

末端铰接三平动并联机构设计与性能优化

梁 栋^{1,2} 刘 军¹ 畅博彦^{1,2} 金国光^{1,2}

(1. 天津工业大学机械工程学院, 天津 300387; 2. 天津工业大学天津市现代机电装备技术重点实验室, 天津 300387)

摘要: 针对高性能 3D 打印需求,提出了一种结构简洁且高效的三平动(3T)并联机器人。首先,为得到期望的自由度构型,提出一种拓扑演化设计方法,即将一种三平一转自由度(3T1R)并联机构作为初始构型,根据螺旋理论解析该机构自由度及其性质,在此基础上,将动平台向其中心无限缩聚至一点,并使 3 条支链的末端连杆铰接于该点,进而对机构的末端铰接杆进行再设计,最终演化得到一种仅存在转动副且末端含铰接结构的三平动并联机构。其次,根据输入关节与末端铰接点之间的关系,采用几何投影法和闭环矢量法构建该并联机构的运动学方程,推导其位置正/逆解,并进一步得到速度雅可比矩阵,进而建立速度和加速度映射模型。随后,利用分层切片的搜索算法,预估机器人工作空间,并分析其奇异性。为综合评估机器人性能,对机构灵巧度、速度、承载力及刚度性能指标进行分析,进而提出一种多目标优化设计模型,并据此开展尺度综合,获得最优尺度参数。最后,借助多体动力学软件进行轨迹跟踪仿真校验。研究结果表明,该并联机器人结构简洁紧凑,性能优良,为其后续实体样机制造及实际应用奠定了理论基础。

关键词: 三平动并联机构; 运动学; 奇异性; 性能优化

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2022)10-0446-13

OSID:



Design and Performance Optimization of 3 – DOF Translational Parallel Mechanism with Hinged End Structure

LIANG Dong^{1,2} LIU Jun¹ CHANG Boyan^{1,2} JIN Guoguang^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering, Tiangong University, Tianjin 300387, China

2. Tianjin Key Laboratory of Advanced Mechatronics Equipment Technology, Tiangong University, Tianjin 300387, China)

Abstract: To meet the requirement of high-performance 3D printing, a three-translational (3T) parallel manipulator with simple structure and high efficiency was proposed. Firstly, in order to obtain the desired degree of freedom configuration, a topological evolution design method was proposed, that was, a parallel mechanism with 3 – DOF translations and 1 – DOF rotation (3T1R) was taken as the initial configuration. According to the screw theory, the degree of freedom and its properties of the mechanism were analyzed. On this basis, the moving platform was infinitely converged to a point, and the end connecting rods of the three branches were hinged at this point. Then the end hinged rod of the mechanism was redesigned. Thus, a three-translational parallel mechanism with only revolute pairs and end hinged structure was obtained. Secondly, based on the relationship between the input joint and the end articulated point, the kinematic equations of the parallel mechanism were constructed by using the geometric projection method and the closed-loop vector method, the position forward/reverse solutions were derived, and the velocity Jacobian matrix was further obtained, and then the velocity and acceleration models were formulated. Subsequently, the hierarchical slicing search algorithm was employed to predict the workspace of manipulator, and then the singularities were analyzed. To comprehensively evaluate the performance of manipulator, the dexterity, speed, load carrying capacity and stiffness performance indexes of the mechanism were analyzed, and then a multi-objective optimization design model was proposed, and the optimal dimension parameters were obtained through dimensional synthesis. Finally, trajectory tracking simulation verification was carried out by using multi-body dynamics software. The research results manifested

收稿日期: 2021 – 11 – 26 修回日期: 2021 – 12 – 21

基金项目: 国家自然科学基金项目(52175243、52005368)和天津市教委科研计划项目(2019KJ012)

作者简介: 梁栋(1985—),男,副教授,博士,主要从事机器人机构学与多体系统动力学研究,E-mail: dongliang@tiangong.edu.cn

通信作者: 金国光(1963—),男,教授,博士,主要从事机构学、机械系统动力学及控制研究,E-mail: jinguoguang@tiangong.edu.cn

that the parallel manipulator had a simple and compact structure and excellent performance, which laid a theoretical foundation for its subsequent prototype manufacturing and practical application in future.

Key words: 3 – DOF translational parallel mechanism; kinematics; singularity; performance optimization

0 引言

3D 打印因高效、环保、材料利用率高,目前已应用于汽车、航空、医疗、智慧农业等领域^[1-2]。为提高打印速度及效率,改善精度,需大力发展打印技术和打印方式,而设计一种新型运动执行机构并将其应用于 3D 打印领域已然成为一种趋势。3D 打印机运动执行机构主要分为串联与并联两种拓扑构型。串联机构由于其承载能力低、刚度小、关节误差累积等因素,应用于 3D 打印领域时,难以保证高打印质量。相比之下,并联机构具有刚度大、承载力高、响应速度快、输出精度高等优点^[3],能够很好地适应 3D 打印要求,因此开发基于并联机构的 3D 打印设备是未来 3D 打印发展的趋势之一。

一般而言,3D 打印机最少需实现空间三平动自由度。作为三平动自由度高速并联机器人,Delta 机器人是目前商业应用最成功的并联机器人之一。研究者运用 Delta 并联机构制作 3D 打印机器人,其价格相对便宜,体积小,适合家庭办公^[4]。SONG 等^[5]将并联机构应用于 3D 打印,使末端执行器以倾斜角度运动,可实现多向打印。常定勇等^[6]设计的双输出 3D 打印解耦并联机器人,其动平台有较大转动角度,能同时打印两种相同物体。

除 Delta 机器人外,一些学者亦对其他三平动并联机构开展了广泛研究。TSAI 等^[7]提出一种由移动副驱动,支链含 4R 平行四边形机构的三自由度移动机构;沈惠平等^[8-9]基于方位特征(POC)方程设计出具有较大工作空间的三平移并联机构,并对其位置正逆解、奇异性等进行了分析;李仕华等^[10]设计出 3 – UPU 型三平移机构,并对其运动学性能进行了分析。然而,目前此类并联机构中多数机构的运动副类型较多,结构较复杂,制造成本相对较高。

空间并联机构性能是影响其工程应用的重要因素,而对其进行运动学尺度综合是保证较好运动性能的重要手段^[11]。宋轶民等^[12]基于瞬时旋量理论对空间两转动并联机构构造了功率传递系数指标以评价机构的运动传递性能,并开展了尺度参数综合。张良安等^[13]以机构雅可比矩阵的全域均值条件数和全域波动量构建全域综合性能评价指标进行优化。国内外众多学者为研究并联机构性能,提出很多相应的性能指标,并建立目标优化模型对其尺度

参数进行优化,其中以单目标优化居多,而多目标优化相对较少。

鉴于上述研究现状及存在的问题,本文提出一种结构简洁且易于制造的末端铰接三平动并联机构,对其构型设计、位置正/逆解、速度/加速度、工作空间、奇异性、综合性能评价及多目标优化等进行系统研究,为该机器人机构在 3D 打印领域及其他领域的拓展应用提供理论/技术基础。

1 构型设计

1.1 初始构型

参照文献[3,14 – 15],图 1 给出了本文拓扑演化设计的初始构型。该机构由 3 条完全相同的单开链支路以及动、静平台组成,上方为静平台,下方为动平台,每条支链包含 5 个转动副,其中静、动平台的转动副轴线分别与静、动平台相垂直,支链中另外 3 个转动副的轴线相互平行且均平行于静平台。为保证支链运动的对称性,静、动平台上的竖直转动副中心点分别张成两个等边三角形。

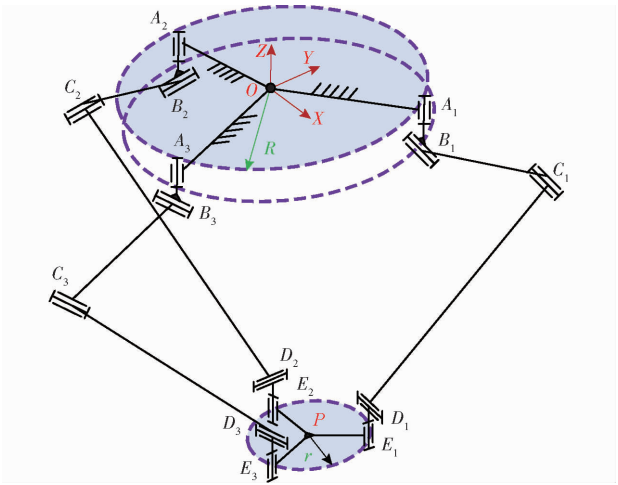


图 1 初始构型机构简图

Fig. 1 Schematic of initial configuration

采用螺旋理论解析该机构的自由度^[16]。不失一般性,分支 $A_iB_iC_iD_iE_i$ ($i = 1, 2, 3$) 如图 2 所示。

其分支坐标系 $A_ix_iy_iz_i$ 如图 2 所示。在此坐标系下分支中 5 个运动副运动螺旋表示为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 = (0 & 0 & 1; & 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_2 = (1 & 0 & 0; & 0 & e_1 & 0) \\ \mathcal{S}_3 = (1 & 0 & 0; & 0 & e_2 & f_2) \\ \mathcal{S}_4 = (1 & 0 & 0; & 0 & e_3 & f_3) \\ \mathcal{S}_5 = (0 & 0 & 1; & d_4 & 0 & 0) \end{cases} \quad (1)$$

