling of PM

机构尺寸标注为:在混合支链①上, $l_{A_1B_1} = l_{A_2B_2} = l_1$, $l_{B_1C_1} = l_{C_1D_1} = l_2$, $l_{C_2D_2} = l_{D_1D_2} = l_3$, $l_{B_2C_2} = l_4$ 。

在支链②上, $l_{A_3B_3} = l_1$, $l_{B_3C_3} = l_{D_3C_4} = l_6$, $l_{C_3C_4} = l_7$ 。 $l_{D_2D_3}$ 与 Y 轴夹角为动平台1输出姿态角 α ,以沿 Z 轴逆时针方向为正方向。

2.1 位置正解分析

已知点 A_i ($i=1,2,3$)驱动副输入量 y_1 、 y_2 、 y_3 ,求解动平台1上点 O' 的位置 (x,y,z) 及动平台姿态角 α 。机构位置正解可由SKC₁和SKC₂分别求得。

(1) SKC₁位置求解

易有 $A_1 = (l_8/2, y_1, 0)$, $A_2 = (l_8/2, y_2, 0)$, $B_1 = (l_8/2, y_1, l_1)$, $B_2 = (l_8/2, y_2, l_1)$, $D_1 = (l_8/2, y_1, z)$, $C_2 = (l_8/2, y_1 + 2l_3, z)$, $D_2 = O' = (l_8/2, y_1 + l_3, z)$ 。

由杆长约束 $l_{B_2C_2} = l_4$ 得位置约束方程,并求得

$$z = l_1 \pm \sqrt{l_4^2 - (y_1 + 2l_3 - y_2)^2} \quad (9)$$

(2) SKC₂位置求解

易有: $A_3 = (-l_8/2, y_3, 0)$, $B_3 = (-l_8/2, y_3, l_1)$ 。因两导轨间距离为 l_8 ,故 $D_2-D_3-C_4$ 组成的回路在 XOZ 面上的投影关系如图3所示。

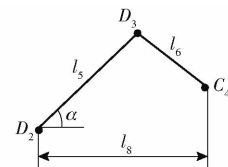


图3 $D_2-D_3-C_4$ 在 XOZ 面上的投影关系

Fig.3 Projection relationship of $D_2-D_3-C_4$ on

XOZ plane

显然,有 $D_3 = (l_8/2 - l_5 \cos \alpha, y_1 + l_3, z + l_5 \sin \alpha)$, $C_4 = (-l_8/2, y_1 + l_3, Z_{C4})$,而 $C_3 = (-l_8/2, y_1 + l_3, Z_{C4} - l_7)$ 。

$$Z_{C4} = z + l_5 \sin \alpha \pm \sqrt{l_6^2 - (l_8 - l_5 \cos \alpha)^2} \quad (10)$$

由杆长约束 $l_{C_3B_3} = l_6$ 得约束方程并解得

$$\alpha = 2\arctan \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \quad (11)$$

其中 $A = 2l_5(K \pm \sqrt{l_6^2 - T^2})$ $B = -2l_5l_8$

$$C = l_8^2 + l_5^2 - l_6^2 + (K \pm \sqrt{l_6^2 - T^2})^2$$

$$T = y_3 - y_1 + l_3 \quad K = \sqrt{l_4^2 - (y_1 + 2l_3 - y_2)^2} - l_7$$

因此,由式(8)、(11)可得动平台 (x, y, z) 及姿态角 α 。

2.2 位置逆解分析

已知动平台1位置 (x, y, z) 及动平台姿态角 α , 求驱动副输入量 y_1, y_2, y_3 。

由几何约束条件 $l_{B_3C_3} = l_6$ 得到

$$y_3 = y \pm \sqrt{l_6^2 - f^2}$$

根据式(9)、(11)可得

$$\begin{cases} y_1 = y - l_3 \\ y_2 = y + l_3 \pm \sqrt{l_4^2 - (z - l_1)^2} \\ y_3 = y \pm \sqrt{l_6^2 - f^2} \end{cases} \quad (12)$$

其中 $f = z + l_5 \sin\alpha - \sqrt{l_6^2 - (l_8 - l_5 \cos\alpha)^2} - l_7 - l_1$

由式(12)可知,驱动副输入量 y_3, y_2 各有2组解,因此,此机构可有4组逆解。

2.3 正逆解实例验算

设机构结构参数为 $l_1 = 100$ mm, $l_2 = 220$ mm, $l_3 = 150$ mm, $l_4 = 440$ mm, $l_5 = 600$ mm, $l_6 = 320$ mm, $l_7 = 80$ mm, $l_8 = 600$ mm。

设3个驱动副输入量 y_1, y_2, y_3 分别为 -340 、 50 、 60 mm。通过 Matlab 计算式(9)、(11)可得到6组位置正解,如表1所示。

