

三平移并联机构拓扑设计与运动学分析

李 菊<sup>1</sup> 朱忠颀<sup>1</sup> 沈惠平<sup>1</sup> 赵一楠<sup>1</sup> 吴广磊<sup>2</sup>

(1. 常州大学现代机构学研究中心, 常州 213164; 2. 大连理工大学机械工程学院, 大连 116024)

**摘要:** 基于子运动链生成子工作空间和基于叠加原理的并联机构拓扑设计方法,设计一种具有符号位置正解且运动解耦的纯三平移并联机构,并对该机构进行拓扑分析;运用基于拓扑特征的机构位置分析方法求解该机构位置正逆解并进行验算;基于 SKC 单元的奇异分析方法对该并联机构的奇异位形进行分析,并求解该并联机构规则无奇异的长方体工作空间。研究结果为一类具有规则工作空间并联机构的设计提供了理论基础。

**关键词:** 并联机构; 拓扑设计; 奇异性; 工作空间

**中图分类号:** TH112      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1298(2022)09-0425-09

**OSID:**



Topological Design and Kinematic Analysis of Novel Three-translation Parallel Mechanism

LI Ju<sup>1</sup> ZHU Zhongqi<sup>1</sup> SHEN Huiping<sup>1</sup> ZHAO Yinan<sup>1</sup> WU Guanglei<sup>2</sup>

(1. Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213164, China

2. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** According to the topology design method of parallel mechanism based on sub-kinematic-chain generating sub-workspace and its superposition principle, a pure three-translation parallel mechanism with symbolic positive solution and motion decoupling was designed. Through the topology structural analysis of the mechanism, it was found that the mechanism was composed of two sub-kinematic-chains, and the coupling degree of the mechanism was 0. Then, using the mechanism position analysis method based on topological characteristics, the forward and inverse position solutions of the mechanism were solved and verified. And it was found that the mechanism had the characteristics of partial motion decoupling and symbolic positive solution. Finally, the singular configuration of the parallel mechanism was analyzed by using the singular analysis method based on the sub-kinematic-chain element, and the regular and non-singular rectangular workspace of the parallel mechanism was solved. Using this singularity analysis method, all singular configurations in the sub-kinematic-chain can be found, and it was conducive to solving the regular workspace without singularity. The research result can provide a theoretical basis and specific method for the design of a class of parallel mechanisms with regular workspace, and it played a guiding role in the design of three-translation parallel mechanism based on the superposition principle of sub-workspace generated by sub-kinematic-chain, and provided an idea and method for singularity and workspace analysis of complex parallel mechanism with multiple sub-kinematic-chains.

**Key words:** parallel mechanism; topology design; singularity; working space

0 引言

两支链少自由度三平移(3 translation, 3T)并联机构具有支链干涉少、工作空间大等特点。三平移并联机构均可基于螺旋理论<sup>[1-4]</sup>、基于位移子

群<sup>[5-9]</sup>和基于方位特征集<sup>[10-11]</sup>的型综合方法设计而得。这些方法均从瞬时特征速度出发,导出非瞬时位置(过程)特征,且都以动平台方位特征(Position and orientation characteristic, POC)集和自由度(Degree of freedom, DOF)为设计目标。其中,

基于方位特征集的方法具有与运动位置无关,得到的机构具有非瞬时性,且又与定坐标系无关,机构存在的几何条件具有一般性的优点。

并联机构奇异性分析的方法主要有 Jacobian 法、运动学法、线几何法等。文献[12-14]通过对 Stewart 机构的奇异轨迹分析,求解出其无奇异工作空间;文献[15-17]对无奇异工作空间进行了详细的研究;MA 等<sup>[18]</sup>通过实体样机对 GOSSELIN 的方法进行了验证,此方法用欧拉角对姿态进行描述时较复杂,故有学者通过四元数法<sup>[19-22]</sup>对运动学进行建模,以简化奇异方程表达式,减少计算量及难度。JHA 等<sup>[23]</sup>通过几何计算和数学计算软件进行奇异方程消元。

机构工作空间一般指机构动平台所能达到的运动位置的集合。求解机构工作空间的方法主要有:数值方法、几何方法、离散化方法等。对于具有符号式位置正解的并联机构,可以从正解入手进行求解,这样可以缩小搜索范围,减少计算量,且结果更为精确<sup>[24-27]</sup>。

本文将根据基于子运动链生成子工作空间和基于叠加原理的并联机构拓扑设计方法,设计一种具有符号位置正解且运动解耦的纯三平移并联机构,并对该机构进行拓扑分析;运用基于拓扑特征的机构位置分析方法求解该机构的位置正逆解;基于子运动链(Sub-kinematic chain, SKC)单元的奇异分析方法对该并联机构的奇异位形和工作空间进行分析。

1 机构设计

两支链的并联机构只有当 2 条支链均含有三平移的运动输出特性时,机构才具有三平移的输出运动特性。本文设计 3T 并联机构的 2 条支链如下:

第 1 条支链 I 为能产生 3T 运动的 2-DOF 混合支链(Hybrid single open chain, HSOC),它由产生两平移(2T)元素的子平面机构并串联一个平行四边形构成。选取  $P_{11} \perp R_{12} \parallel R_{13} - Pa \parallel P_{21}$  子平面机构,且其两移动副( $P_{11}$ 、 $P_{21}$ )呈  $90^\circ$  垂直布置,其中,  $Pa$  表示由 4 个 R 副组成的 4R 平行四边形 1,如图 1a 所示;子平面机构输出构件的点  $S$  处与第 2 个 4R 平行四边形 2 的一短边固连,且平行四边形 2 的 4 个 R 副轴线垂直于第 1 个平行四边形 1 的转动副轴线;平行四边形 2 的另一短边与动平台的一端点  $T$  固结,末端点  $T$  具有产生三平移的特性,如图 1b 所示。

第 2 条支链为一条 PRUR 型简单支链 II。得到的 3T 并联机构如图 2 所示。

机构在静平台上的 3 个移动副为驱动副,其中,

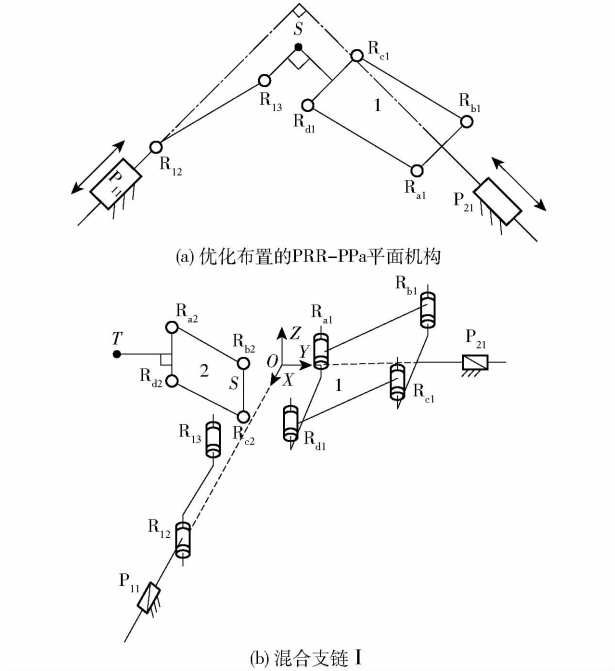


图 1 具有 3T 输出的混合支链 I 设计

Fig. 1 Structure designs of HSOC I with 3T output

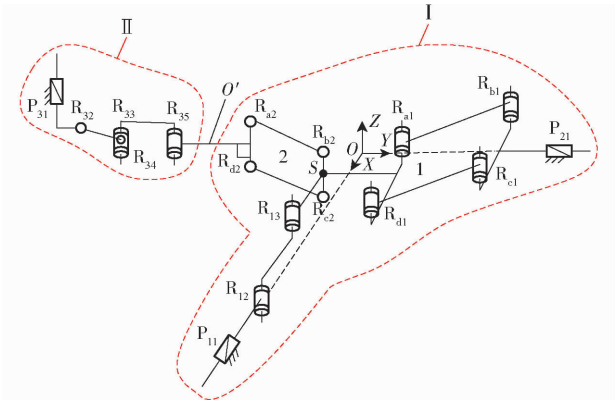


图 2 3T 并联机构示意图

Fig. 2 A novel 3T parallel mechanism

$P_{11}$  和  $P_{21}$  在同一平面  $XOY$  内,且分别沿着  $X$  轴和  $Y$  轴轴线方向运动; $P_{31}$  沿着平行  $Z$  轴轴线方向运动,但位于  $Y$  轴负方向的一侧(即  $YOZ$  平面的左侧)。