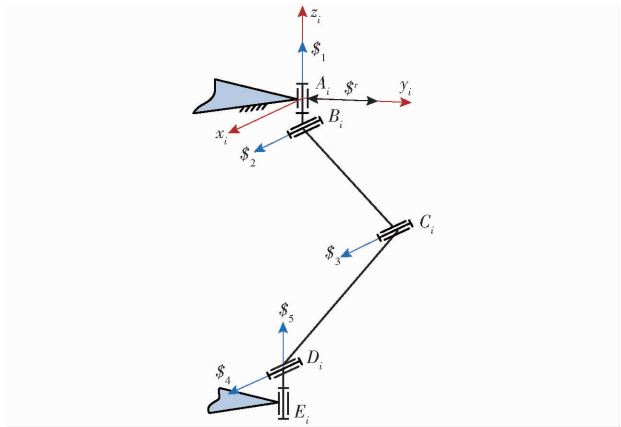


图 2 单分支螺旋运动分析

Fig. 2 Twist analysis of single branch

此为分支运动螺旋系 $\{\hat{s}_i^{bm}\}$ 。为求 5 个运动螺旋的反螺旋,根据螺旋互易积为零的原理建立代数方程组,进行代数求解,即

$$\mathbf{s}^r \circ \mathbf{s}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \tag{2}$$

求得反螺旋为

$$\mathbf{s}^r = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0) \tag{3}$$

因分支运动螺旋系 $\{\hat{s}_i^{bm}\}$ 的 5 个螺旋相互独立,故其约束反螺旋系 $\{\hat{s}_i^{br}\}$ 只有一个元素。由式(3)还可看出此反螺旋的节距无穷大,为一个作用于动平台的约束力偶,该力偶沿 y_i 轴方向,如图 2 中双向箭头所示。

由此可知,3 条相同的分支将会产生 3 个约束力偶且共同作用到动平台上。若设立一个统一的坐标系 $OXYZ$ 位于静平台中央(图 1),则动平台所承受来自 3 个分支的 3 个约束螺旋可统一表述为

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1^r = (0 \ 0 \ 0; \ d_5 \ e_5 \ 0) \\ \mathbf{s}_2^r = (0 \ 0 \ 0; \ d_6 \ e_6 \ 0) \\ \mathbf{s}_3^r = (0 \ 0 \ 0; \ d_7 \ e_7 \ 0) \end{cases} \tag{4}$$

即动平台的约束螺旋系 $\{\hat{s}^{pr}\}$ 。由此可知,3 个约束力偶线性相关,独立螺旋有 2 个,另一个是虚约束,螺旋系的秩为 2。式(4)的反螺旋即为确定动平台自由度的动平台运动螺旋系 $\{\hat{s}^{pm}\}$,亦二次反螺旋系

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1^{rr} = \mathbf{s}_1^{pm} = (0 \ 0 \ 1; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathbf{s}_2^{rr} = \mathbf{s}_2^{pm} = (0 \ 0 \ 0; \ 1 \ 0 \ 0) \\ \mathbf{s}_3^{rr} = \mathbf{s}_3^{pm} = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0) \\ \mathbf{s}_4^{rr} = \mathbf{s}_4^{pm} = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1) \end{cases} \tag{5}$$

依据动平台运动螺旋系 $\{\hat{s}^{pm}\}$,可判定该并联机构动平台有 3 个移动自由度和 1 个绕 Z 轴转动自由度,其自由度还可由修正的 G-K 公式计算,即

$$M = d(n - g - 1) + \sum_1^g f_i + v \tag{6}$$

其中 $d = 6 - \lambda$
式中 M ——机构整体自由度 d ——机构阶数
 λ ——机构公共约束数
 n ——机构构件数之和
 g ——机构运动副个数
 f_i ——运动副 i 具有的自由度
 v ——机构中除去公共约束后的冗余约束数

考虑 $\lambda = 0$ 和 $v = 1$,有

$$M = 6(14 - 15 - 1) + 15 + 1 = 4 \tag{7}$$

因此初始构型有 4 个自由度,为三平一转(3T1R)机构。

1.2 动平台拓扑演化

初始构型的动平台上有 3 个绕中心点 P 周向布置的万向铰接结构,如图 3a 所示。然后,借鉴文献[17-18]中拓扑优化思想,在此将初始构型动平台上的 3 个转动副轴线沿径向方向往中心处不断平移靠拢,如图 3b 所示。重复此步骤,使动平台上的转动副轴线到动平台中心的距离无限缩小,最终使 3 个转动副的轴线重合,如图 3c 所示。为保证 3 条支链的运动具有完全对称性,使末端 3 个铰接杆处于同一平面,为此采用两种不同样式铰接杆,如图 3d 所示。

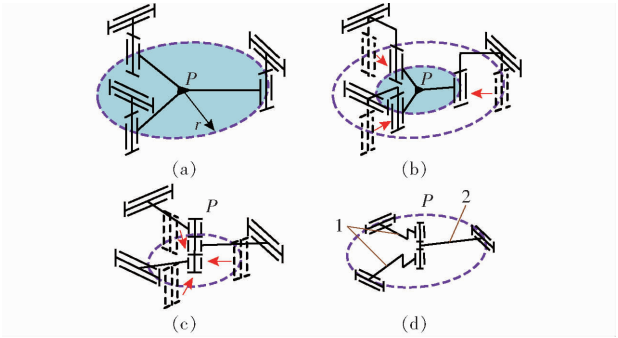


图 3 动平台演化示意图

Fig. 3 Evolution schematic of mobile platform

1. 弯折杆 2. 直杆

1.3 目标构型

经拓扑演化后,3 个末端铰接杆铰接于点 P ,形成复合铰链,得到目标构型如图 4 所示。由于动平台演化成了一铰接点,其失去了绕 Z 轴的转动自由度,此时,该机构末端铰接点具有 3 个自由度,分别是沿 X 、 Y 、 Z 3 个坐标轴的平动。特别需指出,本文中拓扑演化方法与文献[17-18]中的拓扑降耦优化方法存在一定区别,本文机构通过拓扑演化设计后,其自由度发生了变化,且未改变机构运动及结构的对称性。

1.4 机器人虚拟样机设计

基于上述分析,设计出一种含末端铰接杆的并联机器人,虚拟样机如图 5 所示。静平台上的 3 个

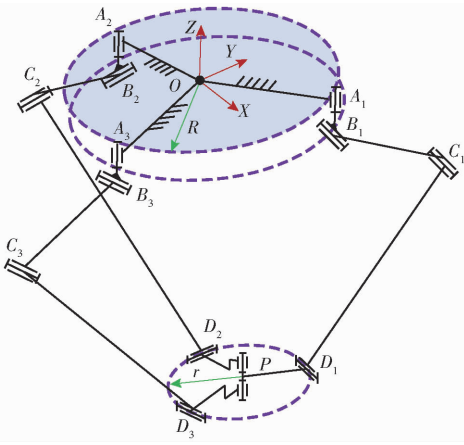


图 4 目标构型机构简图

Fig. 4 Schematic of target configuration

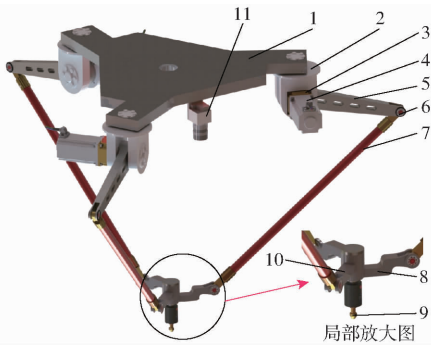


图 5 含末端铰接杆的三平动并联机器人

Fig. 5 Three-translation parallel manipulator with end hinged rods

1. 静平台 2. 转动叉 3. 减速器装置 4. 驱动电机 5. 主动臂
6. 轴承 7. 被动杆 8. 末端铰接杆 1 9. 末端执行器 10. 末端铰接杆 2 11. 高速摄像机

竖直转动副围绕静平台中心周向彼此相隔 120° 均匀分布。每条支链包含 5 个转动副,且 3 条支链的末端铰接于一点,形成复合铰链。当 3 个转动叉上的电机驱动时,末端执行器可以实现三维移动输出。需要说明的是,由于转动叉上的电机绕一定点转动,而并未随整条支链做大范围空间运动,故其不会带来太大的运动惯量,这对整体系统的动力学性能有一定影响,但影响并不大。该机器人结构简洁紧凑,制造成本低,在 3D 打印运动执行模块设计及其他高速作业场合,如纺织/食品行业高速分拣、电子封装等,具有较好的应用价值。

2 机构运动分析

2.1 位置逆解分析

鉴于机器人拓扑结构,以下将借助几何投影法和闭环矢量法进行运动分析。如图 6a 所示,在此机构的第 i 条分支上建立局部坐标系 $\{S_i\}$,这 3 个局部坐标系可通过将静坐标系 $OXYZ$ 分别绕 Z 轴旋转 φ_i 得到,其中 $\varphi_i = (2i-1)\pi/3$ ($i=1,2,3$),由此得

到局部坐标系 $\{S_i\}$ 与静坐标系 $OXYZ$ 之间的旋转变换矩阵,记为 ${}^0R_i \in SO(3)$ 。在静平台的俯视图中,如图 6b 所示,静坐标系为 OXY ,点 P 在静平台上的投影点与点 O 、点 A 构成 1 个三角形, OA_i 为静平台的外接圆半径,其值为 R ,由余弦定理可求得 θ_i ,但由于反余弦函数值域的特殊性,得到的 θ_i 需进行象限判断,而其亦可通过解直角三角形 $\triangle PA_iE_i$,用反正切函数来计算,从而可避免象限判断。

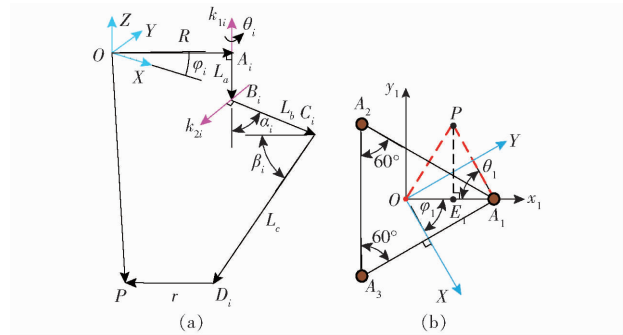


图 6 机构支链闭环及静平台俯视图

Fig. 6 Branch chain closed loop of mechanism and top view of fixed platform

末端参考点 P 在静坐标系下坐标标记为 $P_o(x, y, z)$ 。在俯视状态下 Z 向坐标值可不考虑,从而将点 P 在静坐标系 OXY 下的投影点坐标转换至局部坐标系 Ox_iy_i 中,其坐标为

