

含双平行四边形结构支链的 SCARA 并联机构研究

梁 栋^{1,2} 张赵建^{1,2} 畅博彦^{1,2} 李 林¹ 齐 杨³

(1. 天津工业大学机械工程学院, 天津 300387; 2. 天津市现代机电装备技术重点实验室, 天津 300387;
3. 天津职业技术师范大学机械工程学院, 天津 300222)

摘要: 提出了一种含双平行四边形结构支链的新型 SCARA 并联机构,其包括 4 条相同支链,具有结构紧凑、承载力和刚度高的优点。首先,基于李群理论对机构的拓扑结构及其自由度进行阐述。其次,构建闭环矢量方程,推导出位置正/逆解,并通过 2 个数值算例验证位置解的正确性。通过对闭环矢量方程关于时间求导,得到机构的雅可比矩阵,由此建立输入角速度与末端输出速度之间、输入角加速度与末端输出加速度之间的映射关系,并对其进行数值仿真分析。然后,基于位置逆解,运用极限边界搜索法求解机构的工作空间,并绘制相应图谱加以分析。为明确机构动平台的转动性能,进一步研究不同工作平面下的动平台最大、最小转动角的空间分布图谱。在此基础上,借助特征因子构造量纲齐次雅可比矩阵,并利用条件数和可操作度两种方法分析机构的运动传递性能。基于直接和间接雅可比矩阵进一步对机构的 3 类奇异位置进行分析,明确奇异发生的条件。最后,借助 Matlab 与 ADAMS 软件开展仿真实验,验证了理论分析和设计结果的正确性与可行性。

关键词: SCARA 并联机构; 运动分析; 性能分析; 奇异位置

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2022)07-0422-13 **OSID:** 

Novel SCARA Parallel Mechanism with Double Parallelogram Branches

LIANG Dong^{1,2} ZHANG Zhaojian^{1,2} CHANG Boyan^{1,2} LI Lin¹ QI Yang³

(1. School of Mechanical Engineering, Tiangong University, Tianjin 300387, China
2. Tianjin Key Laboratory of Modern Electromechanical Equipment Technology, Tianjin 300387, China
3. School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin 300222, China)

Abstract: A type of SCARA parallel mechanism with double parallelogram branches was proposed, which included four identical branches and had the advantages of compact structure, high bearing capacity and stiffness. Firstly, the topological structure and degree of freedom of the mechanism were described based on Lie group theory. Secondly, the closed-loop vector equation was constructed to derive the forward/inverse position solution, and two numerical examples were used to verify the correctness of the position solution. By deriving the closed-loop vector equation with respect to time, the Jacobian matrix of the mechanism was obtained, and the mapping relations between the input angular velocity and the end output velocity, and between the input angular acceleration and the end output acceleration were established, and the numerical simulation analysis was carried out. Then, based on the inverse position solution, the limit boundary search method was used to solve the workspace of the mechanism, and the corresponding atlas was drawn for analysis. In order to clarify the rotation performance of the moving platform of the mechanism, the spatial distribution maps of the maximum and minimum rotation angles of the moving platform under different working planes were drawn. On this basis, the dimensional homogeneous Jacobian matrix was constructed with the help of characteristic factors, and the motion transmission performance of the mechanism was analyzed by two methods of condition number and operability. Based on the direct and indirect Jacobian matrices, three kinds of singular positions of the mechanism were analyzed systematically, and the conditions of singularity occurrence were clarified.

收稿日期: 2021-07-18 修回日期: 2021-09-09
基金项目: 国家自然科学基金项目(52005368、51905378)、天津市自然科学基金项目(20JCQNJC00360)、天津市教委科研基金项目(2019KJ012)和天津市技术创新引导专项基金企业科技特派员项目(20YDTPJC00450)
作者简介: 梁栋(1985—),男,副教授,博士,主要从事机器人机构学和多体系统动力学及控制研究,E-mail: godspeed2009@126.com
通信作者: 畅博彦(1985—),男,副教授,博士,主要从事机构学与机械系统动力学研究,E-mail: mmts_tjpu@126.com

Finally, the correctness and feasibility of the theoretical analysis and design results were verified by simulation experiments with Matlab and ADAMS software. The research result can provides theoretical basis for the subsequent optimization and prototype manufacturing of the SCARA parallel mechanism in future.