此机构具有以下特点:①除 3 个驱动的移动副外,其余运动副均为转动副,制造方便。②具有符号式位置正解,及输入-输出运动解耦性。

2 机构拓扑

2.1 理论基础

(1) 并联机构 POC 方程为<sup>[1]</sup>

$$M_{bi} = \bigcup_{j=1}^m M_{ji} \tag{1}$$

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \tag{2}$$

式中  $M_{ji}$ ——第  $i$  个运动副的 POC 集  
 $M_{bi}$ ——第  $i$  条支链末端的 POC 集  
 $M_{Pa}$ ——机构动平台的 POC 集

(2) 并联机构全周 DOF 公式为<sup>[1]</sup>

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \tag{3}$$

其中  $\xi_{L_j} = \dim. \left\{ \left( \bigcap_{i=1}^j M_{b_i} \right) \cup M_{b_{(j+1)}} \right\}$  (4)

$v = m - n + 1$

式中  $F$  ——机构自由度

$f_i$  ——第  $i$  个运动副的自由度

$m$  ——运动副数       $n$  ——构件数

$v$  ——独立回路数

$\xi_{L_j}$  ——第  $j$  个独立回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}$  ——前  $j$  条支链组成的子并联机构的 POC 集

$M_{b_{(j+1)}}$  ——前  $j+1$  条支链末端构件的 POC 集

(3) 机构耦合度<sup>[1]</sup>

由基于序单开链 (Single open chain, SOC) 的机构组成原理知,任一机构可分解为约束度为正、零、负的 3 种有序单开链,第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  的约束度定义<sup>[1]</sup>为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{5}$$

式中  $m_j$  ——第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  运动副数

$I_j$  ——第  $j$  个 SOC <sub>$j$</sub>  驱动副数

进一步,一组有序的  $v$  个 SOC 可划分为若干个独立子运动链 SKC,而每个 SKC 仅含一个自由度为零的基本运动链 BKC (Basic kinematics chain),对一个 SKC 而言,须满足

$$\sum_{j=1}^v \Delta_j = 0 \tag{6}$$

因此,SKC 耦合度为

$$\kappa = \Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \tag{7}$$

## 2.2 拓扑分析

### 2.2.1 POC 集

选取动平台的中点  $P$  作为机构的末端端点  $O'$ ,本机构的 POC 集计算过程如下:

(1) HSOC 末端 POC 集

混合支链拓扑结构可以表示为

$$\text{HSOC} \{ - (P_{11} \perp R_{12} \parallel R_{13} - Pa_{\textcircled{1}} \perp P_{21}) \perp Pa_{\textcircled{2}} - \}$$

由 1.1 节可知,子平面机构的末端 POC 集为两平移,串联的平行四边形①等效于 1 个移动副。

因此,由式(1)可得,混合支链 HSOC 的末端 POC 集显然为 3T,即

$$M_{\text{HSOC}} = \left[ \begin{matrix} t^2 ( \parallel ( \diamond XOY ) ) \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup \left[ \begin{matrix} t^1 \\ r^0 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^0 \end{matrix} \right]$$

(2) PRUR 支链的末端 POC 集

PRUR 支链的拓扑结构为

$$\text{SOC} \{ - P_{31} \perp R_{32} \parallel R_{33} \perp R_{34} // R_{35} - \}$$

由式(1)可得,支链 II 末端的 POC 集为 3T2R,

即

$$M_{\text{SOC}} = \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^2 ( \parallel \diamond ( R_{32}, R_{35} ) ) \end{matrix} \right]$$

(3) 机构末端动平台 POC 集

由式(2)得,机构末端动平台的 POC 集为

$$M_{Pa} = M_{\text{HSOC}} \cap M_{\text{SOC}} =$$

$$\left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^0 \end{matrix} \right] \cap \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^2 ( \parallel \diamond ( R_{32}, R_{35} ) ) \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^0 \end{matrix} \right]$$

### 2.2.2 自由度

该机构可分解为 2 个独立回路,第 1 个回路为混合支链 I 中的子并联机构,记为

$$\text{LOOP}_1 \{ - P_{11} \perp R_{12} \parallel R_{13} - Pa_{\textcircled{1}} \perp P_{21} - \}$$

易知,其独立位移方程数为  $\xi_{L_1} = 3$ 。

由式(3)可得,第 1 个回路的自由度为

$$F_{L_1} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} = 5 - 3 = 2$$

因此,子并联机构的子动平台可实现两平移的输出特性。

第 2 个回路由第 1 个回路与平行四边形②及简单支链 II 共同构成,简记为 LOOP<sub>2</sub>。

由式(4)可得,其独立位移方程数为

$$\xi_{L_2} = \dim. \{ M_{\text{HSOC}} \cup M_{\text{SOC}} \} = \dim. \left\{ \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup \left[ \begin{matrix} t^3 \\ r^2 \end{matrix} \right] \right\} = 5$$

由式(3)可得,整个机构自由度为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} = 11 - (3 + 5) = 3$$

因此,该机构自由度为 3,当取移动副  $P_{11}$ 、 $P_{21}$ 、 $P_{31}$  作驱动副时,动平台可以实现三平移(3T)的运动输出。

### 2.2.3 耦合度

由式(5)分别计算得 2 个回路约束度为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^m f_i - I_j - \xi_{L_1} = 5 - 2 - 3 = 0$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=2}^m f_i - I_j - \xi_{L_2} = 6 - 1 - 5 = 0$$

这样,第 1、2 回路可分别构成 SKC<sub>1</sub>、SKC<sub>2</sub>,其耦合度由式(7)分别计算得

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = \frac{1}{2} |0| = 0$$

因此,机构耦合度为零,可求得符号式位置正

解;又由于  $P_{11}$ 、 $P_{21}$  分布于  $SKC_1$ , 且  $SKC_1$  的位置具有自确定性, 因此, 机构具有输入-输出运动解耦性。

3 机构位置

3.1 坐标系建立

机构运动学建模如图 3 所示。子运动链  $SKC_1$  在  $XOY$  平面的投影如图 4a 所示, 子运动链  $SKC_2$  在  $YOZ$  和  $XOZ$  平面的投影如图 4b、4c 所示, 并由  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  限定点  $B_1$ 、 $B_3$ 、 $C_3$  的位置。