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i \\ -x\sin\varphi_i + y\cos\varphi_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

点 A_i 在局部坐标系 Ox_iy_i 中的坐标为 $[R \ 0]^T$, E_i 为 P 在 x_i 轴上的投影点,通过解直角三角形 $\triangle PA_iE_i$,可得

$$\theta_i = \arctan \frac{y\cos\varphi_i - x\sin\varphi_i}{R - x\cos\varphi_i - y\sin\varphi_i} \quad (9)$$

θ_i 正负与点 P 在俯视状态下的位置有关。例如在局部坐标系 $\{S_1\}$ 中,如图 6b 所示的位置,点 P 在坐标系 Ox_1y_1 中的第一象限,此时 θ_1 取正值。

在坐标系 $OXYZ$ 下,有

$$C_{i0} = {}^0R_i \begin{bmatrix} R + L_b \cos\theta_i \sin\alpha_i \\ -L_b \sin\theta_i \sin\alpha_i \\ -L_a - L_b \cos\alpha_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i R + L_b \cos(\varphi_i - \theta_i) \sin\alpha_i \\ \sin\varphi_i R + L_b \sin(\varphi_i - \theta_i) \sin\alpha_i \\ -L_a - L_b \cos\alpha_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$D_{i0} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0R_i \begin{bmatrix} r \cos\theta_i \\ -r \sin\theta_i \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \cos(\varphi_i - \theta_i) \\ y + \sin(\varphi_i - \theta_i) \\ z \end{bmatrix} \quad (11)$$

由从动臂杆长约束条件 $|l_{D_iC_i}|^2=L_c^2$,可得

$$\begin{aligned} &[R\cos\varphi_i-r\cos(\varphi_i-\theta_i)+L_b\cos(\varphi_i-\theta_i)\sin\alpha_i-x]^2+ \\ &[R\sin\varphi_i-r\sin(\varphi_i-\theta_i)+L_b\sin(\varphi_i-\theta_i)\sin\alpha_i-y]^2+ \\ &(L_a+L_b\cos\alpha_i+z)^2=L_c^2 \end{aligned} \tag{12}$$

化简式(12)可得

$$A_i+B_i\sin\alpha_i+C_i\cos\alpha_i=0 \quad (i=1,2,3) \tag{13}$$

其中

$$\begin{cases} A_i=R^2+r^2+L_b^2-L_c^2+x^2+y^2+(z+L_a)^2-2rR\cos\theta_i- \\ \quad 2x[R\cos\varphi_i-r\cos(\varphi_i-\theta_i)]- \\ \quad 2y[R\sin\varphi_i-r\sin(\varphi_i-\theta_i)] \\ B_i=2L_b[R\cos\theta_i-r-x\cos(\varphi_i-\theta_i)-y\cos(\varphi_i-\theta_i)] \\ C_i=2L_b(L_a+z) \end{cases}$$

考虑到机构的实际装配,最终可得

$$\alpha_i=2\arctan\frac{-B_i+\sqrt{B_i^2+C_i^2-A_i^2}}{A_i-C_i} \quad (i=1,2,3) \tag{14}$$

α_i 取逆时针转动为正方向。
假设机构末端运动轨迹为

$$\begin{cases} x=0.15\cos(\pi t) \\ y=0.15\sin(\pi t) \quad (t\in[0,2\text{ s}]) \\ z=-0.5 \end{cases} \tag{15}$$

不失一般性,现给定机构的一组尺度参数为 $L_a=0.1\text{ m}$, $L_b=0.25\text{ m}$, $L_c=0.6\text{ m}$, $R=0.3\text{ m}$, $r=0.1\text{ m}$,将式(15)分别代入式(14)与式(9)中,得到3个主动臂的转角随时间变化曲线,以及3条支链绕点 A_i 处轴线的转角随时间变化曲线,如图7所示。

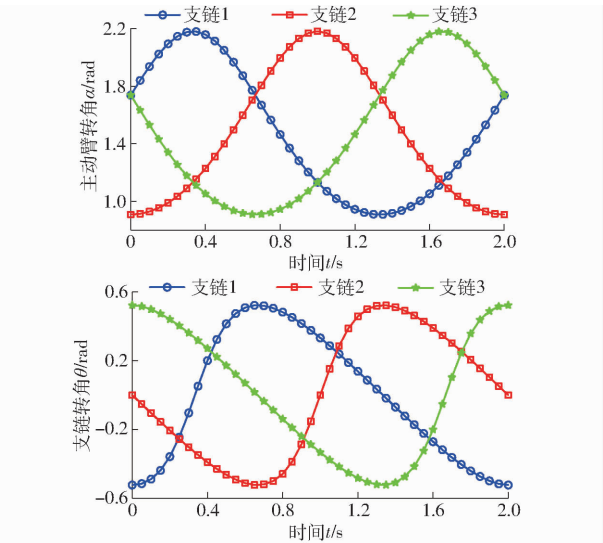


图7 转角变化曲线
Fig.7 Angle variation curves vs time

由图7可看出,转角连续且随时间呈周期性变化。

2.2 位置正解分析

正解分析是已知机构3个主动臂的输入角 α_i ,

求末端参考点 P 的三维坐标。

正解求解的方法主要有解析法和数值法两类。解析法主要通过消元最终得到只含单个未知量的高次方程^[19]。数值法又分为迭代法^[20]和优化方法^[21],其中优化方法是将对非线性方程组的求解转换为对优化问题的求解,而数值法的优点是数学模型比较简单,省去了繁琐的数学推导。因此,本文采用数值法中的Newton迭代法^[22-23]求解非线性方程组,输入主动臂转角,通过迭代计算,求出对应的末端参考点位置。

已知末端点位置为 $(0.2, 0.1, -0.5)\text{ m}$,首先利用逆解式(14),计算出在此位置时3个主动臂的转角,得到: $\alpha_1=2.379\text{ 1 rad}$ 、 $\alpha_2=0.553\text{ 8 rad}$ 、 $\alpha_3=0.857\text{ 0 rad}$;然后将得到的3个转角代入

$$\begin{cases} [R\cos\varphi_1-r\cos(\varphi_1-\theta_1)+L_b\cos(\varphi_1-\theta_1)\sin\alpha_1-x]^2+ \\ [R\sin\varphi_1-r\sin(\varphi_1-\theta_1)+L_b\sin(\varphi_1-\theta_1)\sin\alpha_1-y]^2+ \\ (L_a+L_b\cos\alpha_1+z)^2=L_c^2 \\ [R\cos\varphi_2-r\cos(\varphi_2-\theta_2)+L_b\cos(\varphi_2-\theta_2)\sin\alpha_2-x]^2+ \\ [R\sin\varphi_2-r\sin(\varphi_2-\theta_2)+L_b\sin(\varphi_2-\theta_2)\sin\alpha_2-y]^2+ \\ (L_a+L_b\cos\alpha_2+z)^2=L_c^2 \\ [R\cos\varphi_3-r\cos(\varphi_3-\theta_3)+L_b\cos(\varphi_3-\theta_3)\sin\alpha_3-x]^2+ \\ [R\sin\varphi_3-r\sin(\varphi_3-\theta_3)+L_b\sin(\varphi_3-\theta_3)\sin\alpha_3-y]^2+ \\ (L_a+L_b\cos\alpha_3+z)^2=L_c^2 \end{cases} \tag{16}$$

式中, θ_i 可用 x 与 y 表示。经牛顿迭代运算可得末端点的位置为 $(0.2, 0.1, -0.5)\text{ m}$,可看出,正解的输出坐标与逆解的输入坐标能够完全对应,由此可证明以上关于位置逆解的推导正确。

2.3 速度分析

矢量 OP 用 u 表示,则闭环矢量方程为

$$u=l_{OA_i}+l_{A_iB_i}+l_{B_iC_i}+l_{C_iD_i}+l_{D_iP} \tag{17}$$

将式(17)对时间求导可得

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (\dot{\theta}_i k_{1i} + \dot{\alpha}_i k_{2i}) \times l_{B_iC_i} + (\dot{\theta}_i k_{1i} + \dot{\beta}_i k_{2i}) \times l_{C_iD_i} + \\ &\quad \dot{\theta}_i k_{1i} \times l_{D_iP} = \dot{\alpha}_i k_{2i} \times l_{B_iC_i} + \dot{\theta}_i k_{1i} \times \\ &\quad (l_{B_iC_i} + l_{C_iD_i} + l_{D_iP}) + \dot{\beta}_i k_{2i} \times l_{C_iD_i} = \\ &\quad \dot{\alpha}_i k_{2i} \times l_{B_iC_i} + \dot{\theta}_i k_{1i} \times l_{B_iP} + \dot{\beta}_i k_{2i} \times l_{C_iD_i} \end{aligned} \tag{18}$$

式中 k_{1i} ——静平台 A_i 处竖直转动副轴线的单位方向矢量

k_{2i} —— $B_iC_iD_i$ 所在平面的单位法矢量

对式(18)两端同乘 $l_{C_iD_i}^T$,消去第2项和第3项,经整理,可得

$$\dot{\alpha}_i = \frac{l_{C_iD_i}^T}{l_{C_iD_i}^T(k_{2i} \times l_{B_iC_i})} \dot{u} \quad (i=1,2,3) \tag{19}$$