Key words: SCARA parallel mechanism; motion analysis; performance analysis; singular position

0 引言

作为一类重要的工业机器人,并联机器人具有空间多闭环结构,可通过多条支链的协同作用实现动平台(末端执行器)的运动输出,其中可实现 SCARA 运动(三平一转,3T1R)的并联机器人快速崛起,因其具有速度快、精度高以及动态响应快等优点,在实现抓取、移动、放置等高速操作且运动灵活的工作中具有独特优势,广泛应用于电子制造、食品生产、医疗卫生以及农业等领域^[1-2]。

SCARA 并联机构的研究一直是国内外关注的焦点。CLAVEL^[3]发明了具有空间三维移动能力的 Delta 机构,之后以其为基础,通过在末端执行器上添加一个独立的转动输出,进而实现了 SCARA 运动。随着机构综合理论不断发展,H4、I4^[4-5]等具有多个动平台的并联机构相继被发明出来。黄田等^[6]在 H4、I4 的基础上提出了具有 SCARA 运动的 Cross-IV 型高速搬运机器人。文献[7-10]提出了 X4 型并联机构,其为一种单动平台的全对称 SCARA 运动并联机构,为后来单动平台 SCARA 并联机构的设计和发展奠定了基础。沈惠平等^[11-13]基于机构结构降耦原理与方位特征(POC)集理论,设计了低耦合度、零耦合度且部分解耦的能实现 SCARA 运动的并联机构。这些机构的运动学、动力学分析相对简单,运动控制与轨迹规划较容易,所以在某些应用中有较大优势。杨廷力等^[14]提出了基于单开链的构型综合方法及方位特征输出矩阵,据此综合出了一系列 SCARA 并联机构。

传统 SCARA 并联机构由于支链不含或含有较少的闭环子结构,且采用轻量化设计,其刚度、承载力等较低,故在高速/高加速度及重载运动场合下,弹性变形较大,会进一步影响末端执行器的跟踪/定位精度。针对现有机构在高速拾取、搬运、放置等作业场合下的不足,本文提出一种含双平行四边形结构支链的新型 SCARA 并联机构(具有工作空间大、刚度和承载力高等特点),并对此机构的拓扑结构、运动学以及运动性能进行系统性分析。

1 拓扑结构分析

1.1 机构描述

机构的三维虚拟样机模型如图 1 所示。

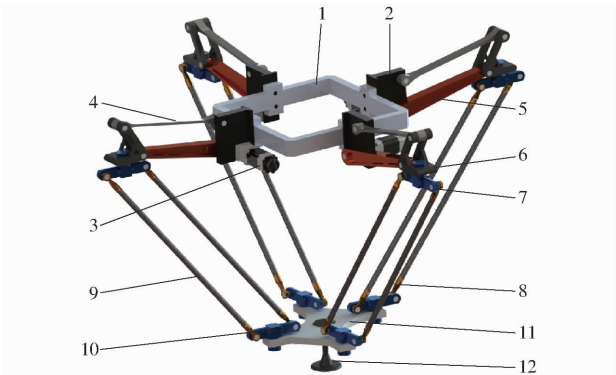


图 1 机构虚拟样机模型

Fig. 1 Virtual proptotype model of mechanism

1. 静平台 2. 驱动装置固定架 3. 驱动装置 4. 从动臂 5. 主动臂 6. 连接架 7. 上短杆 8. 杆端连接头 9. 细杆 10. 下短杆 11. 动平台 12. 末端执行器

该机构包括静、动平台以及 4 条相同的支链(PaRPaR),每条支链均含有 2 个平行四边形结构,刚度较高,可有效抵抗弹性变形。4 条支链彼此相隔 90°均匀地连接在静平台上,动平台采用单动平台的结构,且设计为矩形。驱动装置固定在静平台上。上下两个平行四杆机构由连接架连接,连接架与下平行四杆机构通过一轴线竖直布置的转动副连接。连接架的底面与地面始终保持水平。下平行四杆机构的末端通过转动副连接于动平台。

1.2 自由度分析

1.2.1 李群理论

刚体在空间的六维运动 $\{D\}$ 称为一个李群,即位移群。刚体在空间中的各种运动都是位移群 $\{D\}$ 的子集。表 1 为利用典型位移子群表示刚体在空间内的运动^[15-18]。