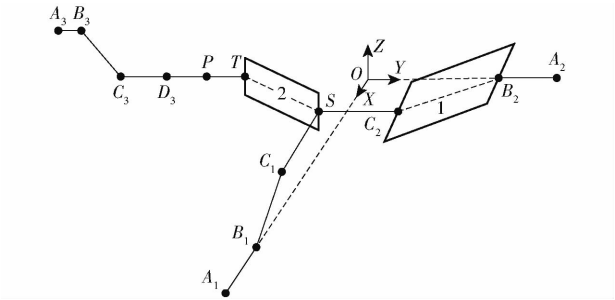


图 3 3T 并联机构的运动建模图  
Fig. 3 Kinematic modeling of 3T parallel mechanism

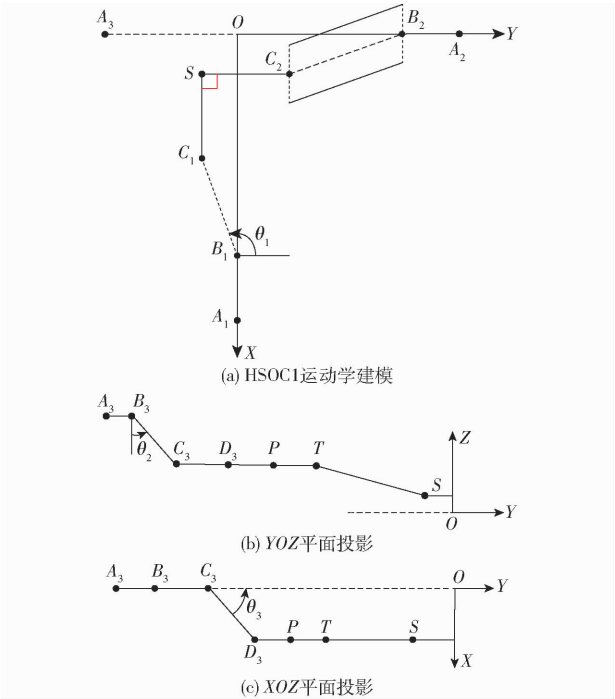


图 4 子运动链 SKC 运动学建模  
Fig. 4 Kinematic modeling of sub-kinematics chains

点  $A_1$ 、 $A_2$  和  $A_3$  分别代表 3 个移动副  $P_{11}$ 、 $P_{21}$ 、 $P_{31}$  的位置; 点  $B_1$ 、 $C_1$ 、 $B_3$ 、 $D_3$  为相应转动副  $R_{12}$ 、 $R_{13}$ 、 $R_{32}$ 、 $R_{35}$  的位置; 点  $C_3$  为虎克铰  $R_{33}$ 、 $R_{34}$  两个转动副轴线的交点; 点  $C_2$ 、 $B_2$  和  $T$ 、 $S$  为两个平行四边形短边的固接点, 且点  $S$  为子动平台末端点; 机构动平台的两个端点为点  $D_3$ 、 $T$ , 而点  $P$  为其中心点。

设构件尺寸参数为:  $l_{A_1B_1} = l_1$ ;  $l_{A_2B_2} = l_5$ ;  $l_{A_3B_3} = l_9$ ;  $l_{B_1C_1} = l_2$ ;  $l_{C_1S} = l_3$ ;  $l_{C_2S} = l_4$ ;  $l_{B_3C_3} = l_8$ ;  $l_{C_3D_3} = l_7$ ;  $l_{B_2C_2} =$

$q_1$ ;  $l_{ST} = q_2$ ;  $l_{TD3} = 2l_6$ 。点  $A_3$  在静坐标系下, 只在  $Z$  轴方向上移动, 故其  $X$ 、 $Y$  轴坐标为固定值, 即  $X_{A_3} = 0$ ,  $Y_{A_3} = -l_{10}$ 。

3.2 位置正解求解

已知静平台 3 个驱动副的输入分别为  $\rho_1$ 、 $\rho_2$ 、 $\rho_3$ , 求动平台的 3 个输出, 即  $P = (P_x, P_y, P_z)$ 。易知  $A_1 = (\rho_1, 0, 0)$ ,  $A_2 = (0, \rho_2, 0)$ ,  $A_3 = (0, -l_{10}, \rho_3)$ ,  $B_1 = (\rho_1 - l_1, 0, 0)$ ,  $B_2 = (0, \rho_2 - l_5, 0)$ ,  $B_3 = (0, -l_{10} + l_9, \rho_3)$ 。

由  $A_i$ 、 $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 的坐标, 可直接求得  $SKC_1$ 、 $SKC_2$  的运动位置。

(1) 在  $SKC_1$  ( $A_1 - B_1 - C_1 - S - C_2 - B_2 - A_2$ ) 中有

$$\begin{aligned} C_1 &= (\rho_1 - l_1 - l_2 \sin \theta_1, l_2 \cos \theta_1, 0) \\ S &= (\rho_1 - l_1 - l_2 \sin \theta_1 - l_3, l_2 \cos \theta_1, 0) \\ C_2 &= (\rho_1 - l_1 - l_2 \sin \theta_1 - l_3, l_2 \cos \theta_1 + l_4, 0) \end{aligned}$$

由几何约束  $l_{B_2C_2} = q_1$  列出位置方程, 并求得

$$\begin{aligned} G_1 \sin \theta_1 + G_2 \cos \theta_1 + G_3 &= 0 \\ \theta_1 &= 2 \arctan \frac{G_1 + m \sqrt{G_1^2 + G_2^2 - G_3^2}}{G_2 - G_3} \quad (m = \pm 1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G_1 &= 2l_2(l_1 + l_3 - \rho_1) \\ G_2 &= 2l_2(l_4 + l_5 - \rho_2) \end{aligned}$$

$$G_3 = (l_1 + l_3 - \rho_1)^2 + (l_4 + l_5 - \rho_2)^2 + l_2^2 - q_1^2$$

(2) 在  $SKC_2$  ( $A_3 - B_3 - C_3 - D_3 - P - T - S$ ) 中有

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -l_{10} + l_9 + l_8 \sin \theta_2 \\ \rho_3 - l_8 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= (l_7 \sin \theta_3, -l_{10} + l_9 + l_8 \sin \theta_2 + l_7 \cos \theta_3, \\ &\quad \rho_3 - l_8 \cos \theta_2, ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= (\rho_1 - l_1 - l_2 \sin \theta_1 - l_3, -l_{10} + l_9 + l_8 \sin \theta_2 + \\ &\quad l_7 \cos \theta_3 + 2l_6, \rho_3 - l_8 \cos \theta_2) \end{aligned}$$

由几何约束  $l_{TD3} = 2l_6$ , 列出位置方程, 并求得

$$\theta_3 = \arcsin \frac{\rho_1 - l_2 \sin \theta_1 - l_1 - l_3}{l_7} \quad (9)$$

进一步, 由几何约束  $l_{ST} = q_2$  列出位置方程, 并求得

$$\begin{aligned} Q_1 \sin \theta_2 + Q_2 \cos \theta_2 + Q_3 &= 0 \\ \theta_2 &= 2 \arctan \frac{Q_1 + n \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 - Q_3^2}}{Q_2 - Q_3} \quad (n = \pm 1) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2l_8(l_7 \cos \theta_3 + l_9 - l_{10} + 2l_6 - l_2 \cos \theta_1) \\ Q_2 &= -2l_8 \rho_3 \end{aligned}$$

$$Q_3 = (l_7 \cos \theta_3 + l_9 - l_{10} + 2l_6 - l_2 \cos \theta_1)^2 + \rho_3^2 + l_8^2 - q_2^2$$

由式 (8) ~ (10) 可得点  $T$ 、 $D_3$  的坐标, 由此可得其中心点  $P$  的位置为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_7 \sin \theta_3 \\ -l_{10} + l_9 + l_8 \sin \theta_2 + l_7 \cos \theta_3 + l_6 \\ \rho_3 - l_8 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