写成矩阵形式

$$\dot{\alpha} = J \dot{X} \quad (20)$$

其中 $\dot{\alpha} = [\dot{\alpha}_1 \quad \dot{\alpha}_2 \quad \dot{\alpha}_3]^T$ (21)

$$\dot{X} = \dot{u} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T \quad (22)$$

$$J = J_q^{-1} J_x \quad (23)$$

$$J_q = \text{diag}(l_{C_i D_i}^T (k_{2i} \times l_{B_i C_i})) \quad (24)$$

$$J_x = [l_{C_1 D_1} \quad l_{C_2 D_2} \quad l_{C_3 D_3}]^T \quad (25)$$

式中 J ——雅可比矩阵,表征了机构末端速度与主动关节速度之间的映射关系

$\dot{\alpha}$ ——输入角速度

$\dot{X}$ ——动平台输出速度

J_q ——逆向雅可比矩阵

J_x ——正向雅可比矩阵

2.4 加速度分析

式(18)两侧同乘 k_{2i}^T , 消去第 1 项和第 3 项, 可得支链转动角速率为

$$\dot{\theta}_i = \frac{k_{2i}^T}{k_{2i}^T (k_{1i} \times l_{B_i P})} \dot{u} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (26)$$

式(18)两侧同乘 $l_{B_i C_i}^T$, 消去第 1 项和第 2 项, 可得被动杆角速率为

$$\dot{\beta}_i = \frac{l_{B_i C_i}^T}{l_{B_i C_i}^T (k_{2i} \times l_{C_i D_i})} \dot{u} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (27)$$

对式(18)两侧再次求导, 可得

$$\begin{aligned} \ddot{u} = & (\ddot{\alpha}_i k_{2i} + \dot{\alpha}_i \dot{k}_{2i}) \times l_{B_i C_i} + \dot{\alpha}_i k_{2i} \times (\dot{\alpha}_i k_{2i} \times l_{B_i C_i}) + \\ & \ddot{\theta}_i k_{1i} \times l_{B_i P} + \dot{\theta}_i \dot{k}_{1i} \times (\dot{\theta}_i k_{1i} \times l_{B_i P}) + \\ & (\ddot{\beta}_i k_{2i} + \dot{\beta}_i \dot{k}_{2i}) \times l_{C_i D_i} + \dot{\beta}_i k_{2i} \times (\dot{\beta}_i k_{2i} \times l_{C_i D_i}) \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)两边同乘 $l_{C_i D_i}^T$, 消去第 3 项和第 5 项, 可得主动臂角加速率为

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_i = & \frac{l_{C_i D_i}^T [\ddot{u} - \dot{\alpha}_i \dot{k}_{2i} \times l_{B_i C_i} - \dot{\alpha}_i k_{2i} \times (\dot{\alpha}_i k_{2i} \times l_{B_i C_i})]}{l_{C_i D_i}^T (k_{2i} \times l_{B_i C_i})} + \\ & \frac{l_{C_i D_i}^T [-\dot{\theta}_i k_{1i} \times (\dot{\theta}_i k_{1i} \times l_{B_i P}) - \dot{\beta}_i k_{2i} \times (\dot{\beta}_i k_{2i} \times l_{C_i D_i})]}{l_{C_i D_i}^T (k_{2i} \times l_{B_i C_i})} \end{aligned} \quad (29)$$

在给出的机构参数下, 将式(15)代入式(26)并进行数值计算, 得到支链绕 A_i 处轴线转动的角速率关于时间的变化规律, 如图 8a 所示; 代入式(19)得到主动臂角速率关于时间的变化规律, 如图 8b 所示; 代入式(29)得到主动臂角加速度关于时间的变化规律, 如图 8c 所示。

由图 8 可看出, 仿真曲线光滑、连续且无突变, 且与前述转角变化曲线呈导数关系。由于机构对称

布置, 且末端运动圆轨迹的圆心位于静平台中心所在的竖直直线上, 因此仿真曲线随时间呈周期性变化, 由此可判断机构运行平稳、连贯。

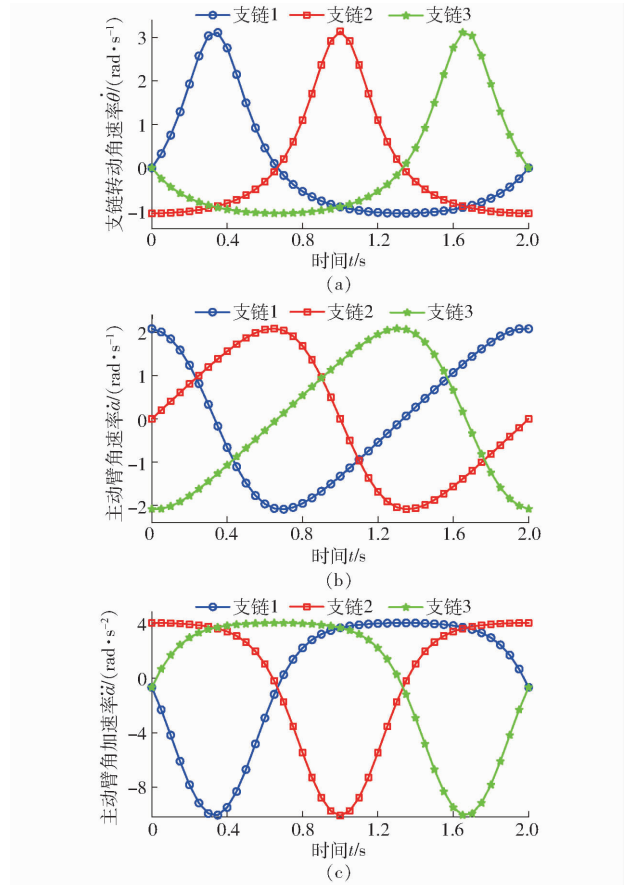


图 8 角速率与角加速度变化曲线

Fig. 8 Variation curves of angular velocity and acceleration

3 工作空间与奇异性分析

3.1 理论工作空间分析

机构的理论工作空间是机构动平台(末端执行器)所能到达的位置点的集合, 对于此并联机构, 亦即支链末端铰接中心所到达位置点的集合。采用逐层搜索的方法搜索每一层点, 对扫描到的点利用逆运动学关系求解其对应的主动输入角, 若

$$\alpha_{i, \min} \leq \alpha_i \leq \alpha_{i, \max} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (30)$$

即所有被扫描到的点都位于主动臂输入角范围内, 则该点位于理论工作空间内, 予以保存。由于机构对称布置, 可设定每个主动臂转角范围相同, 在此均取为 $-15^\circ \leq \alpha_i \leq 150^\circ$ ($i = 1, 2, 3$)。将扫描的边界点取包络面, 即得到理论工作空间。算法具体步骤如下: ① 如图 9 所示, 首先根据机构参数, 预估工作空间的大致范围, 并取一个能够涵盖这一范围的圆柱体。② 用垂直于 Z 轴的平面将上述圆柱体分成 n 层间隔为 ΔZ 的子平面, 所有的子平面为相同的圆截面, 且大于理论工作空间最大截面处的外接圆, 从下往上逐层搜索。③ 采用极坐标搜索法, 每个平

面内的每条极径初值从 0 开始,逐次增加 $\Delta\rho$,由于受到杆长以及转角范围的限制,到 $\rho_{\max}$ 停止;极角从 0 开始逐次增加 $\Delta\gamma$ 到 2π 停止,接着搜寻下一层,如图 9 中的第 $i-1$ 层所示。④ 将所有子平面边界点求出之后,再对整体边界点取外包络面,最终形成一个实体。依据上述算法,得到机器人的工作空间如图 10 所示。

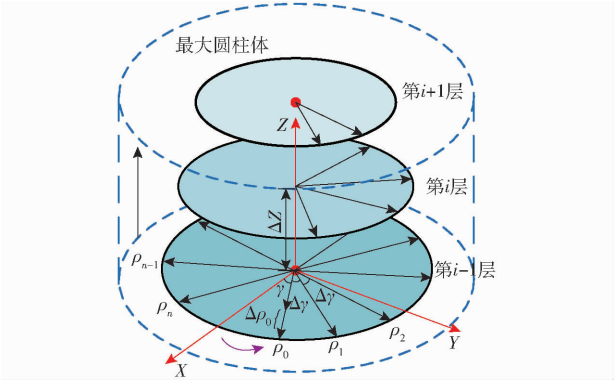


图 9 工作空间搜索示意图

Fig.9 Search schematic for workspace

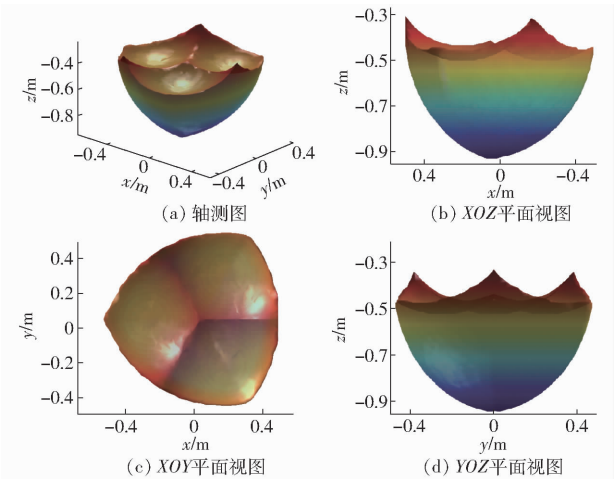


图 10 理论工作空间

Fig.10 Three-dimensional views of theoretical workspace

3.2 实际工作空间分析

由于杆件之间可能存在一定约束,有些位置或不能到达。机构运动时,其 3 条支链各自所在平面分别绕静平台 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 点处竖直轴转动,且 $D_iP (i = 1, 2, 3)$ 3 个杆分层铰接于 P 处,当末端点运动轨迹在静平台三顶点外接圆内时,不会发生干涉。当末端点运动轨迹在静平台外接圆外的某一区域时,由于 3 个铰接杆的水平转动副一端位于同一水平面上(图 5),在运动到某一位置时,可能发生重叠干涉。