表 1 典型位移子群

Tab. 1 Several displacement subgroups

位移子群	维数	说明
$\{T(u)\}$	1	表示沿单位矢量 u 方向的移动副
$\{R(N,u)\}$	1	表示轴线矢量为 u 且过点 N 的转动副
$\{T_2(w)\}$ 或 $\{T(P_{uv})\}$	2	表示由单位矢量 w 决定的平面内的移动或者由单位矢量 u 和 v 决定的平面 P_{uv} 内的移动
$\{G(u)\}$	3	表示法线为 u 的平面运动,即一个平面的二维移动和绕法线的一个转动自由度
$X(u)$	4	表示空间的三维移动和绕法线矢量 u 的一维转动

1.2.2 自由度

图 2 为该机构的机构简图。图中 A_i 表示第 i 条支链与静平台的铰链中心 ($i=1, 2, 3, 4$), B_i 表示上平行四杆机构的主动臂与连接架的铰链中心, C_i 表示下平行四杆机构的短杆中心, D_i 表示下平行四杆机构的短杆中心。 α_i 表示 4 个主动臂转角, 即主动臂与水平方向的夹角。 ξ 表示上四杆机构的末端和下四杆机构的上端的连线与水平方向的夹角。

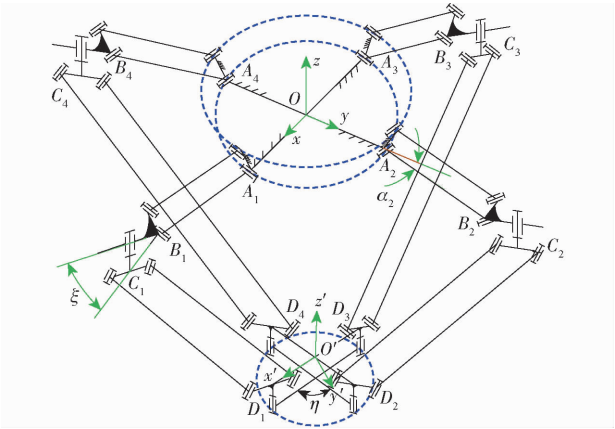


图 2 机构简图
Fig. 2 Schematic of mechanism

在计算含闭环子链的机构自由度时, 首先把闭环子链视为一个多自由度的广义运动副, 然后通过约束分析, 把闭环子链等效转换为几个单自由度运动副组合成的串联链, 可将原来的复杂机构变成等自由度的不再含有闭环子链的并联机构, 即可按照一般的自由度分析求解^[16]。该机构两个复杂铰链均为 4R 平行四边形机构, 通过上述提到的约束分析方法, 可以得到这 2 个平行四杆机构分别等效为一个移动副。令 u, v, w (分别平行于 x, y, z 轴) 表示转动副的轴线矢量, 将每条支链从上往下分为上平行四杆、连接架、下平行四杆以及动平台 4 部分。 $\{L_{i,j}\}$ 表示各支链中各部分的运动集合, $i=1, 2, 3, 4$, 表示 4 条支链; $j=1, 2, 3, 4$, 表示从上到下的 4 部分。

支链的上部分平行四杆机构的运动集合 $\{L_{i,1}\}$ 可表示为

$$\{L_{i,1}\} = \{T_a(n_{i,1})\} \tag{1}$$

式中 $\{T_a(n_{i,1})\}$ ——方向为 $n_{i,1}$ 的移动副, $n_{i,1}$ 的方向为 A_iB_i 与 A_i 处转动副轴线矢量叉乘之后的方向, 为一维圆弧运动

连接架与下平行四边形机构之间的转动副 $\{L_{i,2}\}$ 可表示为

$$\{L_{i,2}\} = \{R(C_i, w)\} \tag{2}$$

式中 $\{R(C_i, w)\}$ ——转动轴线矢量为 w 且过点

C_i 的转动副
下部平行四边形的运动集合 $\{L_{i,3}\}$ 可表示为

$$\{L_{i,3}\} = \{T_b(n_{i,2})\} \tag{3}$$

式中 $\{T_b(n_{i,2})\}$ ——方向为 $n_{i,2}$ 的移动副, $n_{i,2}$ 的方向为下平行四杆的长杆所在的方向矢量与转动轴线矢量叉乘之后的方向, 为一维圆弧运动