显然,因式(8)中有  $m = \pm 1$ ,式(10)中有  $n = \pm 1$ ,动平台的点  $P$  共有 4 组解。

3.3 位置逆解求解

已知动平台上  $P = (P_x, P_y, P_z)$ ,求输入  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ 。

(1)由点  $P$  坐标,求得点  $T$ 、 $D_3$ 坐标为

$$D_3 = (P_x, P_y - l_6, P_z)$$

$$T = (P_x, P_y + l_6, P_z)$$

记  $S = (S_x, S_y, 0)$ ,且  $S_x = P_x$ ,由几何约束 $l_{ST} = q_2$ ,得

$$S_y = k \sqrt{q_2^2 - P_z^2} + P_y + l_6 \quad (k = \pm 1) \quad (12)$$

同时,求得

$$C_1 = (P_x + l_3, S_y, 0) \quad C_2 = (P_x, S_y + l_4, 0)$$

(2)由几何约束  $l_{B_1C_1} = l_2$  和  $l_{B_2C_2} = q_1$ ,可得

$$B_1 = (\sqrt{l_2^2 - S_y^2} + P_x + l_3, 0, 0) \quad (13)$$

$$B_2 = (0, \sqrt{q_1^2 - P_x^2} + S_y + l_4, 0) \quad (14)$$

设定杆  $B_3C_3$ 与  $Z$  轴负方向的夹角为  $\theta_2$ ,则可求得点  $C_3$ 的坐标为

$$C_3 = (0, -l_{10} + l_9 + l_8 \sin \theta_2, P_z)$$

由几何约束  $l_{C_3D_3} = l_7$ 列出位置方程,求得

$$\theta_2 = k \arcsin \frac{\sqrt{l_7^2 - P_x^2} + l_{10} + P_y - l_9 - l_6}{l_8} \quad (k = \pm 1) \quad (15)$$

于是,由式(13)~(15)可得位置逆解为

$$\begin{cases} \rho_1 = u \sqrt{l_2^2 - S_y^2} + P_x + l_3 + l_1 \\ \rho_2 = v \sqrt{q_1^2 - P_x^2} + S_y + l_4 + l_5 \\ \rho_3 = w l_8 \cos \theta_2 + P_z \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $u = \pm 1, v = \pm 1, w = \pm 1$ 。

由式(11)、(16)可知,理论上该机构存在 16 组逆解。

3.4 位置正逆解数值验证

设机构各杆件参数为: $l_1 = 100 \text{ mm}, l_2 = 180 \text{ mm}, l_3 = 80 \text{ mm}, l_4 = 60 \text{ mm}, l_5 = 100 \text{ mm}, l_6 = 50 \text{ mm}, l_7 = 180 \text{ mm}, l_9 = 60 \text{ mm}, l_{10} = 560 \text{ mm}, q_1 = q_2 = 180 \text{ mm}$ 。

在 SolidWorks 中的机构三维图上,取两组输入参数如下:①  $\rho_1 = 355.95 \text{ mm}, \rho_2 = 344.09 \text{ mm}, \rho_3 = 285.80 \text{ mm}$ 。②  $\rho_1 = 353.17 \text{ mm}, \rho_2 = 268.28 \text{ mm}, \rho_3 = 333.98 \text{ mm}$ 。

由式(8)~(11),用 Matlab 求得理论位置正解,

如表 1 所示。

表 1 位置正解计算值

Tab.1 Calculated value of positive position solution

| mm |       |         |        |
|----|-------|---------|--------|
| 组  | $P_x$ | $P_y$   | $P_z$  |
| 1  | -5.39 | -180.34 | 120.64 |
| 2  | -8.23 | -204.86 | 161.35 |

再将表 1 中的数值代入式(12)~(16),可得逆解数值如表 2 所示。

表 2 位置逆解计算值

Tab.2 Calculated value of inverse position solution

| mm |          |          |          |
|----|----------|----------|----------|
| 组别 | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\rho_3$ |
| 1  | 355.9    | 344.1    | 285.8    |
| 2  | 353.2    | 268.3    | 333.7    |

误差在 1% 之内,故验证了正逆解公式推导的正确性。

4 机构奇异性分析

4.1 奇异位形分析

4.1.1 在 SKC<sub>1</sub>中

为求解 SKC<sub>1</sub>中的雅可比矩阵,需在 SKC<sub>1</sub>中建立位置约束方程。此时,设 SKC<sub>1</sub>子动平台末端的输出点  $S = (x_s, y_s, 0)$ ,则

$$\begin{cases} C_1 = (x_s + l_3, y_s, 0) \\ C_2 = (x_s, y_s + l_4, 0) \end{cases} \quad (17)$$

由杆长  $l_{B_1C_1} = l_2$  和  $l_{B_2C_2} = q_1$ 得 2 个约束方程为

$$\begin{cases} (x_{B_1} - x_{C_1})^2 + (y_{B_1} - y_{C_1})^2 = l_2^2 \\ (x_{B_2} - x_{C_2})^2 + (y_{B_2} - y_{C_2})^2 = q_1^2 \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)两边同时对时间  $t$  求导,得到该 SKC<sub>1</sub>中子动平台上点  $S$  输出速度  $\dot{\boldsymbol{v}}_1 = [\dot{x}_s \quad \dot{y}_s]^T$  和驱动副输入速度  $\dot{\boldsymbol{w}}_1 = [\dot{\rho}_1 \quad \dot{\rho}_2]^T$  的关系为

$$\boldsymbol{A} \dot{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{B} \dot{\boldsymbol{w}}_1 = 0 \quad (19)$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x_{B_1} - x_{C_1} & y_{B_1} - y_{C_1} \\ x_{B_2} - x_{C_2} & y_{B_2} - y_{C_2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}$$

$g_{11} = -(x_{B_1} - x_{C_1}) \quad g_{22} = -(y_{B_2} - y_{C_2})$   
根据矩阵  $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$  是否奇异,将机构奇异位形分为两类。

(1)逆向运动学奇异

当机构发生逆向运动学奇异时,即  $\det(\boldsymbol{B}) = 0$ ,

矩阵  $\mathbf{B}$  视为两个行向量,此时,矩阵  $\mathbf{B}$  内至少有一个向量为零向量,即

$$g_{11} = -(x_{B_1} - x_{C_1}) = 0$$

即点  $B_1$ 、 $C_1$  的  $x$  坐标值相等,此时,从动杆  $B_1C_1$  与沿着  $X$  轴的导轨垂直,如图 5 所示。

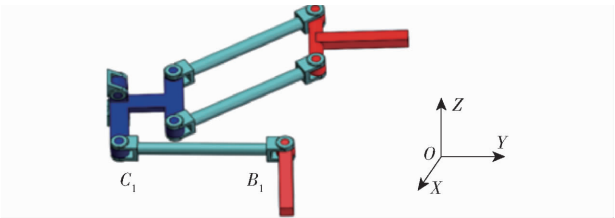


图 5 SKC<sub>1</sub>逆向运动学奇异位形

Fig. 5 Inverse kinematic singular configuration of SKC<sub>1</sub>

点  $B_2$ 、 $C_2$  的  $y$  坐标值相等时有

$$g_{22} = -(y_{B_2} - y_{C_2}) = 0$$

此时,从动杆  $B_2C_2$  与沿着  $Y$  轴的导轨垂直,即平行四边形两长边重合。

上述两种奇异发生时,驱动端有速度,但是末端速度为零,机构容易出现卡死。当  $B_2C_2$  与导轨垂直时,平行四边形副两长杆重合,杆件发生干涉,该种情况显然不存在;同样,由于驱动副运动范围限制,从动杆  $B_1C_1$  同样无法运动到与驱动轴线垂直的情况,故这种奇异不需要过多考虑。