如图 11 所示,将机构倒置, $A_i (i = 1, 2, 3)$ 连接成等边三角形。若末端执行器在某一平面上按图中紫色圆周轨迹顺时针运动,三角形每个顶点处的支链会在相邻两边与另一顶点处的支链在末端铰接杆

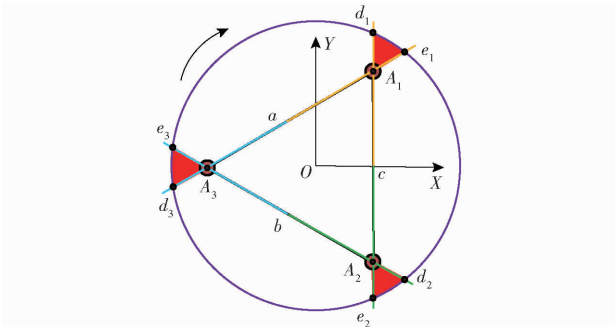


图 11 干涉位置分析

Fig.11 Interference position analysis

处产生重叠干涉。3 条支链产生 6 次干涉情况,当末端执行器处于点 d_1 时,如 A_1 处的黄色支链与 A_2 处的绿色支链在边 c 上重合,此时两支链的末端铰接杆产生重叠干涉;当末端执行器运动到点 e_1 时, A_1 处的黄色支链与 A_3 处的蓝色支链在边 a 上重合,此时两支链的末端铰接杆产生重叠干涉;同理亦可得出其余 4 次干涉。经分析,可得:① A_1 处的 2 次干涉位置之间形成一个夹角 $\angle d_1A_1e_1$,末端点的运动在此处产生中断,故图中夹角对应的红色区域无法到达。② 同理,在 A_2 处的 2 次干涉位置及 A_3 处的两次干涉位置之间分别形成夹角 $\angle d_2A_2e_2$ 与 $\angle d_3A_3e_3$,因此,其各自所对应的红色区域无法到达。

综上所述,当末端点在大于 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 外接圆半径区域运动时,在 3 处区域存在干涉。因此在实际应用时可将干涉位置加以识别并避开。

3.3 奇异性分析

机器人奇异位形分析^[24]方法有多种,如运动学法、几何法、代数法等。其中,代数法分析并联机构奇异位形实质是判断雅可比矩阵是否满秩,若不满秩则机器人出现奇异。本文基于雅可比矩阵分析该机构的奇异位形。

由 $J = J_q^{-1}J_x$ 可知,当矩阵 J_q 和 J_x 中至少一个奇异时,可使得雅可比矩阵 J 奇异。因此,并联机构会出现 3 种奇异情况: J_q 奇异、 J_x 奇异和 J_q 、 J_x 都奇异,这 3 种奇异情况分别对应逆向运动学奇异、正向运动学奇异和复合奇异^[25]。

3.3.1 逆向运动学奇异

当逆向雅可比矩阵 J_q 奇异时,此并联机构处于逆向运动学奇异,此时 $\det(J_q) = 0$,即

$$\prod_{i=1}^3 l_{C_iD_i}^T(k_{2i} \times l_{B_iC_i}) = 0 \tag{31}$$

只要 $l_{C_iD_i}^T(k_{2i} \times l_{B_iC_i}) (i = 1, 2, 3)$ 中有一项为零即可。故当 $l_{C_iD_i}$ 与 $l_{B_iC_i}$ 共线或重合时, $\det(J_q) = 0$,存在如下两种情况:

(1) 当 $l_{C_iD_i}$ 与 $l_{B_iC_i}$ 重合时,即 $\angle B_iC_iD_i = 0$,只要

有 1 条支链出现此种情况, 连杆 $l_{B_iC_i}$ 与转动叉之间, 杆与杆之间则产生干涉, 而在实际设计中不会出现这种情况。

(2) 当 $l_{C_iD_i}$ 与 $l_{B_iC_i}$ 共线时, 即 $\angle B_iC_iD_i = \pi$, 可得到 3 种可能奇异位形, 如图 12 所示。

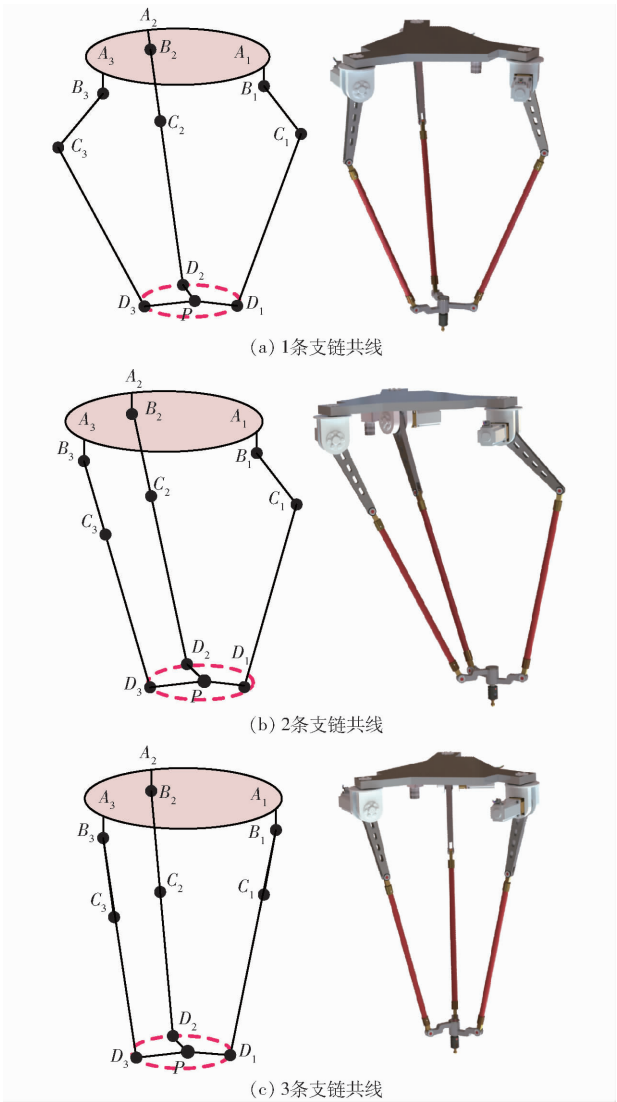


图 12 逆向运动学奇异

Fig. 12 Reverse kinematics singularities

3.3.2 正向运动学奇异

当雅可比矩阵 J_x 奇异时, 机构处于正向奇异位形, 此时 $\det(J_x) = 0$, 即向量组 $l_{C_1D_1}^T, l_{C_2D_2}^T, l_{C_3D_3}^T$ 线性相关, 此时并联机构的 3 个从动杆中至少有 2 个杆平行或 3 个杆共面。因 $R + L_b < r + L_c$, 故 3 个杆不会共面。经分析, 得到 2 种奇异位形如图 13 所示, 而通过调整输入角的范围能够避免此类奇异。

3.3.3 复合奇异

若机构正向雅可比矩阵 J_x 与逆向雅可比矩阵 J_q 均奇异, 则机构会出现复合奇异位形的情况。经以上分析可知, 该机构不会出现复合奇异位形。

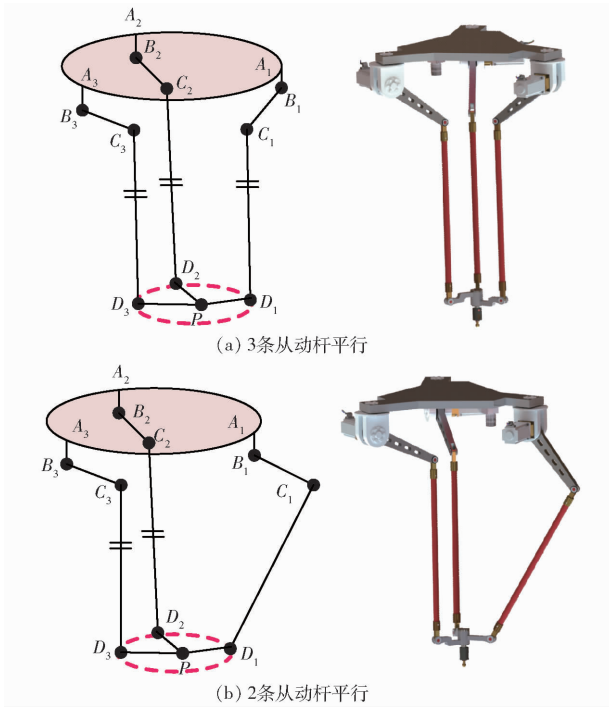


图 13 正向运动学奇异

Fig. 13 Forward kinematics singularities

4 性能分析及多目标优化

4.1 灵巧度指标

利用雅可比矩阵条件数为指标来评价机器人的灵巧度, 故一般也称为灵巧度指标^[26], 定义为

$$\kappa_J = \text{cond}(J) = \frac{\sigma_{\max}(J)}{\sigma_{\min}(J)} \quad (32)$$

一般多将 κ_J 的倒数 $1/\kappa_J$ 作为衡量机构性能的指标, 定义为运动学局部灵巧度, 其值越大越好, 通过研究其在工作空间内的分布情况, 可了解机构在不同位姿下的运动性能变化情况。以前述尺度参数(以下同)为例进行分析, 如图 14 所示, 图 14a ~ 14c 为末端点在不同位置时的构型图, 图 14e 为在理论工作空间中灵巧度的四维分布图, 图 14d、14f 为在不同截面上灵巧度的等高线分布图。可看出, 越往中心, 机构运动性能越好。