动平台与下平行四边形连接关节处的转动副 $\{L_{i,4}\}$ 可表示为

$$\{L_{i,4}\} = \{R(D_i, w)\} \tag{4}$$

式中 $\{R(D_i, w)\}$ ——转动轴线矢量为 w 且过点 D_i 的转动副

则整条支链的运动集合可表达为

$$\{L_i\} = \{L_{i,1}\} \{L_{i,2}\} \{L_{i,3}\} \{L_{i,4}\} = \{T_a(n_{i,1})\} \{R(C_i, w)\} \{T_b(n_{i,2})\} \{R(D_i, w)\} = \{T_a(n_{i,1})\} \{T_b(n_{i,2})\} \{G_2(w)\} = \{X(w)\} \tag{5}$$

式中 $\{G_2(w)\}$ ——二维平面运动, 为 $\{G(w)\}$ 的二维子流形

$\{G(w)\}$ 表示法线为 w 的平面运动, 包括平面二维移动和绕法线 w 的一维转动。 $\exists s$ 使得 $\{T(s)\} \cdot \{G_2(w)\} = \{G(w)\}$ 。

机器人动平台的自由度是 4 条支链末端所允许的刚体运动集合的交集, 所以动平台运动集合 $\{M\}$ 为

$$\{M\} = \{L_1\} \cap \{L_2\} \cap \{L_3\} \cap \{L_4\} = \{X(w)\} \tag{6}$$

综上所述, 该机构动平台具有 4 个自由度, 即在空间中的三维移动和绕 z 轴的转动。

2 位置分析

2.1 位置正解

位置正解是已知主动臂的转角求解末端动平台位姿^[19-20]。建立如图 2 所示的固定参考坐标系 $Oxyz$, 坐标原点 O 与图中静平台中心重合, 静平台中心到 A_1 的方向为 x 轴方向, 静平台中心到点 A_2 的方向为 y 轴方向, z 轴方向满足右手螺旋定则。构建动坐标系 $O'x'y'z'$, 以 D_1D_3 与 D_2D_4 的交点为动坐标系原点 O' , x' 轴方向为原点 O' 到点 D_1 的方向, y' 轴过原点且垂直于 x' 轴, z' 轴方向满足右手螺旋定则。采用闭环矢量法分析该机构的位置, 用向量 r 表示末端执行器参考点 O' 相对于静坐标系原点 O 的位矢。闭环矢量示意图如图 3 所示。

结合图 2、3, 动平台参考点 O' 在固定坐标系中的位置矢量可表示为

$$r = l_{OA_i} + l_{A_iB_i} + l_{B_iC_i} + l_{C_iD_i} + l_{D_iO'} \tag{7}$$

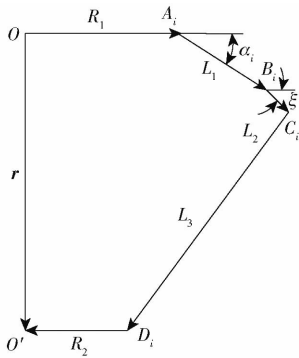


图 3 闭环矢量示意图
Fig. 3 Closed-loop vector diagram

进一步改写为

$$\boldsymbol{l}_{C_i D_i} = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{l}_{OA_i} + \boldsymbol{l}_{A_i B_i} + \boldsymbol{l}_{B_i C_i}) + \boldsymbol{l}_{O' D} \quad (8)$$

用 $\boldsymbol{a}_i$ 、 $\boldsymbol{b}_i$ 、 $\boldsymbol{c}_i$ 分别表示 $\boldsymbol{l}_{OA_i}$ 、 $\boldsymbol{l}_{A_i B_i}$ 、 $\boldsymbol{l}_{B_i C_i}$ 的单位方向矢量, β_i 表示 A_i 处的方位角, 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i = (\cos\beta_i, \sin\beta_i, 0)^T & (i = 1, 2, 3, 4) \\ \beta_i = (i - 1) \frac{\pi}{2} \\ \boldsymbol{b}_i = (\cos\alpha_i \cos\beta_i, \cos\alpha_i \sin\beta_i, -\sin\alpha_i)^T \\ \boldsymbol{c}_i = (\cos\xi \cos\beta_i, \cos\xi \sin\beta_i, -\sin\xi)^T \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{l}_{OA_i} = R_1 \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{l}_{A_i B_i} = L_1 \boldsymbol{b}_i \\ \boldsymbol{l}_{B_i C_i} = L_2 \boldsymbol{c}_i \end{cases} \quad (10)$$