(2) 正向运动学奇异

当机构发生正向运动学奇异时,即  $\det(\mathbf{A}) = 0$ ,为分析方便,将矩阵  $\mathbf{A}$  视为 2 个行向量  $\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]^T$ ,且向量  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  均不可能为零,故此时只可能两向量线性相关,即  $\mathbf{e}_1 = k_1\mathbf{e}_2$ ,所以  $\frac{y_{B_1} - y_{C_1}}{x_{B_1} - x_{C_1}} = \frac{y_{B_2} - y_{C_2}}{x_{B_2} - x_{C_2}}$ ,即从动杆  $C_1B_1$  和  $C_2B_2$  在  $XOY$  平面内平行,如图 6 所示。

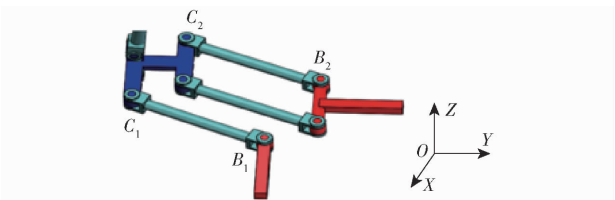


图 6 SKC<sub>1</sub>正向运动学奇异位形

Fig. 6 Forward kinematic singular configuration of SKC<sub>1</sub>

4.1.2 在 SKC<sub>2</sub> 中

为求解 SKC<sub>2</sub> 中的雅可比矩阵,将 SKC<sub>2</sub> 视为一个独立的机构,并将 SKC<sub>1</sub> 中点  $S$  的输出作为 SKC<sub>2</sub> 中的  $XOY$  平面内二维平动输入,而另一个输入由沿着  $Z$  轴移动的移动副  $A_3$  产生。

由两个几何条件  $l_{B_3C_3} = l_8$ 、 $l_{ST} = q_2$  和一个位置关系  $x_T = x_S$ ,得位置约束方程为

$$\begin{cases} x_T = x_S \\ (y_S - y_T)^2 + (z_S - z_T)^2 = q_2^2 \\ (x_{B_3} - x_{C_3})^2 + (y_{B_3} - y_{C_3})^2 + (z_{B_3} - z_{C_3})^2 = l_8^2 \end{cases} \quad (20)$$

将式(20)两边同时对时间  $t$  求导,得到该 SKC<sub>2</sub> 中动平台上点  $P$  输出速度  $\dot{\mathbf{v}}_2 = [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p \quad \dot{z}_p]^T$  和驱动副输入速度  $\dot{\mathbf{w}}_2 = [\dot{x}_s \quad \dot{y}_s \quad \dot{p}_3]^T$  的关系为

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{D} \dot{\mathbf{w}}_2 = 0 \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_S - y_T & z_S - z_T \\ x_{B_3} - x_{C_3} & y_{B_3} - y_{C_3} & z_{B_3} - z_{C_3} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_S - y_T & 0 \\ 0 & 0 & z_{B_3} - z_{C_3} \end{bmatrix}$$

根据矩阵  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$  是否奇异,将机构的奇异位形分为两类。

(1) 逆向运动学奇异

将矩阵  $\mathbf{D}$  视为 3 个行向量,机构发生逆向运动学奇异时,  $\det(\mathbf{D}) = 0$ ,显然,矩阵无法线性相关,故矩阵  $\mathbf{D}$  内至少有一个零向量,即

$$z_{B_3} - z_{C_3} = 0$$

即点  $B_3$  和  $C_3$  的  $Z$  轴坐标值相等,此时从动杆  $B_3C_3$  与  $Z$  轴呈  $90^\circ$ ,杆  $A_3B_3$ 、杆  $B_3C_3$  两杆共线,如图 7 所示。



图 7 SKC<sub>2</sub>逆向运动学奇异位形

Fig. 7 Inverse kinematic singular configuration of SKC<sub>2</sub>

点  $S$  和点  $T$  的  $Y$  轴坐标值相等时有

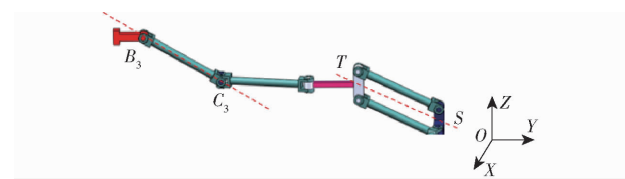
$$y_S - y_T = 0$$

此时,杆  $ST$  与  $Z$  轴平行,即平行四边形机构 2 的两长杆重合。此类情况由于机构杆件的干涉或重合以及驱动副运动范围的限制,在实际运动中不可能到达,故不作过多考虑。

(2) 正向运动学奇异

当 SKC<sub>2</sub> 发生正向运动学奇异时,即  $\det(\mathbf{C}) = 0$ ,将矩阵  $\mathbf{C}$  视为 3 个行向量  $\mathbf{C} = [\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_4 \quad \mathbf{e}_5]^T$ ,显然,3 个行向量均不可能为零向量,故只可能  $\mathbf{e}_4$  和  $\mathbf{e}_5$  两向量线性相关,即  $\mathbf{e}_4 = k_2\mathbf{e}_5$ ,因此,有  $\frac{y_{B_3} - y_{C_3}}{x_{B_3} - x_{C_3}} =$

$\frac{y_S - y_T}{x_S - x_T}$ ,即杆  $B_3C_3$  和  $ST$  在  $XOY$  平面内的投影平行,如图 8 所示。

图8 SKC<sub>2</sub>正向运动学奇异位形Fig. 8 Forward kinematic singular configuration of SKC<sub>2</sub>

对于只含有一个 SKC 的机构,机构奇异性分析只能在单个 SKC 内求解整体机构的输入输出速度雅可比矩阵,并据此来分析机构的奇异情况。此时,其奇异既可存在于某个支链上,也可存在于支链之间。

## 4.2 机构奇异曲线/曲面绘制

采用 Maple 软件和 SIROPA<sup>[28]</sup> 工具包对该并联机构进行代数方程建模,并基于 SKC 单元分析其奇异曲线/曲面。

### 4.2.1 SKC<sub>1</sub> 奇异曲线

#### (1) 逆向运动学奇异(串联奇异)

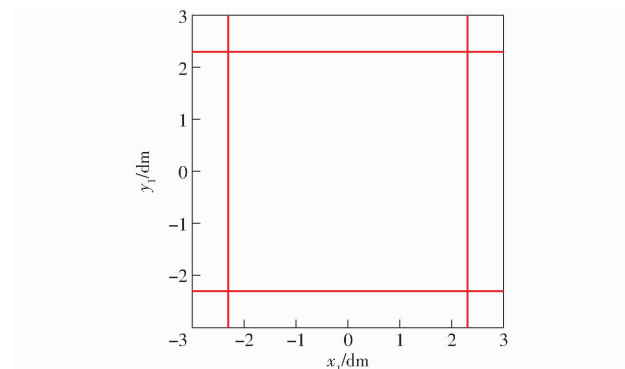
运用 SIROPA 中的 SerialSingularities 函数,得到一组满足串联奇异的多项式  $s_1$

$$s_1 = \left( \rho_1^2 - \frac{8}{3}\rho_1 - 2\rho_1x_1 - \frac{457}{200} + \frac{7}{2}x_1 + x_1^2 + y_1^2, \right. \\ \left. x_1^2 + \rho_2^2 - 3\rho_2 - 2\rho_2y_1 - \frac{56}{13} + 3y_1 + y_1^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{2}(4\rho_1 - 7 - 4x_1)(2\rho_2 - 3 - 2y_1) \right) \quad (22)$$