4.2 速度、承载力、刚度指标

4.2.1 速度指标

设机构输出速度矢量为 $\dot{X}$, 输入速度矢量为 $\dot{\alpha}$, 它们之间的关系为

$$\dot{X} = J^{-1} \dot{\alpha} = J_f \dot{\alpha} \quad (33)$$

其中

$$J^{-1} = J_f$$

式中 J_f ——并联机构正向运动学雅可比矩阵

$$\dot{X}^T \dot{X} = \dot{\alpha}^T J_f^T J_f \dot{\alpha} \quad (34)$$

令输入速度矢量为单位矢量

$$\|\dot{\alpha}\|^2 = \dot{\alpha}^T \dot{\alpha} = 1 \quad (35)$$

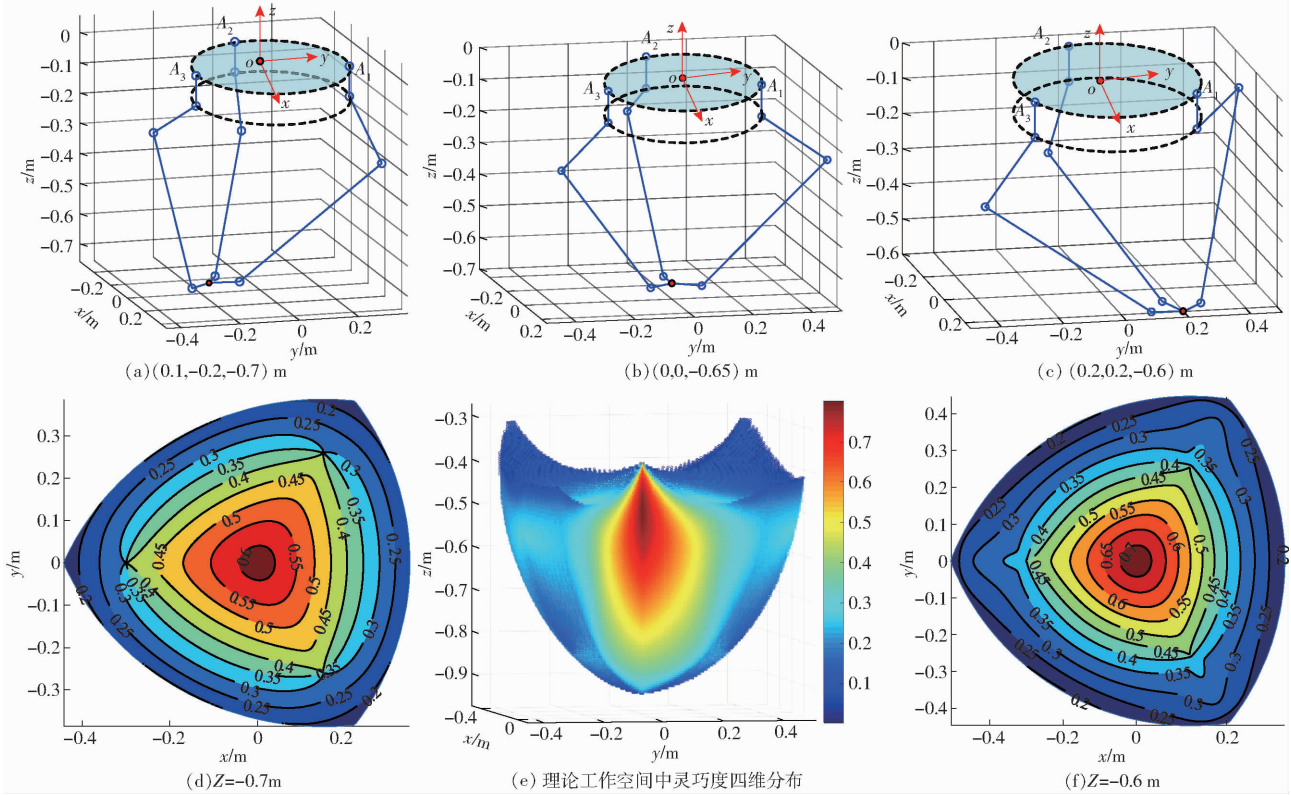


图 14 构型图与灵巧度指标分布

Fig. 14 Configuration maps and dexterity index distributions

则当 $\|\dot{\alpha}\|^2 = 1$ 时,输出速度极值为矩阵 $J_f^T J_f$ 的最大、最小特征值的开方^[27],即

$$\begin{cases} \|\dot{\mathbf{X}}_{\max}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}_f^T \mathbf{J}_f)} \\ \|\dot{\mathbf{X}}_{\min}\| = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{J}_f^T \mathbf{J}_f)} \end{cases} \quad (36)$$

因此,把输出速度极值作为机器人的输出速度衡量指标,原则上, $\dot{\mathbf{X}}_{\max}$ 和 $\dot{\mathbf{X}}_{\min}$ 都可作为速度指标。在实际应用中,期望的最小输出速度应该更大。最小输出速度越大,则机构的速度性能越好,因此,此处仅考虑最小输出速度。图 15a 为不同平面上的最小速度指标等高线分布图,可看出越往中心处最小速度越大,即性能越好,且 $Z = -0.6$ m 平面上性能更好。

4. 2. 2 承载力指标

承载力是并联机构重要的性能之一,它决定了机构能否支撑作用在动平台上的外力。

广义力和雅可比矩阵有直接关系。根据文献[28],作用在动平台上的外力 $\mathbf{F}$ 和主动关节的驱动力 $\boldsymbol{\tau}$ 有关系

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau} \quad (37)$$

承载力即定义为当驱动力矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 的模为 1 时,外力矢量 $\mathbf{F}$ 模的极值,即矩阵 $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ 的最大、最小特征值的开方

$$\begin{cases} \|\mathbf{F}_{\max}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \\ \|\mathbf{F}_{\min}\| = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \end{cases} \quad (38)$$

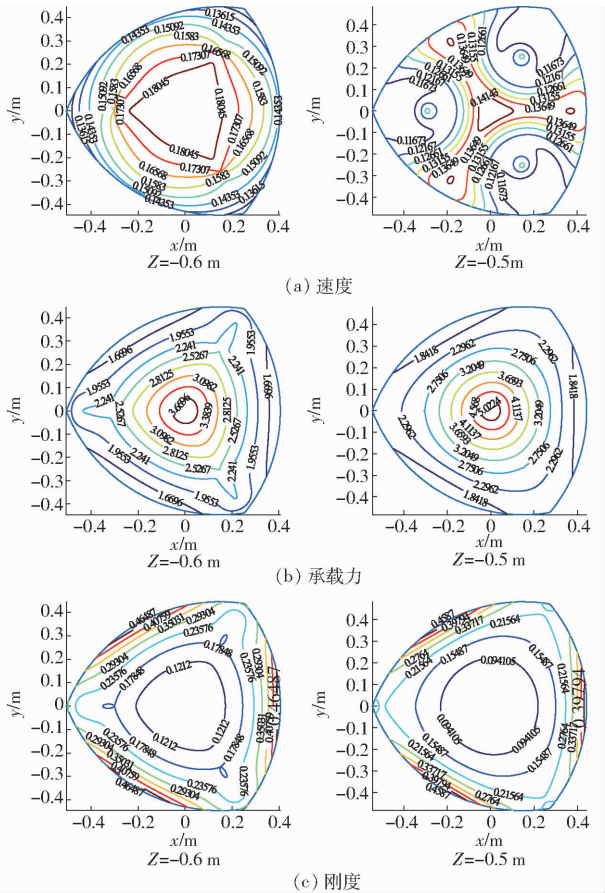


图 15 性能指标分布

Fig. 15 Distribution diagrams of performance indices

同样期望最小承载力越大越好,即取最小承载

力分析。图 15b 为不同平面上的最小承载力指标等高线分布图,可看出越往中心处最小承载力越大,且 $Z = -0.5 \text{ m}$ 平面上的承载能力更好。

4.2.3 刚度指标

由于机构在运动时受到外力作用会产生变形,且变形与构件刚度有关,而这些变形相互叠加就会产生较大的误差,从而影响精度。因此刚度也是评价并联机构的一种重要性能指标^[29]。由文献[30]对于对称式并联机构,把每条支链中主动臂的刚度视为相等,且令其值为 1,可得到机构末端执行器变形 $\mathbf{D}$ 与动平台外力 $\mathbf{F}$ 的关系为

$$\mathbf{D} = \mathbf{J} \mathbf{J}_f^T \mathbf{F} = \mathbf{C} \mathbf{F} \quad (39)$$

同样定义末端执行器的外力矢量的模为 1,可得到末端变形的极值为

$$\begin{cases} \|\mathbf{D}_{\max}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{C}^T \mathbf{C})} \\ \|\mathbf{D}_{\min}\| = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{C}^T \mathbf{C})} \end{cases} \quad (40)$$

预期的最大变形越小,机构的刚度性能越好,因此,仅考虑最大变形。图 15c 为不同平面上的刚度指标等高线分布图,可看出中心处变形量小于边缘处,且 $Z = -0.5 \text{ m}$ 平面上的变形量相对更小。

4.3 多目标优化

在给定的工作空间内,由于机构雅可比矩阵随位形的变化而变化,因此灵巧度、速度、承载力以及变形极值也依赖于机构的位形。在此定义机构灵巧度、速度、承载力以及刚度的全域评价指标为

$$\eta_{(1/\kappa_f)} = \frac{\int_W \|(1/\kappa_f)\| dW}{\int_W dW} \quad (41)$$

$$\eta_{\dot{\mathbf{x}}_{\min}} = \frac{\int_W \|\dot{\mathbf{x}}_{\min}\| dW}{\int_W dW} \quad (42)$$

$$\eta_{F_{\min}} = \frac{\int_W \|\mathbf{F}_{\min}\| dW}{\int_W dW} \quad (43)$$

$$\eta_{D_{\max}} = \frac{\int_W \|\mathbf{D}_{\max}\| dW}{\int_W dW} \quad (44)$$

式中 $\eta_{(1/\kappa_f)}$ ——灵巧度全域均值评价指标
 $\eta_{\dot{\mathbf{x}}_{\min}}$ ——最小速度全域均值评价指标
 $\eta_{F_{\min}}$ ——最小承载力全域均值评价指标
 $\eta_{D_{\max}}$ ——最大变形全域均值评价指标