将表1中序号1的数据代入式(12),可以求得4组位置逆解。如表2所示,其中序号1的逆解数值与求解正解时给定的3个驱动输入量一致。

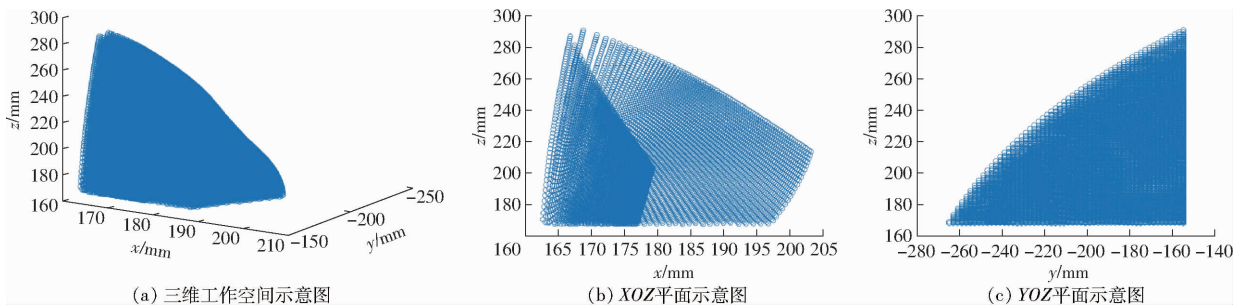


图4 机构动平台质心点工作空间

Fig. 4 Workspace of centroid point of moving platform of PM

4 奇异性与速度分析

4.1 机构奇异性分析方法

设机构动平台基点输出速度为 $\mathbf{v} = [\dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\alpha}]^T$,

表1 位置正解

Tab. 1 Positive solution of position

序号	y/mm	z/mm	$\alpha/(\circ)$
1	-190	530.697 1	16.278 1
2	-190	530.697 1	-44.519 4
3	-190	530.697 1	-22.953 2
4	-190	530.697 1	-62.114 1
5	-190	-330.697 1	-55.812 4
6	-190	-330.697 1	-49.566 3

表2 位置逆解

Tab. 2 Inverse solution of position mm

序号	y_1	y_2	y_3
1	-340	50.000 0	59.944 2
2	-340	50.025 5	-439.697 1
3	-340	-130.000 0	-439.977 2
4	-340	-130.025 5	59.977 2

3 工作空间

并联机构可达空间是指在考虑运动副转角范围、杆长不干涉情况下,末端执行器的工作区域,是衡量并联机器人性能的一个重要指标。

传统的工作空间计算是基于位置反解求得的点,由这些点组成的三维图即为该机构工作空间。

而本文机构具有符号式位置正解,因此,直接采用位置正解来计算工作空间,计算量少且工作空间边界计算准确。

为此,确定3个驱动副位置搜索范围为: $-430 \text{ mm} \leq y_1 \leq -320 \text{ mm}$, $300 \text{ mm} \leq y_2 \leq 410 \text{ mm}$, $-320 \text{ mm} \leq y_3 \leq 320 \text{ mm}$,搜索范围只需大于杆件活动范围即可。通过 Matlab 软件编程,得到该并联机构动平台质心点的三维工作空间如图4a所示,其 XOZ 、 YOZ 截面如图4b、4c所示。

驱动副输入速度 $\mathbf{Y} = [\dot{y}_1 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{y}_3]^T$,则对支链①、②满足的3个杆长约束方程 $l_{D_1D_2} = l_3$, $l_{B_2C_2} = l_4$, $l_{B_3C_3} = l_6$,全微分后可表示为

$$\mathbf{J}_p \mathbf{v} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{Y}} \quad (13)$$

$$\text{其中 } \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_q = - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$f_{11} = -2(y_{D_1} - y) \quad f_{12} = 0 \quad f_{13} = 0$$

$$f_{21} = -2(y_{B_2} - y_{C_2}) \quad f_{22} = 2(z_{B_2} - z_{C_2}) \quad f_{23} = 0$$

$$f_{31} = -2(y_{B_3} - y_{C_3}) \quad f_{32} = -2(z_{B_3} - z_{C_3})$$

$$f_{33} = -2(z_{B_3} - z_{C_3}) \left[l_5 \cos \alpha - \frac{(l_8 - l_5 \cos \alpha) l_5 \sin \alpha}{\sqrt{l_6^2 - (l_8 - l_5 \cos \alpha)^2}} \right]$$

$$g_{11} = -2(y_{D_1} - y) \quad g_{22} = -2(y_{C_2} - y_{B_2})$$

$$g_{33} = y_{C_3} - y_{B_3}$$

当机构不存在奇异位置时, \mathbf{J}_p 可逆, 得

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{Y}} \quad (14)$$

式(14)即为动平台基点输出速度。

为方便后续计算, 现将动平台速度矩阵分解为移动矩阵和转动矩阵, 即

$$\dot{\mathbf{X}} = [0 \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = [0 \quad \dot{\alpha} \quad 0]^T$$

由此, 移动、转动矩阵与原矩阵的关系可表示为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}_1 \mathbf{V} \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{G}_2 \mathbf{V}$$

其中

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这样, 动平台基点的移动、转动速度矩阵, 与3个输入角之间的关系可分别表示为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}_1 \mathbf{J} \mathbf{Y} = \mathbf{J}_{1D_2} \mathbf{Y}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{G}_2 \mathbf{J} \mathbf{Y} = \mathbf{J}_{2D_2} \mathbf{Y}$$

将式(13)对时间 t 求导, 得到动平台点 O' 加速度与输入加速度之间的映射关系为

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{Y}} - \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{k} \quad (15)$$

其中 $\mathbf{k} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T$

$$k_1 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial Y_1} \frac{\partial f_1}{\partial \rho_1} \left(\frac{dY_1}{dt} \right)^2 +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{dY_1}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial Y_1} \frac{\partial f_1}{\partial Y_1} \frac{dy}{dt} \frac{dY_1}{dt}$$

$$k_2 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial Y_2} \frac{\partial f_2}{\partial Y_2} \frac{dY_2}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 +$$

$$\frac{\partial}{\partial Y_2} \frac{\partial f_2}{\partial Y_2} \left(\frac{dY_2}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial Y_2} \frac{dy}{dt} \frac{dY_2}{dt}$$

$$k_3 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f_3}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial Y_3} \frac{\partial f_3}{\partial Y_3} \frac{dY_3}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 +$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial f_3}{\partial z} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 +$$

$$\frac{\partial}{\partial Y_3} \frac{\partial f_3}{\partial y} \left(\frac{dY_3}{dt} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f_3}{\partial Y_3} \frac{dY_3}{dt} \frac{dy}{dt}$$