运用 Projection 函数对式(22)进行消元,求得一个仅包含 2 个输出变量的约束方程  $s_{1\_cart}$

$$s_{1\_cart} = (80y_1^2 - 376)(80x_1^2 - 376) \quad (23)$$

利用 Plot2D 函数表达出  $s_{1\_cart}$  方程,即为机构 SKC<sub>1</sub> 的串联奇异曲线,如图 9 所示。图中坐标  $x_1$  和  $y_1$  分别代表  $s_{1\_cart}$  方程中的输出变量  $x_1$  和  $y_1$ ,单位为分米(dm)。

图9 SKC<sub>1</sub>的串联奇异曲线Fig. 9 Serial singular curves of SKC<sub>1</sub>

#### (2) 正向运动学奇异(并联奇异)

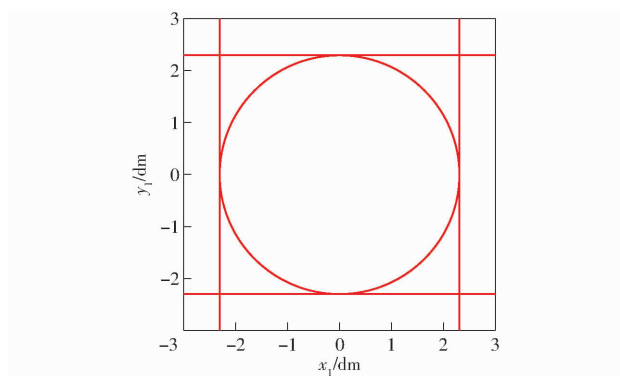
运用 SerialSingularities 函数得到一组满足并联奇异的多项式  $s_2$

$$s_2 = \left( \rho_1^2 - \frac{8}{3}\rho_1 - 2\rho_1x_1 - \frac{457}{200} + \frac{7}{2}x_1 + x_1^2 + y_1^2, \right. \\ \left. x_1^2 + \rho_2^2 - 3\rho_2 - 2\rho_2y_1 - \frac{75}{13} + 3y_1 + y_1^2, \right. \\ \left. 4\rho_1\rho_2 - 6\rho_1 - 4\rho_1y_1 - 7\rho_2 + \frac{37}{3} + 7y_1 - 4x_1\rho_2 + 6x_1 \right) \quad (24)$$

运用 Projection 函数对式(24)进行消元投影,得到一个仅包含输出变量  $x_1$ 、 $y_1$  的二次约束方程  $s_{1\_cart}$

$$s_{2\_cart} = 80x_1^2 + 60y_1^2 - 468 \quad (25)$$

利用 Plot2D 函数表示出  $s_{2\_cart}$ ,即为机构 SKC<sub>1</sub> 的并联奇异曲线,如图 10 所示。图中坐标  $x_1$  和  $y_1$  分别代表  $s_{2\_cart}$  方程中的输出变量  $x_1$  和  $y_1$ 。

图10 SKC<sub>1</sub>的并联奇异曲线Fig. 10 Parallel singular curves of SKC<sub>1</sub>

### 4.2.2 SKC<sub>2</sub> 奇异曲面

利用 SIROPA 中的 CreateManipulator 函数对 SKC<sub>2</sub> 进行建模。此时,以 SKC<sub>1</sub> 的末端输出作为 SKC<sub>2</sub> 的输入,SKC<sub>2</sub> 的输出即为机构动平台的输出。

给定 3 个输入  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = -150$  mm,  $\rho_3 = 240$  mm 后,即可通过 SIROPA 程序包进行奇异性分析。

#### (1) 逆向运动学奇异(串联奇异)

运用 SerialSingularities 函数,求得一组满足串联奇异的多项式  $s_{12}$

$$s_{12} = \left( x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 - \frac{7}{5}y_1 + \right. \\ \left. y_2^2 + \frac{7}{5}y_2 - \frac{12}{5} + z_2^2, x_2^2 + \frac{2061}{400} + \frac{24}{5}y_2 + \right. \\ \left. y_2^2 + \rho_3^2 - \frac{39}{10}\rho_3 - 2\rho_3z_2 + \frac{39}{10}z_2 + z_2^2, \right. \\ \left. x_1 - x_2, \frac{1}{50}(20\rho_3 - 39 - 20z_2)(10y_1 - 10y_2 - 7) \right) \quad (26)$$

其次,运用 Projection 函数,对式(26)进行 Grobner 基消元,求得只含 3 个输入变量( $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\rho_3$ )的约束方程  $s_{12\_art}$

$$\begin{aligned}s_{12\_art} = & 160\,000\rho_3^4 - 320\,000\rho_3^2x_1^2 + 320\,000\rho_3^2y_1^2 + \\ & 160\,000x_1^4 + 320\,000x_1^2y_1^2 + 160\,000y_1^4 - 1\,248\,000\rho_3^3 + \\ & 1\,088\,000\rho_3^2y_1 + 1\,248\,000\rho_3x_1^2 - 1\,248\,000\rho_3y_1^2 + \\ & 1\,088\,000x_1^2y_1 + 1\,088\,000y_1^3 + 5\,061\,600\rho_3^2 - \\ & 4\,243\,200\rho_3y_1 - 778\,400x_1^2 + 1\,655\,200y_1^2 - \\ & 10\,249\,200\rho_3 - 660\,960y_1 + 2\,634\,489)(160\,000\rho_3^4 + \\ & 320\,000\rho_3^2x_1^2 + 320\,000\rho_3^2y_1^2 + 160\,000x_1^4 + \\ & 320\,000x_1^2y_1^2 + 160\,000y_1^4 - 1\,248\,000\rho_3^3 + \\ & 1\,088\,000\rho_3^2y_1 - 1\,248\,000\rho_3x_1^2 - 1\,248\,000\rho_3y_1^2 + \\ & 1\,088\,000x_1^2y_1 + 1\,088\,000y_1^3 + 2\,239\,200\rho_3^2 - \\ & 4\,243\,200\rho_3y_1 + 1\,655\,200x_1^2 + 3\,504\,800y_1^2 + \\ & 758\,160\rho_3 + 5\,627\,680y_1 - 2\,752\,343\end{aligned}\quad (27)$$

故使用 Plot 函数列里的 Plot3D 函数表达 3 个变量的  $s_{12\_art}$  隐式约束方程的曲面,即为 SKC<sub>2</sub> 的串联奇异曲面,如图 11 所示。图中坐标  $x_1$ 、 $y_1$  和  $\rho_3$  分别代表  $s_{12\_art}$  方程中的变量  $x_1$ 、 $y_1$  和  $\rho_3$ 。

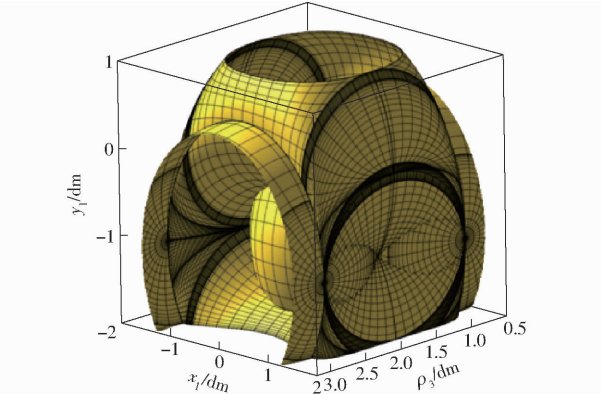


图 11 SKC<sub>2</sub> 的串联奇异曲面  
Fig. 11 Serial singular surfaces of SKC<sub>2</sub>

(2) 正向运动学奇异( 并联奇异)