以静平台尺寸为基准,且避免末端铰接杆重叠,将末端执行器参考点的运动范围限制在半径 $R = 0.3 \text{ m}$ 的圆柱中,得到工作空间如图 16 所示。考虑

转动叉所在轴线,根据实际工程要求,选取半径为 $r' = 0.25 \text{ m}$,高为 $h = 0.2 \text{ m}$ 的圆柱体为任务工作空间,记为 W_i 。同时,铰接杆长度预设为 $r = 0.1 \text{ m}$ 。

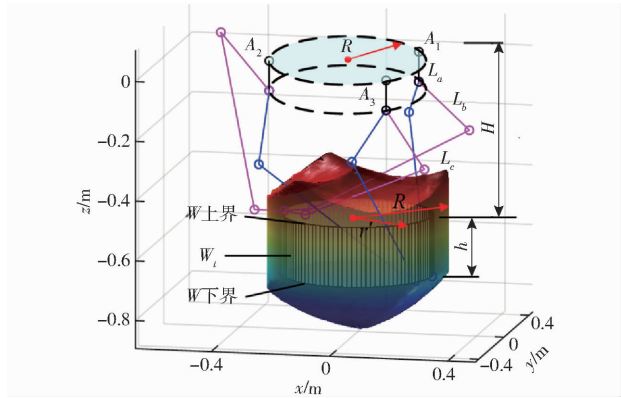


图 16 任务工作空间示意图

Fig. 16 Schematic of task workspace

据此,该机构的多目标优化可归结为:给定 r' 和 h ,确定尺度参数 L_b 、 L_c 、 H ,使得其任务工作空间内综合性能最优。为满足设计要求,综合考虑机构的灵巧度、速度、承载力及刚度等指标构造优化设计模型。研究发现,上述指标具有矛盾性,灵巧度、最小速度指标以及最小承载力指标的数值越大越好,而最大变形则越小越好。因此为统一变化趋势,定义子目标函数,使单目标值越小越好。

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta_{(1/\kappa_f)}} \\ f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta_{\dot{\mathbf{x}}_{\min}}} \\ f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta_{F_{\min}}} \\ f_4(\mathbf{x}) = \eta_{D_{\max}} \end{cases} \quad (45)$$

设计变量包括主动臂长度 L_b 、从动臂长度 L_c 以及任务工作空间相对于静坐标系的垂直位置 H ,记为 $\mathbf{x} = (L_b, L_c, H)$ 。综合该机构的结构参数以及实际应用需求,构造多目标优化设计模型^[31]为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 w_i \frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i^*}{f_i^a - f_i^*} \\ \text{s. t.} \begin{cases} 0.2 \text{ m} \leq L_b \leq 0.35 \text{ m} \\ 0.6 \text{ m} \leq L_c \leq 0.65 \text{ m} \\ -0.6 \text{ m} \leq H \leq -0.5 \text{ m} \end{cases} \end{cases} \quad (46)$$

式中 $f_i(\mathbf{x})$ ——子目标函数

f_i^* ——子目标函数进行单目标优化的最优解

f_i^a ——子目标函数进行单目标优化时最大值

w_i ——权重,取 $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.1$, $w_3 = 0.3$, $w_4 = 0.3$

为便于理解设计变量对目标函数的影响规律,利用 Matlab 求得目标函数与杆长以及 H 的关系,如

图 17 所示。

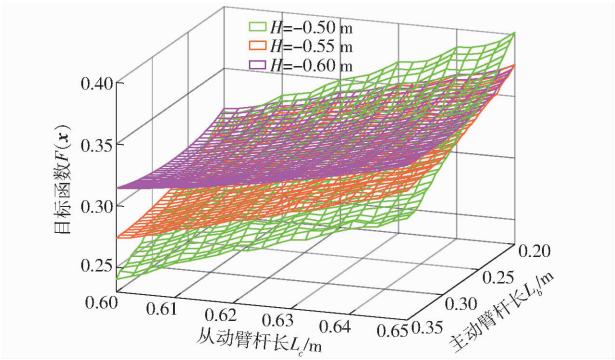


图 17 目标函数随尺度参数变化规律

Fig. 17 Variations of objective function with scale parameters

由图 17 可看出,目标函数的变化都与从动臂杆长的变化呈正相关,且在 $H = -0.50$ m 和 $H = -0.55$ m 时,目标函数的最小值出现在主动臂杆长最大值附近,在 $H = -0.60$ m 时,目标函数的最小值出现在主动臂杆长取值范围之内。进一步借助 Matlab 优化工具箱中的遗传算法^[32]求解设计变量的最优值,约经过 70 次迭代,最终机构尺度参数优化结果见表 1。

表 1 优化后机构尺度参数

组号	L_b/m	L_c/m	H/m	$\min F(x)$
1	0.350	0.600	-0.50	0.241
2	0.348	0.600	-0.55	0.274
3	0.274	0.600	-0.60	0.306

注:数据为圆整之后。

根据优化结果,综合考虑机构的运动性能以及具备较大的工作空间,选择表 1 的第 1 组数据作为最终的尺度参数。其优化前后空间投影视图如图 18 所示,结果表明,优化后的机构除了具备更好的运动性能外,还具有更大的理论可达工作空间。

5 多体仿真校验

为验证前述机构设计与运动学分析的正确性,借助多体软件 ADAMS 开展虚拟运动仿真。首先,将 SolidWorks 中的三维虚拟样机模型作适当简化后,导入 ADAMS 中,定义约束并添加驱动。将第 2 节逆运动学中 3 个主动臂驱动转角的输出数据,导入 ADAMS 中,作为主动关节的输入,运用其强大的仿真求解功能,进行正向运动学分析,仿真输出过程如图 19 所示。将末端跟踪轨迹与前述期望轨迹对比,可看出,末端执行器参考点跟踪轨迹与期望轨迹完全吻合,从而验证了前述机构设计与运动学分析的正确性与合理性,为基于该机构的 3D 打印运动模块制造及其拓展应用提供了依据。

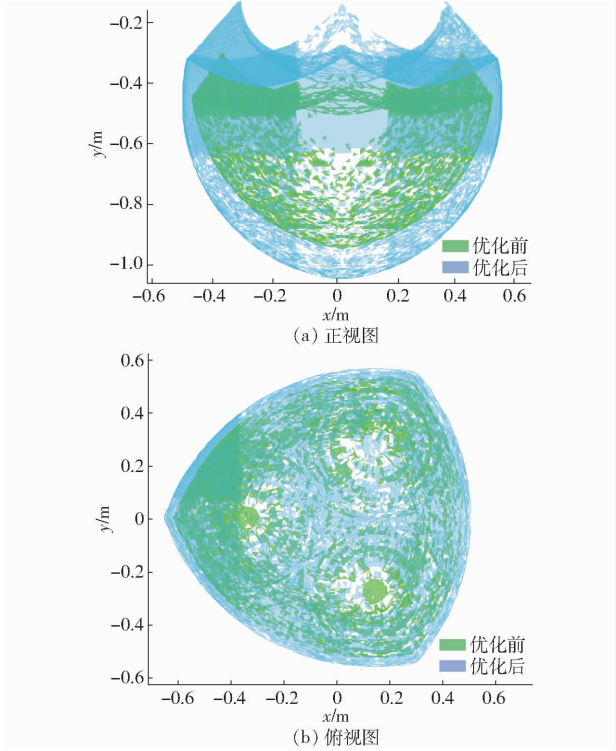


图 18 优化前后投影视图

Fig. 18 Projection views of workspace before and after optimization

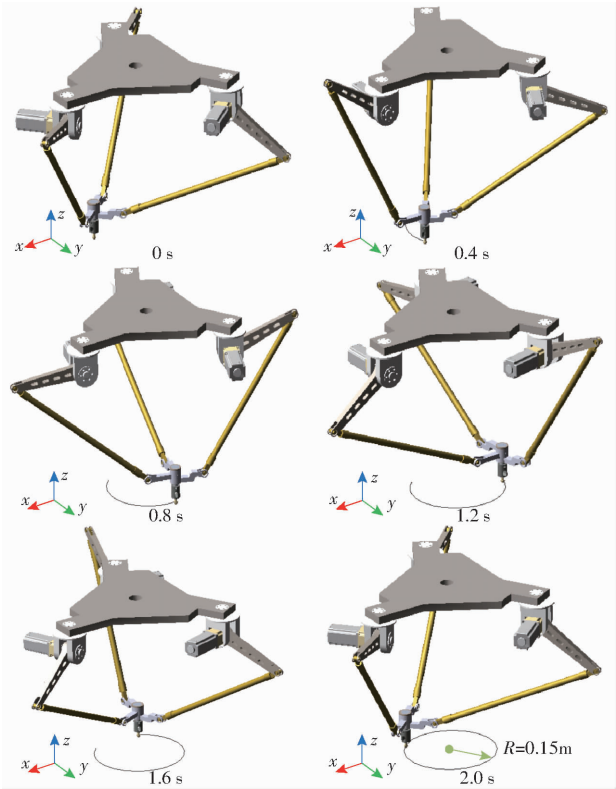


图 19 仿真过程中不同时刻机构的运行状态

Fig. 19 Running states of mechanism at different times during simulation process

6 结论

(1)提出了一种拓扑演化设计方法,据此设计

出了一种含末端铰接结构的新型并联机构, 基于螺旋理论分析可知, 机构末端具有三平动 (3T) 的能力。与现有机构相比, 该机构仅含转动副, 结构简洁紧凑, 制造成本低。

(2) 借助几何投影法和闭环矢量法, 建立了位置约束方程, 推导了机构位置逆解, 并分析了正解; 通过求导法建立了速度、加速度映射模型, 并得到了速度雅可比矩阵; 进行了正/逆解数值验证, 为后续运动控制奠定了基础。