4.2 奇异性分析

4.2.1 输入奇异

当机构发生输入奇异时, 机构的执行构件将失去某个方向的运动能力, 此时, 至少有1个运动链到达工作空间的边界。

当 $\det(\mathbf{J}_q) = 0$, 机构将发生输入奇异, 将方程的解集设为 A , 则 A 为

$$A = \{A_1 \cup A_2 \cup A_3\}$$

其中, $A_i (i=1, 2, 3)$ 为机构产生输入奇异时的3种情况: 当 $A_1 = \{y_{D_1} = y\}$ 不满足构型要求, 舍去。当 $A_2 = \{y_{C_2} = y_{B_2}\}$, 即点 C_2 与点 B_2 的 y 轴坐标相等, 满足 A_2 的三维构型如图5所示。当 $A_3 = \{y_{C_3} = y_{B_3}\}$, 即点 C_3 与点 B_3 的 y 轴坐标相等时, 机构发生输入奇异, 满足 A_3 的三维构型如图6所示。

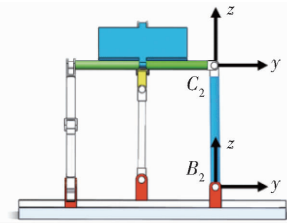


图5 A_2 的输入奇异位形

Fig.5 Input singular configuration of A_2

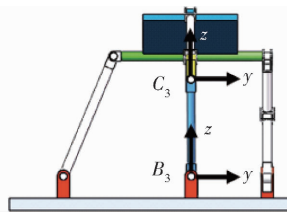


图6 A_3 的输入奇异位形

Fig.6 Input singular configuration of A_3

4.2.2 输出奇异

在这种情况下, 存在瞬时非零速度 v , 使得 $\dot{\rho}$ 为零, 即固定所有驱动副, 末端执行器仍可产生局部运动。

当 $\det(\mathbf{J}_p) = 0$ 时, 机构发生输出奇异。由于 \mathbf{J}_q 为下三角矩阵, 故方程的解 $F = \{f_{11} \cup f_{22} \cup f_{33}\}$, 其中, f_{11} f_{22} 不满足构型要求, 舍去。

当 $f_{33} = 0$, 机构发生输出奇异, 有两种情况:

第1种情况: 当机构满足 $Z_{C_3} = Z_{B_3}$ 时, 如图6所示, 即运动副 C_3 和 B_3 在水平方向平行时, 机构无法继续运动, 此时机构发生输出奇异, 如图7所示。

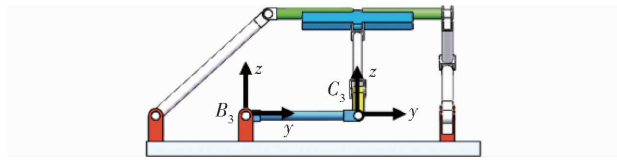
第2种情况: 当动平台转动角满足

$$\alpha = \arccos \frac{l_8}{l_5 \pm l_6}$$

此时, 机构将发生输出奇异。

4.2.3 综合奇异

综合奇异即输入奇异与输出奇异同时发生。当

图7 $Z_{C_3} = Z_{B_3}$ 的输出奇异位形Fig. 7 Output singular configuration of $Z_{C_3} = Z_{B_3}$

$\det(\mathbf{J}_p) = \det(\mathbf{J}_q)$ 时, 机构发生综合奇异。此机构不存在综合奇异位置。

4.3 杆件速度与加速度

杆件 $A_i B_i$ 速度与加速度关系为

$$\mathbf{V}_{B_i} = \mathbf{V}_{A_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (l_i \mathbf{c}_i) \quad (16)$$

式中 \mathbf{V}_{A_i} ——驱动副 (P_i) 线速度

$\boldsymbol{\omega}_i$ ——驱动杆 $A_i B_i$ 角速度

\mathbf{c}_i ——杆 $A_i B_i$ 单位矢量

因驱动副在机架上且仅为移动驱动, 所以 $\boldsymbol{\omega}_i = 0$ 。对式(16)求导, 得点 B_i 加速度为

$$\mathbf{a}_{B_i} = \mathbf{a}_{A_i}$$

式中 \mathbf{a}_{A_i} ——驱动副 P_i 线加速度

于是, 杆件 $A_i B_i$ 质心速度、加速度分别为

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{mid_i} = \mathbf{V}_{B_i} = \mathbf{V}_{A_i} \\ \mathbf{a}_{mid_i} = \mathbf{a}_{B_i} = \mathbf{a}_{A_i} \end{cases} \quad (17)$$

杆件 $C_1 B_1$ 速度为

$$\mathbf{V}_{C_1} = \mathbf{V}_{B_1} + \boldsymbol{\omega}_5 \times (l_2 \mathbf{C}_5) \quad (18)$$

两边叉乘 \mathbf{C}_5 可得

$$\boldsymbol{\omega}_5 = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_5 (\mathbf{V}_{C_1} - \mathbf{V}_{B_1})}{l_2} \quad (19)$$