通过 Analysing 函数列里的函数 ParallelSingularities,得到一组满足并联奇异的多项式  $s_{22}$

$$\begin{aligned}s_{22} = & \left( x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 - \frac{7}{5}y_1 + \right. \\ & y_2^2 + \frac{7}{5}y_2 - \frac{12}{5} + z_2^2, x_2^2 + \frac{2\,061}{400} + \frac{24}{5}y_2 + \\ & y_2^2 + \rho_3^2 - \frac{39}{10}\rho_3 - 2\rho_3z_2 + \frac{39}{10}z_2 + z_2^2, \\ & x_1 - x_2, -4y_1\rho_3 + \frac{39}{5}y_1 + 4y_1z_2 + 4y_2\rho_3 - \\ & \left. \frac{39}{5}y_2 + \frac{14}{5}\rho_3 - \frac{273}{50} + \frac{34}{5}z_2 \right)\end{aligned}\quad (28)$$

通过 Projection 函数对式(28)进行 Grobner 基消元,得到只含有 3 个输出变量  $x_2$ 、 $y_2$ 、 $z_2$  的约束方程  $s_{22\_cart}$

$$\begin{aligned}s_{22\_cart} = & 2\,000x_2^2z_2^2 - 5\,780x_2^2 - 5\,780y_2^2 - \\ & 8\,820z_2^2 - 27\,744y_2 - 7\,803\end{aligned}\quad (29)$$

运用 Plot3D 函数表达出  $s_{22\_cart}$  隐式约束方程的曲面,即为 SKC<sub>2</sub> 的并联奇异曲面,如图 12 所示。图中坐标  $x_2$ 、 $y_2$  和  $z_2$  分别代表  $s_{22\_cart}$  方程中的变量  $x_2$ 、 $y_2$  和  $z_2$ 。

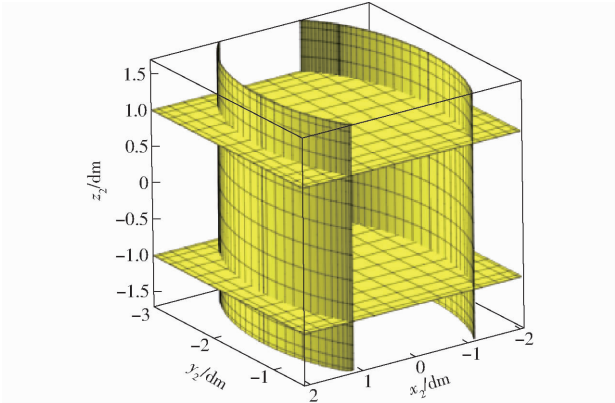


图 12 SKC<sub>2</sub> 的并联奇异曲面  
Fig. 12 Parallel singular surfaces of SKC<sub>2</sub>

5 机构工作空间求解

5.1 SKC<sub>1</sub>

根据 3.1 节中给定的机构杆长参数,利用离散元方法及位置正解式(8)~(11)对机构进行坐标值搜索,可求得机构中 SKC<sub>1</sub> 的工作空间。然后,避开奇异位置,在 SKC<sub>1</sub> 的工作空间内截取一个规则的正方形,边长为 300 mm,作为其任务工作空间;又可看成 SKC<sub>2</sub> 中点 S 的输入范围,如图 13 所示。

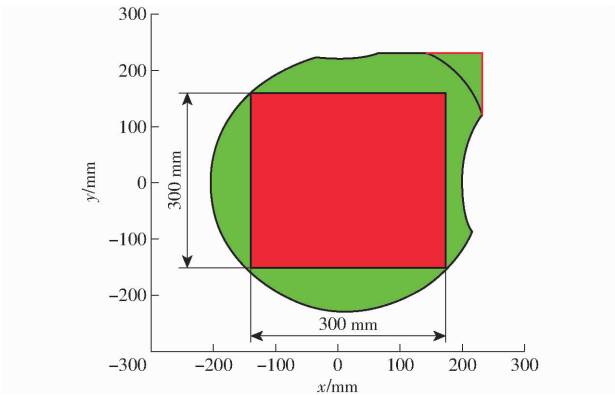


图 13 SKC<sub>1</sub> 的任务工作空间  
Fig. 13 Task workspace of SKC<sub>1</sub>

5.2 SKC<sub>2</sub>

因 SKC<sub>1</sub> 可达工作空间为 SKC<sub>2</sub> 的部分输入的范围,机构动平台的工作空间为 SKC<sub>2</sub> 在 SKC<sub>1</sub> 的末端运动( $X-Y$ )范围下的输出工作空间。故 SKC<sub>1</sub> 的工作空间决定了机构整体在  $XOY$  平面上的运动范围,而简单支链 II 决定了机构整体在  $Z$  方向的运动空间,从而可基于子工作空间叠加原理解出 SKC<sub>2</sub> 的

工作空间。然后,在此工作空间内截取出一最大规则无奇异任务工作空间:  $300\text{ mm} \times 150\text{ mm} \times 120\text{ mm}$ ,如图 14 所示。

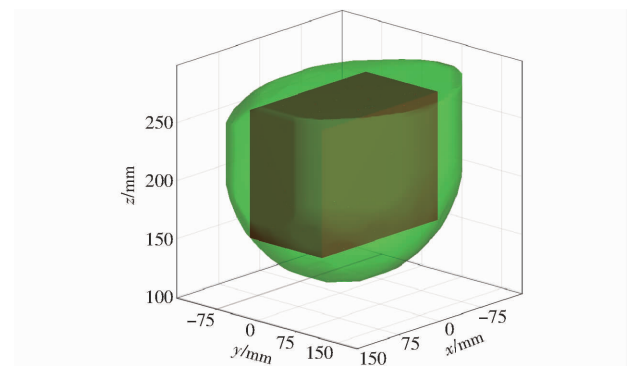


图 14 SKC<sub>2</sub>的任务工作空间

Fig. 14 Task workspace of SKC<sub>2</sub>

因此,三平移并联机构整体任务工作空间是以 SKC<sub>1</sub>的平面工作空间为基准,由 SKC<sub>2</sub>沿  $Z$  轴生成的工作空间为约束,最终得到一个  $300\text{ mm} \times 150\text{ mm} \times 120\text{ mm}$  的规则无奇异立体工作空间。