(3) 利用分层搜索的思想, 得到了该机构理论

及实际可达工作空间, 并对其进行了奇异性辨识, 结果表明, 在给定的输入角范围内, 只存在逆向运动学奇异。

(4) 对机构灵巧度、速度、承载力以及刚度等性能进行了系统分析, 绘制了相应的性能图谱。据此构造了融合上述指标的目标函数, 完成了多目标优化, 得到了机构最优尺度参数, 为后续实体样机制造提供了重要依据。在理论分析基础上, 进一步利用 ADAMS 软件进行虚拟仿真, 证实了该并联机器人机构设计可行性和理论分析正确性。

参 考 文 献

- [1] 唐洋, 陈海锋, 刘志强, 等. 3D 打印技术产业化现状及发展趋势分析[J]. 自动化仪表, 2018, 39(5): 12-17.
TANG Yang, CHEN Haifeng, LIU Zhiqiang, et al. Analysis on the industrialization status and development trend of 3D printing technology[J]. Process Automation Instrumentation, 2018, 39(5): 12-17. (in Chinese)
- [2] 贺超, 王磊, 李国远, 等. 3D 打印在骨科的应用[J]. 中华骨科杂志, 2017, 37(19): 1235-1241.
HE Chao, WANG Lei, LI Guoyuan, et al. Applications of 3D printing in orthopaedics[J]. Chinese Journal of Orthopaedics, 2017, 37(19): 1235-1241. (in Chinese)
- [3] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 97-108.
- [4] CARABIN G, SCALERA L, WONGRATANAPHISAN T, et al. An energy-efficient approach for 3D printing with a linear Delta robot equipped with optimal springs[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2021, 67: 1-14.
- [5] SONG Xuan, PAN Yayue, CHEN Yong. Development of a low-cost parallel kinematic machine for multidirectional additive manufacturing[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2015, 137(2): 1-13.
- [6] 常定勇, 方跃法, 叶伟. 双输出 3D 打印解耦并联机器人的设计与分析[J]. 机械工程学报, 2017, 53(7): 39-46.
CHANG Dingyong, FANG Yuefa, YE Wei. Design and analysis of a double output 3D printing decoupling parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(7): 39-46. (in Chinese)
- [7] TSAI L W, STAMPER R E. A parallel manipulator with only translational degrees of freedom[C] // Proc. ASME Design Engineering Technical Conferences, 1996.
- [8] 沈惠平, 曾博雄, 尤晶晶, 等. 具有解析式位置正解的三平移并联机构设计与分析[J]. 农业机械学报, 2020, 51(2): 383-391.
SHEN Huiping, ZENG Boxiong, YOU Jingjing, et al. Topology design and analysis of three-translation parallel mechanism with analytical direct position solutions[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(2): 383-391. (in Chinese)
- [9] 沈惠平, 吴成琦, 许可, 等. 一种零耦合度三平移并联机构的设计及运动学[J]. 中国机械工程, 2019, 30(6): 658-664.
SHEN Huiping, WU Chengqi, XU Ke, et al. Design and kinematics of 3-translation parallel mechanisms with zero coupling degree[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(6): 658-664. (in Chinese)
- [10] 李仕华, 黄真. 一种特殊 3-UPU 并联平台机构瞬时运动特性[J]. 中国机械工程, 2005, 16(18): 1641-1646.
LI Shihua, HUANG Zhen. Kinematic characteristics of a special 3-UPU parallel platform manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(18): 1641-1646. (in Chinese)
- [11] 陈修龙, 孙先洋, 邓昱. 5 自由度空间并联机构运动学优化设计[J]. 农业机械学报, 2014, 45(6): 303-307.
CHEN Xiulong, SUN Xianyang, DENG Yu. Kinematic optimization design of 5-DOF spatial parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(6): 303-307. (in Chinese)
- [12] 宋轶民, 周培, 齐杨, 等. 一类大转角两转动并联机构的构型分析与运动学优化设计[J]. 天津大学学报, 2019, 52(9): 908-916.
SONG Yimin, ZHOU Pei, QI Yang, et al. Topology analysis and kinematic optimization of a 2-DOF rotational parallel mechanism with large workspace[J]. Journal of Tianjin University, 2019, 52(9): 908-916. (in Chinese)
- [13] 张良安, 万俊, 谭玉良. Ahut-Delta 并联机构改进混沌粒子群算法尺度综合[J]. 农业机械学报, 2015, 46(8): 344-351.
ZHANG Liang'an, WAN Jun, TAN Yuliang. Dimensional synthesis of Ahut-Delta parallel mechanism based on improved chaotic particle swarm algorithm[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(8): 344-351. (in Chinese)
- [14] 沈惠平, 强恒存, 曾氢菲, 等. 基于结构降耦的一类低耦合度新型 3T1R 并联机构的拓扑设计[J]. 中国机械工程, 2017, 28(10): 1163-1171.
SHEN Huiping, QIANG Hengcun, ZENG Qingfei, et al. Topological design for a class of novel 3T1R parallel mechanisms with low coupling degree based on coupling-reducing[J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(10): 1163-1171. (in Chinese)

- [15] 沈惠平, 张震, 杨廷力, 等. 3T1R 并联机构结构降耦设计与运动学分析[J]. 农业机械学报, 2017, 48(10): 380–389.
SHEN Huiping, ZHANG Zhen, YANG Tingli, et al. Structure coupling-reducing design and kinematics analysis of 3T1R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(10): 380–389. (in Chinese)
- [16] 黄真, 刘婧芳, 李艳文. 论机构的自由度[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 73–122.
- [17] 沈惠平, 朱小蓉, 尹洪波, 等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(23): 102–113.
SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Principle and design method for structure coupling-reducing of parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23): 102–113. (in Chinese)
- [18] 沈惠平, 李菊, 王振, 等. 基于结构降耦和运动解耦的并联机构拓扑结构优化及其性能改善[J]. 机械工程学报, 2017, 53(19): 176–186.
SHEN Huiping, LI Ju, WANG Zhen, et al. Topology structure optimization and performance improvement for parallel mechanisms based on structure coupling-reducing and motion decoupling[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(19): 176–186. (in Chinese)
- [19] 黄昔光, 黄旭. 基于共形几何代数的空间并联机构位置正解[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(12): 2377–2381.
HUANG Xiguang, HUANG Xu. Forward displacement of a spatial parallel parallel mechanism position based on conformal geometric algebra[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 43(12): 2377–2381. (in Chinese)
- [20] 韩方元, 赵丁选, 李天宇. 3-RPS 并联机构正解快速数值算法[J]. 农业机械学报, 2011, 42(4): 229–233.
HAN Fangyuan, ZHAO Dingxuan, LI Tianyu. A fast forward algorithm for 3-RPS parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(4): 229–233. (in Chinese)
- [21] 王启明, 苏建, 隋振, 等. 一种新型冗余驱动并联机构位姿正解研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55(9): 40–47.
WANG Qiming, SU Jian, SUI Zhen, et al. Research on forward kinematics of a new type of redundant actuation parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(9): 40–47. (in Chinese)
- [22] 强红宾, 王力航, 姜雪, 等. 基于调整步长牛顿法的 Stewart 并联机构位置正解[J]. 光学精密工程, 2018, 26(12): 2982–2990.
QIANG Hongbin, WANG Lihang, JIANG Xue, et al. Forward kinematics of Stewart parallel manipulator based on step-adjusting Newton method[J]. Optics and Precision Engineering, 2018, 26(12): 2982–2990. (in Chinese)
- [23] 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 基于拟 Newton 法的并联机构位置正解[J]. 机械工程学报, 2015, 51(9): 28–36.
GENG Mingchao, ZHAO Tieshi, WANG Chang, et al. Direct position analysis of parallel mechanism based on quasi-Newton method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(9): 28–36. (in Chinese)
- [24] 谭兴强, 谢志江, 谢永春. 6-PUS 并联机构奇异判据推导与奇异性分析[J]. 农业机械学报, 2012, 43(12): 234–239.
TAN Xingqiang, XIE Zhijiang, XIE Yongchun. Singularity judge deriving and singularity analysis for 6-PUS parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(12): 234–239. (in Chinese)
- [25] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281–290.
- [26] 于靖军, 刘辛军, 丁希仑, 等. 机器人机构学的数学基础[M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2008: 326–327.
- [27] WU Jun, WANG Jinsong, WANG Liping, et al. Performance comparison of three planar 3-DOF parallel manipulators with 4-RRR, 3-RRR and 2-RRR structures[J]. Mechatronics, 2010, 20(4): 510–517.
- [28] 季晔, 刘宏昭, 原大宁, 等. 一种四自由度并联机构的性能指标分析[J]. 中国机械工程, 2012, 23(3): 258–263.
JI Ye, LIU Hongzhao, YUAN Daning, et al. Analyses for performance indices of a four-DOF parallel manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 2012, 23(3): 258–263. (in Chinese)
- [29] 温如凤, 方跃法, 叶伟. 具有耦合分支的两转动两移动并联机构分析与优化[J]. 农业机械学报, 2021, 52(7): 402–410.
WEN Rufeng, FANG Yuefa, YE Wei. Analysis and optimization of 2R2T parallel mechanism with coupling kinematic chain[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(7): 402–410. (in Chinese)
- [30] 张立杰. 两自由度并联机器人的性能分析及尺寸优化[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2006
ZHANG Lijie. Performance analysis and dimension optimization of 2-DOF parallel manipulators[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2006. (in Chinese)
- [31] 田昕, 赵铁石, 王唱, 等. 3-RHUR/PUS+PP 混联机器人构型与性能分析[J]. 农业机械学报, 2021, 52(6): 386–396.
TIAN Xin, ZHAO Tieshi, WANG Chang, et al. Configuration and performance analysis of 3-RHUR/PUS+PP hybrid robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(6): 386–396. (in Chinese)
- [32] 雷英杰, 张善文. MATLAB 遗传算法工具箱及应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2014.