式中 \mathbf{C}_5 ——杆件 $B_1 C_1$ 单位矢量

$\tilde{\mathbf{C}}_5$ —— \mathbf{C}_5 的斜对称阵

将式(18)两边对时间 t 求导, 得

$$\mathbf{a}_{C_1} = \mathbf{a}_{B_1} + l_2 \boldsymbol{\varepsilon}_5 \times \mathbf{C}_5 + l_2 \boldsymbol{\omega}_5 \times (\boldsymbol{\omega}_5 \times \mathbf{C}_5) \quad (20)$$

对式(20)两边叉乘 \mathbf{C}_5 , 得杆件 $B_1 C_1$ 角加速度为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_5 = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_5 (\mathbf{a}_{C_1} - \mathbf{a}_{B_1})}{l_2} \quad (21)$$

由式(18)、(20)得杆件 $B_1 C_1$ 质心速度、加速度为

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{mid5} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{B_1} + \mathbf{V}_{C_1}) \\ \mathbf{a}_{mid5} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{B_1} + \mathbf{a}_{C_1}) \end{cases} \quad (22)$$

杆件 $C_1 D_1$ 速度与加速度关系为

$$\mathbf{V}_{D_1} = \mathbf{V}_{C_1} + \boldsymbol{\omega}_6 \times (l_2 \mathbf{C}_6) \quad (23)$$

两边叉乘 \mathbf{C}_6 , 得

$$\boldsymbol{\omega}_6 = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_6 (\mathbf{V}_{D_1} - \mathbf{V}_{C_1})}{l_2} \quad (24)$$

式中 \mathbf{C}_6 ——杆件 $C_1 D_1$ 单位矢量

$\tilde{\mathbf{C}}_6$ —— \mathbf{C}_6 的斜对称阵

将式(23)两边对时间 t 求导, 得

$$\mathbf{a}_{D_1} = \mathbf{a}_{C_1} + l_2 \boldsymbol{\varepsilon}_6 \times \mathbf{C}_6 + l_2 \boldsymbol{\omega}_6 \times (\boldsymbol{\omega}_6 \times \mathbf{C}_6) \quad (25)$$

对式(25)两边叉乘 \mathbf{C}_6 , 得杆件 $C_1 D_1$ 角加速度为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_6 = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_6 (\mathbf{a}_{D_1} - \mathbf{a}_{C_1})}{l_2} \quad (26)$$

由式(23)、(25)得杆件 $C_1 D_1$ 质心速度与加速度为

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{mid6} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{C_1} + \mathbf{V}_{D_1}) \\ \mathbf{a}_{mid6} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{C_1} + \mathbf{a}_{D_1}) \end{cases} \quad (27)$$

杆件 $D_1 D_2$ 速度与加速度关系为

$$\mathbf{V}_{D_1} = \mathbf{V}_{C_1}$$

$$\mathbf{a}_{D_1} = \mathbf{a}_{C_1}$$

则杆件 $D_1 D_2$ 质心速度、加速度为

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{mid7} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{D_1} + \mathbf{V}_{D_2}) \\ \mathbf{a}_{mid7} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{D_1} + \mathbf{a}_{D_2}) \end{cases} \quad (28)$$

杆件 $C_3 C_4$ 速度与加速度关系为

$$\mathbf{V}_{C_4} = \mathbf{V}_{C_3}$$

$$\mathbf{a}_{C_4} = \mathbf{a}_{C_3}$$

则杆件 $C_3 C_4$ 质心速度、加速度为

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{mid11} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{C_3} + \mathbf{V}_{C_4}) \\ \mathbf{a}_{mid11} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{C_3} + \mathbf{a}_{C_4}) \end{cases} \quad (29)$$

其余构件速度与加速度求法类似, 故不再赘述, 直接给出结果。

杆件 $B_2 C_2$ 、 $B_3 C_3$ 质心速度、加速度分别为

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{mid4} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{B_2} + \mathbf{V}_{C_2}) \\ \mathbf{a}_{mid4} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{B_2} + \mathbf{a}_{C_2}) \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_4 = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_4 (\mathbf{V}_{C_2} - \mathbf{V}_{B_2})}{l_4} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_4 = \frac{\tilde{\mathbf{C}}_4 (\mathbf{a}_{C_2} - \mathbf{a}_{B_2})}{l_4} \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{mid12} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{B_3} + \mathbf{V}_{C_3}) \\ \mathbf{a}_{mid12} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{B_3} + \mathbf{a}_{C_3}) \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \omega_{12} = \frac{\tilde{C}_{12}(V_{C3} - V_{B3})}{l_6} \\ \epsilon_{12} = \frac{\tilde{C}_{12}(a_{C3} - a_{B3})}{l_6} \end{cases} \quad (33)$$

杆件 C_2D_2 、 D_3C_4 质心速度、加速度分别为

$$\begin{cases} V_{mid8} = \frac{1}{2}(V_{C2} + V_{D2}) \\ a_{mid8} = \frac{1}{2}(a_{C2} + a_{D2}) \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} V_{mid10} = \frac{1}{2}(V_{D3} + V_{C4}) \\ a_{mid10} = \frac{1}{2}(a_{D3} + a_{C4}) \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} \omega_{10} = \frac{\tilde{C}_{10}(V_{C4} - V_{D3})}{l_6} \\ \epsilon_{10} = \frac{\tilde{C}_{10}(a_{C4} - a_{D3})}{l_6} \end{cases} \quad (36)$$