## 6 结论

(1)设计了一种三平移(3T)并联机构,该机构耦合度为零,由两个 SKC 组成,具有符号式位置正解且部分运动解耦特性。

(2)采用基于 SKC 单元的奇异分析方法对该并联机构的奇异位形进行了分析,该法可找出 SKC 内部的所有奇异位形,并利于求解机构无奇异的规则工作空间。

## 参 考 文 献

- [1] HUANG Zhen, LI Qinchuan. General methodology for type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel manipulators and several novel manipulators[J]. The International Journal of Robotics Research, 2002, 21(2): 131 – 145.
- [2] HUANG Zhen, LI Qinchuan. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method[J]. The International Journal of Robotics Research, 2003, 22(1): 59 – 79.
- [3] HUANG Zhen, LI Qinchuan, DING Huafeng. Theory of parallel mechanisms[M]. New York: Springer Dordrecht, 2012.
- [4] KONG Xianwen, GOSSELIN C. Type synthesis of parallel mechanisms[M]. Springer Tracts in Advanced Robotics, 2007.
- [5] FANGHELLA P, GALLETTI C. Metric relations and displacement groups in mechanism and robot kinematics[J]. Journal of Mechanical Design, 1995, 117(3): 470 – 478.
- [6] HERVE J M. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design[J]. Mechanism & Machine Theory, 1999, 34(5): 719 – 730.
- [7] LI Qinchuan, HUANG Zhen, HERVE J M. Type synthesis of 3R2T 5 – DOF parallel mechanisms using the Lie group of displacements[J]. Robotics & Automation IEEE Transactions, 2004, 20(2): 173 – 180.
- [8] HUYNH P, HERVE J M. Equivalent kinematic chains of three degree-of-freedom tripod mechanisms with planar-spherical bonds[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 127(1): 95 – 102.
- [9] RICO J M, AGUILERA L D, GALLARDO J, et al. A more general mobility criterion for parallel platforms[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 207 – 219.
- [10] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [11] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构结构综合方法的基本思想, 特点及其发展趋势[J]. 机械工程学报, 2010, 46(9): 1 – 11.
- YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Basic principles, main characteristics and development tendency of methods for robot mechanism structure synthesis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(9): 1 – 11. (in Chinese)
- [12] LI Haidong, GOSSELIN C M, RICHARD M J, et al. Analytic form of the six-dimensional singularity locus of the general gough-stewart platform[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 279 – 287.
- [13] LI Haidong, GOSSELIN C M, RICHARD M J. Determination of the maximal singularity-free zones in the six-dimensional workspace of the general Gough-Stewart platform[J]. Mechanism & Machine Theory, 2007, 42(4): 497 – 511.
- [14] JIANG Qimi, GOSSELIN C M. The maximal singularity-free workspace of the Gough-Stewart platform for a given orientation [J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(11): 112304.
- [15] JIANG Qimi, GOSSELIN C M. Determination of the maximal singularity-free orientation workspace for the Gough-Stewart platform[J]. Mechanism & Machine Theory, 2009, 44(6): 1281 – 1293.
- [16] LI Baokun, CAO Yi, ZHANG Qiuju, et al. Singularity representation and workspace determination of a special class of the Gough-Stewart platforms[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2013, 10(11): 378.
- [17] TSAI K Y, LIN J C, LO Y. Six-DOF parallel manipulators with maximal singularity-free joint space or workspace[J]. Robotica, 2014, 32(3): 401 – 411.
- [18] MA Jianming, HUANG Qitao, XIONG Haiguo, et al. Analysis and application of the singularity locus of the Stewart platform [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 24(1): 133 – 140.
- [19] LI Baokun, CAO Yi, HUANG Zhen, et al. Orientation-singularity and orientation-workspace analyses of the Stewart platform using unit quaternion[C] // International Conference on Intelligent Robotics and Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2008: 131 – 140.
- [20] CHENG Shili, WU Hongtao, WANG Chaoqun, et al. A novel method for singularity analysis of the 6 – SPS parallel mechanisms[J]. Science China: Technological Sciences, 2011, 54(5): 172 – 179.

XIANG Chaoqun, HAO Li'na, ZHANG Ying, et al. Analysis of stiffness characteristics of soft arm[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017,48(6):407-412. (in Chinese)

[17] 皮杰,柳军,徐磊,等. 三指柔性气动夹爪结构设计与实验[J]. 农业机械学报,2020,51(增刊1):93-101.  
PI Jie, LIU Jun, XU Lei, et al. Structure design and experiment of three finger flexible pneumatic gripper[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(Supp. 1):93-101. (in Chinese)

[18] DILIBAL S, SAHIN H, DANQUAH J O, et al. Additively manufactured custom soft gripper with embedded soft force sensors for an industrial robot[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2021, 22(4): 709-718.

[19] ZAIDI S, MASELLI M, LASCHI C, et al. Actuation technologies for soft robot grippers and manipulators: a review[J]. Current Robotics Reports, 2021, 2(3): 355-369.

[20] SHAH D S, POWERS J P, TILTON L G, et al. A soft robot that adapts to environments through shape change[J]. Nature Machine Intelligence, 2021, 3(1): 51-59.

[21] POLYGERINOS P, WANG Z, OVERVELDE J T B, et al. Modeling of soft fiber-reinforced bending actuators[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2015, 31(3): 778-789.

[22] 费燕琼, 庞武, 于文博. 气压驱动软体机器人运动研究[J]. 机械工程学报, 2017, 53(13):14-18.  
FEI Yanqiong, PANG Wu, YU Wenbo. Movement of air-driven soft robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017,53(13):14-18. (in Chinese)

[23] 姚建涛, 陈新博, 陈俊涛, 等. 软体机械手遥操作系统的设计与分析[J]. 中国机械工程, 2020,31(16):1968-1977.  
YAO Jiantao, CHEN Xinbo, CHEN Juntao, et al. Design and analysis of soft manipulator teleoperation systems[J]. China Mechanical Engineering, 2020,31(16):1968-1977. (in Chinese)

[24] 顾苏程, 王保兴, 刘俊辰, 等. 纤维增强型软体夹持器变形及末端接触力[J]. 北京航空航天大学学报, 2020,46(2): 447-456.  
GU Sucheng, WANG Baoxing, LIU Junchen, et al. Deformation and end contact force of fiber-reinforced soft gripper[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2020,46(2):447-456. (in Chinese)

[25] 华超, 褚凯梅, 陈昕, 等. 软体水果采摘机械手系统设计分析与试验[J]. 林业工程学报, 2021, 6(3):127-132.  
HUA Chao, CHU Kaimei, CHEN Xin, et al. Design, analysis and experimental study of soft picking manipulator system for fruit harvesting[J]. Journal of Forestry Engineering, 2021, 6(3):127-132. (in Chinese)

(上接第 433 页)

[21] STIGGER T, PFURNER M, HUSTY M. Workspace and singularity analysis of a 3-RUU parallel manipulator[C]//Mechanisms and Machine Science, Springer, Cham.,2018.

[22] LI Ju, MCCARTHY J M. Analysis of two spherical parallel manipulators with hidden revolute joints[J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2017, 9(3):031007.

[23] JHA R, CHABLAT D, ROUILLIER F, et al. Workspace and singularity analysis of a Delta like family robot[C]//4th IFTOMM International Symposium on Robotics and Mechatronics, Poitiers, France, 2015

[24] 吉昊, 沈惠平, 杨廷力. 一种新型低耦合度半对称 2T1R 并联机构的拓扑设计及运动学[J]. 机械传动, 2020, 44(1): 13-22.

[25] 沈惠平, 曾博雄, 尤晶晶, 等. 具有解析式位置正解的三平移并联机构设计与分析[J]. 农业机械学报,2020,51(2): 383-391,426.  
SHEN Huiping, ZENG Boxiong, YOU Jingjing,et al. Topology design and analysis of three-translation parallel mechanism with analytical direct position solutions[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020,51(2):383-391,426. (in Chinese)

[26] 沈惠平, 赵一楠, 许正骁, 等. 低耦合度半对称三平移并联机构拓扑设计与运动学分析[J]. 农业机械学报,2019, 50(3):404-411.  
SHEN Huiping, ZHAO Yinan, XU Zhengxiao, et al. Topological design and kinematics analysis of novel asymmetric 3 translation parallel manipulator with low coupling degree[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(3):404-411. (in Chinese)

[27] 沈惠平, 周金波, 尤晶晶, 等. 具有解析式位置正解的 2T1R 并联机构运动性能分析[J]. 农业机械学报,2020,51(1): 398-409.  
SHEN Huiping, ZHOU Jinbo, YOU Jingjing, et al. 2T1R parallel mechanism with analytic positive position solutions and its kinematic performance based optimization[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020,51(1): 398-409. (in Chinese)

[28] 赵一楠. 基于拓扑特征的三平移并联机构的拓扑设计、运动学与刚度分析[D]. 常州:常州大学, 2020.  
ZHAO Yinan. Topological design, kinematics and stiffness analysis of three-translational parallel mechanism based on topological characteristics[D]. Changzhou: Changzhou University, 2020. (in Chinese)