4.4 算例与仿真

给定 3 个驱动副的运动规律分别为

$$\begin{cases} Y_1 = 28\sin t - 367.59 \\ Y_2 = -28\sin(0.5t) + 359.25 \\ Y_3 = 60\cos t + 3.762 \end{cases}$$

由式(14)、(15),通过 Matlab 计算得到动平台基点的理论速度和加速度,如图 8、9 所示。

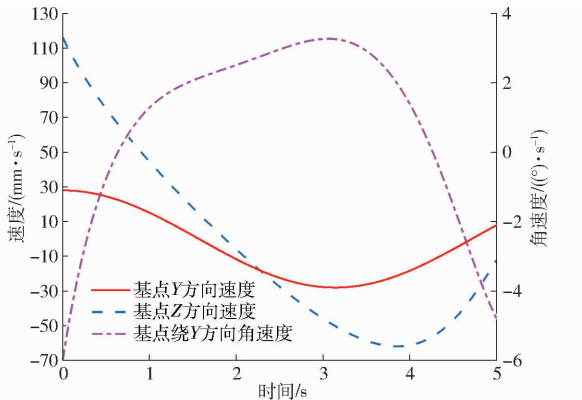


图 8 动平台理论速度曲线

Fig. 8 Theoretical velocity curves of moving platform

通过 ADAMS 仿真,得到动平台基点的速度与加速度曲线,分别如图 10、11 所示。

对比图 8 和图 10,以及图 9 和图 11,可知该机构速度、加速度理论值与仿真值一致,存在微小误差,验证了运动学模型的正确性。

5 动力学分析

将主动臂在驱动力矩作用下产生的位移定义为广义坐标,即 $\mathbf{Y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$,所对应的广义虚位

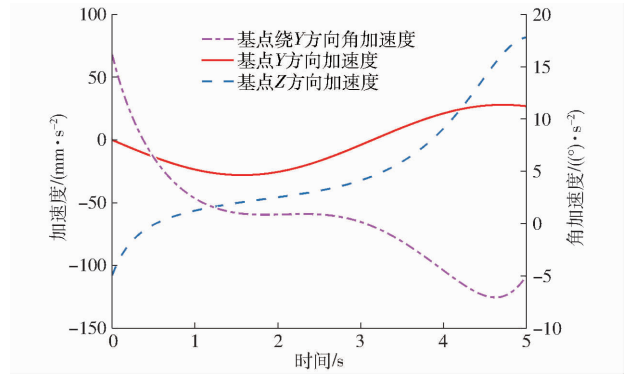


图 9 动平台理论加速度曲线

Fig. 9 Theoretical acceleration curves of moving platform

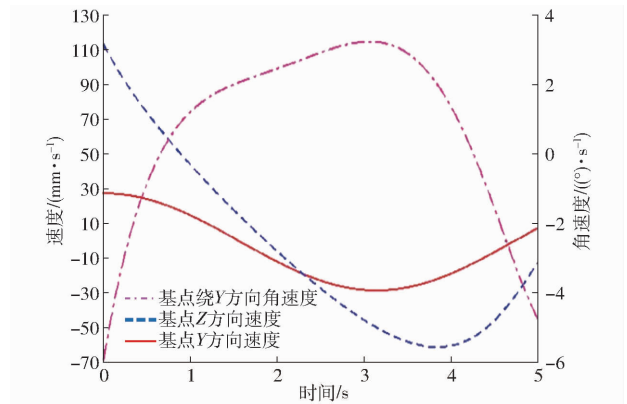


图 10 动平台仿真速度曲线

Fig. 10 Simulation velocity curves of moving platform

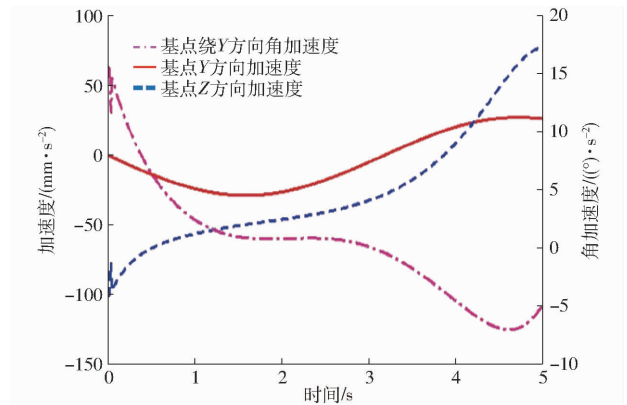


图 11 动平台仿真加速度曲线

Fig. 11 Simulation acceleration curves of moving platform

移为 $\delta \mathbf{Y} = [\delta y_1 \ \delta y_2 \ \delta y_3]^T$ 。由式(14)~(36),可联系各构件虚位移和机构广义虚位移,得: $\delta \mathbf{X} = J_{1D2} \delta \mathbf{Y}$, $\delta \mathbf{a} = J_{2D2} \delta \mathbf{Y}$, $\delta \mathbf{X}_i = J_{iv} \delta \mathbf{Y}$, $\delta \theta_i = J_{iv} \delta \mathbf{Y}$ ($i = 1, 2, \dots, 12$)。

5.1 基于虚功原理的序单开链法基本原理

对自由度为 f 、广义速度为 $\dot{\mathbf{q}}_f = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_f]^T$ 的机械系统,按照拓扑结构分解路线,将其分成若干个 SKC $_i$,而每一个 SKC $_i$ 又可分解为若干个单开链 SOC(Δ_j^-)、SOC(Δ_j^0)、SOC(Δ_j^+);假定解除不同 SKC 连接处运动副 e 个约束,可得到自由度为

($f+e$) 的新系统。于是,老系统被解除约束处的运动副支反力,转换为作用在新系统构件上的未知外力;最后,通过虚功原理,即在理想约束下,外力(矩)和惯性力(矩)在机械系统的任何虚位移上的元功之和等于零,建立动力学方程从而求解。

5.2 部分构件雅可比矩阵

由于动平台在 Y 、 Z 方向上移动并绕 Y 方向转动,动平台上另一点 D_3 的速度与 O' 速度不同,且无法直接表达出动平台质心点处的雅可比矩阵,故采用与第 4 节相同的方法求解以点 D_3 为基点时动平台的雅可比矩阵。

设 $D_3 = \left(\frac{l_8}{2} - l_5 \sin\beta, y_{D_3}, z_{D_3} \right)$, 由杆长约束方程 $l_{D_1D_2} = l_3, l_{B_2C_2} = l_4, l_{B_3C_3} = l_6$, 微分可得

$$J_{P_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

$$J_{Q_1} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Y_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial Y_3} \end{bmatrix}$$

$$V_{D_3} = J_{P_1}^{-1} J_{Q_1} \dot{Y} = J_{D_3} \dot{Y}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = G_1 J_{D_3} \dot{Y} = J_{1D_3} \dot{Y} \\ \dot{\beta} = G_2 J_{D_3} \dot{Y} = J_{2D_3} \dot{Y} \end{cases} \quad (37)$$

式中 β ——杆件 D_3D_2 绕 Y 轴方向的夹角

由式(37)可得,动平台质心处、 D_3C_4 质心处的雅可比矩阵分别为

$$J_5 = \frac{1}{2}(J_1 + J_{1D_3})$$

$$J_{10v} = \frac{1}{2}(J_{1D_3} + J_{C_4})$$

式中, J_{C_4} 可由点 C_4 速度直接表达出。

5.3 受力分析

作用于构件质心上的力有重力和惯性力,而力矩仅为惯性力矩。

对于动平台,作用在质心的力和力矩分别为

$$F_p = f' + m_p g - m_p \ddot{X}$$

$$M_p = \tau - {}^0I_p \ddot{a} - \dot{a} \times ({}^0I_p \dot{a})$$

其中

$${}^0I_p = {}^0_p R ({}^pI_p) {}^p_0 R$$

式中 f' 、 τ ——作用在动平台的外力和外力矩

R ——在静坐标系 $\{o\}$ 中动平台质心处的惯量矩阵,为旋转矩阵

I_p ——动平台质心处惯量矩阵

对于各支链,假设重力是唯一的外力,则作用在各构件上的力和力矩分别为

$$F_i = m_i g - m_i a_{mid_i}$$

$$M_i = - {}^0I_i \varepsilon_i - \omega_i \times ({}^0I_i \omega_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 12)$$

式中 0I_i ——在静坐标系 $\{o\}$ 中各杆件质心处的惯量矩阵

5.4 动力学方程

对于 SKC₂,解除运动副 D_2 处的约束,于是支反力 F_{D_2} 转换为未知外力,由虚功原理可得

$$F_3^T \delta X_3 + F_{12}^T \delta X_{12} + M_{12}^T \delta \theta_{12} + F_{11}^T \delta X_{10} + F_{10}^T \delta X_{10} + M_{10}^T \delta \theta_{10} + F_p^T \delta X_9 + M_p^T \delta \theta_9 + F_{D_2}^T \delta X_{D_2} + F_{31}^T \delta X_3 = 0 \quad (38)$$

在静坐标系 $\{o\}$ 中,以杆 D_2D_3 为研究对象,并将力系向 D_3 处简化,可得

$$-l_5 C_p F_{D_2} - \frac{l_5}{2} C_p (m_p g) = {}^0I_p \ddot{a} + \dot{a} ({}^0I_p \dot{a}) \quad (39)$$

对于 SKC₁,将支反力 F_{D_2} 视为未知外力,由虚功原理可得

$$F_7^T \delta X_7 + F_8^T \delta X_8 + F_6^T \delta X_6 + M_6^T \delta \theta_6 + F_5^T \delta X_5 + M_5^T \delta \theta_5 + F_4^T \delta X_4 + M_4^T \delta \theta_4 + F_1^T \delta X_1 + F_2^T \delta X_2 + F_{11}^T \delta X_{11} + F_{21}^T \delta X_{21} - F_{D_2}^T \delta X_{D_2} = 0 \quad (40)$$

由式(38)~(40)可得机构的驱动力 F_{11} 、 F_{21} 、 F_{31} ,以及运动副 D_2 处的支反力 F_{D_2} 。

5.5 数值仿真算例

机构各构件尺寸参数如表 3 所示。

表 3 2T1R 并联机构尺寸参数

Tab. 3 Dimensional parameters of 2T1R PM

参数	数值
动平台长度 l_5/mm	588
驱动副高度 l_1/mm	67.5
从动臂长度 l_2/mm	220
子动平台长度 l_3/mm	165
从动臂 4 长度 l_4/mm	416.5
从动臂长度 l_6/mm	310
从动臂 7 长度 l_7/mm	75
两导轨间距离 l_8/mm	840
动平台质量 m_5/g	2 811
滑块 A_1 、 A_2 、 A_3 质量 m_1/g	112
从动臂质量 m_2/g	196、147
子动平台质量 m_3/g	94、95
从动臂 4 质量 m_4/g	279
从动臂质量 m_6/g	138
从动臂 7 质量 m_7/g	78

仅考虑动平台受沿 Z 轴方向的载荷。各构件

均为形状规则、质量均匀的刚体,且驱动副采用与4.4节相同的运动规律,通过 Matlab 编程计算式(38)、(40),得驱动力 F 关于时间 t 的曲线,如图 12a 所示;将虚拟样机导入 ADAMS 中,并设定各构件的材料属性、运动副的约束类型,施加竖直向下的重力,选取仿真步长 0.01 s,仿真时间 5 s,动力学仿真曲线如图 12b 所示。

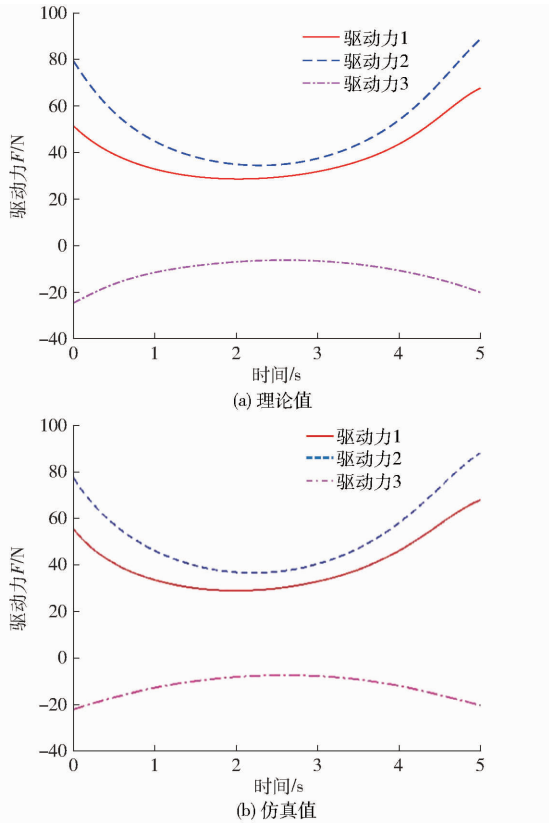


图 12 2T1R 并联机构驱动力曲线

Fig. 12 Driving force curves of 2T1R parallel mechanism

而点 D_2 支反力的理论值与仿真值如图 13 所示。

由传统虚功原理可知

$$\mathbf{M}_p^T \delta \mathbf{Y} + \mathbf{F}_p^T \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{Y} + \mathbf{M}_i \delta \boldsymbol{\theta}_i + \mathbf{F}_\tau^T \delta \mathbf{Y} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 12) \quad (41)$$

由式(41)可知,传统的虚功原理采用的是整体建模思想,而基于虚功原理的序单开链法则按照机构拓扑结构分解的顺序,分别建立各 SKC 的动力学模型,不仅建模思路清晰,而且使得机构的结构学、运动学以及动力学具有统一性。同时,可以得到不同 SKC 连接处运动副的支反力,有助于后续机构结构设计。

6 应用场景概念设计

该机构可用于物流领域两条平行布置、相距较远输送带(E、F)之间的物料的自动输送、转运和卸料,其平面示意图如图 14a 所示;该机构和输送带在

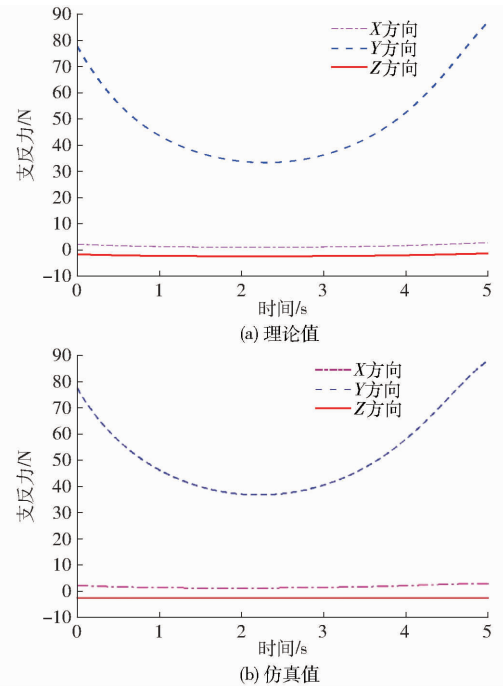


图 13 点 D_2 处支反力

Fig. 13 Support reaction force curves of 2T1R parallel mechanism at point D_2

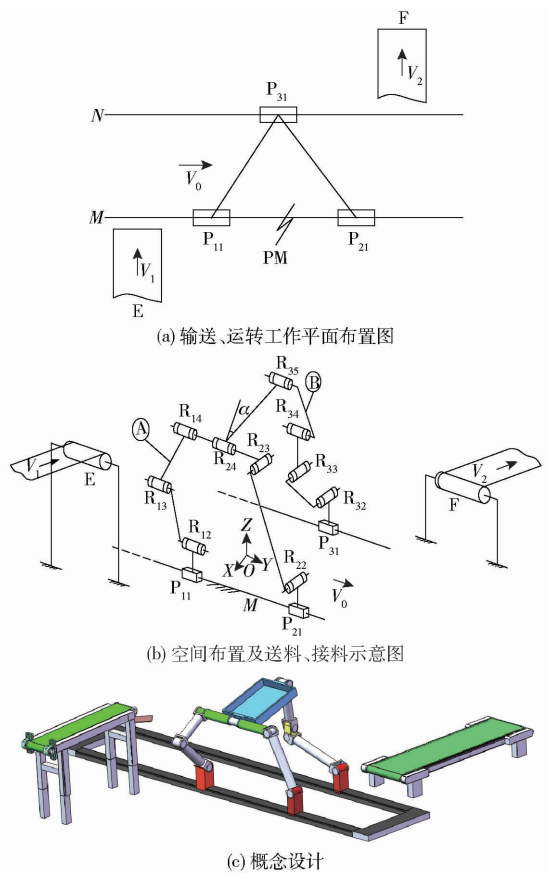


图 14 用于物料输送与转运的 3-DOF 2T1R 并联机构

Fig. 14 3-DOF 2T1R parallel mechanism for material conveying and transfer

空间的位置布置,以及送料、接料方式如图 14b 所示,图 14c 为其三维概念设计。

其工作原理是:当取静平台上的 P_{11} 、 P_{21} 和 P_{31}

为主动副时,动平台 1 可实现 YOZ 平面内的两维平移以及绕 R_{24} 轴线的一维转动,其中,两维平移(2T)能调整并联机构动平台 1 在 Y/Z 方向上的位移与输送带(E、F)的高度位置一致,而一维转动(1R)能使动平台 1 绕转动副 R_{24} 轴线转动,从而使动平台 1 能适应自动接收来自输送带 E 上的物料,或将动平台 1 上的物料自动倾翻至输送带 F 上。

7 结论

(1)根据基于 POC 方程的并联机构拓扑结构设计理论与方法,提出了一种纯低副组成的、制造方便的 3-DOF 两平移—转动并联机构;拓扑分析表明,该机构由两个零耦合度的 SKC 组成,具有符

号式位置正解,且具有输入—输出运动部分解耦性。

(2)求解了该机构的符号式位置正反解,分析了该机构的工作空间和奇异位置;并由雅可比矩阵推导出该机构动平台基点的加速度曲线,表明其变化连续、平稳。

(3)根据虚功原理的序单开链法,建立了该机构的逆向动力学模型,并求解了机构的驱动力以及 SKC 连接处运动副的支反力,表明所需驱动力变化平稳。

(4)对该机构应用于物流领域输送带之间物料的自动转运、卸料装置的应用场景,进行了概念设计。

参 考 文 献

- [1] 李健,黄秀琴,沈惠平. 两平移—转动并联机构位置分析及运动学仿真[J]. 机械传动,2007,31(4):24-27.
LI Jian, HUANG Xiuqin, SHEN Huiping. Position analysis and kinematics simulation of two-translational one rotation parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2007, 31(4): 24-27. (in Chinese)
- [2] 吉昊,沈惠平,杨廷力. 一种新型低耦合度半对称 2T1R 并联机构的拓扑设计及运动学[J]. 机械传动,2020,44(1):13-22.
JI Hao, SHEN Huiping, YANG Tingli. Topology design and kinematics of a new low coupling degree semi-symmetric 2T1R parallel mechanism[J]. Mechanical Transmission, 2020, 44(1): 13-22. (in Chinese)
- [3] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms [J]. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1983, 105(4): 705-712.
- [4] KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain[J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127(6): 1113-1121.
- [5] LIU X J, WANG J S, WU C, et al. A new family of spatial 3-DOF parallel manipulators with two translational and one rotational DOFs[J]. Robotica, 2009, 27(2): 241-247.
- [6] 刘艳敏. 几类少自由度冗余驱动并联机构综合及优选研究[D]. 秦皇岛:燕山大学,2016:46-52.
LIU Yanmin. Synthesis and optimization of several types of redundant drive parallel mechanism with few degrees of freedom [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2016: 46-52. (in Chinese)
- [7] MICHAEL MCCARTHY J. 21st century kinematics[M]. London: Springer, 2012.
- [8] ROONEY G T. Constraint approach to displacement analysis of planer linkages[J]. Mechanism, 1972(9): 60-63.
- [9] KINZEL G L, CHANG C. The analysis of planar linkage using a modular approach[J]. Mechanism and Machine Theory, 1984, 19(1): 165-172.
- [10] 杨廷力. 机械系统基本理论—结构学、运动学、动力学[M]. 北京:机械工业出版社,1996.
- [11] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京:高等教育出版社,2021.
- [12] 王向阳,郭盛,曲海波,等. 并联机构驱动力优化配置方法及应用研究[J]. 机械工程学报,2019,55(1):32-41.
WANG Xiangyang, GUO Sheng, QU Haibo, et al. Optimal allocation method of parallel mechanism and its application[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(1): 32-41. (in Chinese)
- [13] 刘晓飞,唐艳华,刘鑫,等. 含约束支链的冗余驱动并联机构动力学性能优化[J]. 农业机械学报,2021,52(5):378-385,403.
LIU Xiaofei, TANG Yanhua, LIU Xin, et al. Dynamics performance optimization for redundantly actuated parallel manipulator with constraint branch[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(5): 378-385, 403. (in Chinese)
- [14] 赵俊伟,李雪峰,陈国强. 基于 Lagrange 方法的 3-PRS 并联机构动力学分析[J]. 机械设计与研究,2015,31(2):1-5.
- [15] DO THANH T, KOTLARSKI J, HEIMANN B, et al. Dynamics identification of kinematically redundant parallel robots using the direct search method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 52: 277-295.
- [16] 沈惠平,肖思进,尤晶晶,等. 一平移两转动并联运动振动筛动力学建模与精度分析[J]. 农业机械学报,2021,52(2):394-400.
SHEN Huiping, XIAO Sijin, YOU Jingjing, et al. Dynamic modeling and precision analysis of parallel vibrating screen with one-translation and two-rotation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(2): 394-400. (in Chinese)