式中 R_1 ——静平台外接圆半径

L_1 ——主动臂长度 L_2 ——连接架长度

在动坐标参考系中用 $\boldsymbol{d}'_i$ 表示 $\boldsymbol{l}_{O' D_i}$ 的单位方向矢量, 则

$$\boldsymbol{d}'_i = (\cos\gamma_i, \sin\gamma_i, 0)^T \quad (11)$$

其中 $\gamma_i = (i - 1 - \varepsilon_i) \frac{\pi}{2} + \varepsilon_i \eta$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0 \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 1$$

式中 η ——支链 1、3 末端的连线与支链 2、4 末端的连线的夹角, 为钝角

ε_i ——符号参数

动平台具有 4 个自由度, 但只有一个旋转自由度, 即绕 z 轴的旋转, 故动坐标系相对于静坐标系的姿态旋转矩阵为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中 θ ——动平台转角

所以 $\boldsymbol{l}_{O' D_i}$ 在固定参考坐标系中表示为

$$\boldsymbol{l}_{O' D_i} = R_2 \boldsymbol{d}_i \quad (13)$$

其中

$$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{R} \boldsymbol{d}'_i$$

式中 $\boldsymbol{d}_i$ —— $\boldsymbol{l}_{O' D_i}$ 在固定坐标系中单位方向矢量

R_2 ——动平台外接圆半径

根据杆长约束条件可得方程

$$\|\boldsymbol{l}_{C_i D_i}\| = L_3 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (14)$$

式中 L_3 ——从动臂长度

由式(8)~(14)得

$$\begin{cases} (x + R_2 \cos\theta - R_1 - L_1 \cos\alpha_1 - L_2 \cos\xi)^2 + \\ (y + R_2 \sin\theta)^2 + (z + L_1 \sin\alpha_1 + L_2 \sin\xi)^2 = L_3^2 \\ (x + R_2 \cos\theta \cos\eta - R_2 \sin\theta \sin\eta)^2 + \\ (y + R_2 \sin\theta \cos\eta + R_2 \cos\theta \sin\eta - R_1 - \\ L_1 \cos\alpha_2 - L_2 \cos\xi)^2 + \\ (z + L_1 \sin\alpha_2 + L_2 \sin\xi)^2 = L_3^2 \\ (x - R_2 \cos\theta + R_1 + L_1 \cos\alpha_3 + L_2 \cos\xi)^2 + \\ (y - R_2 \sin\theta)^2 + (z + L_1 \sin\alpha_3 + L_2 \sin\xi)^2 = L_3^2 \\ (x - R_2 \cos\theta \cos\eta + R_2 \sin\theta \sin\eta)^2 + \\ (y - R_2 \sin\theta \cos\eta - R_2 \cos\theta \sin\eta + R_1 + \\ L_1 \cos\alpha_4 + L_2 \cos\xi)^2 + \\ (z + L_1 \sin\alpha_4 + L_2 \sin\xi)^2 = L_3^2 \end{cases} \quad (15)$$

式(15)即为该机构的位置正解模型, 是以 x 、 y 、 z 以及 θ 为未知量的非线性方程组。该方程组无法求得解析解, 可借助牛顿-拉普森迭代法^[21]求得数值解(见下文数值算例)。

2.2 位置逆解

位置逆解是已知末端动平台的位姿反求主动臂转角^[19-20]。将式(15)整理为

$$\begin{aligned} & (x + R_2 \cos\theta \cos\gamma_i - R_2 \sin\theta \sin\gamma_i - R_1 \cos\beta_i - \\ & L_1 \cos\alpha_i \cos\beta_i - L_2 \cos\xi \cos\beta_i)^2 + \\ & (y + R_2 \sin\theta \cos\gamma_i + R_2 \cos\theta \sin\gamma_i - R_1 \sin\beta_i - \\ & L_1 \cos\alpha_i \sin\beta_i - L_2 \cos\xi \sin\beta_i)^2 + \\ & (z + L_1 \sin\alpha_i + L_2 \sin\xi)^2 = L_3^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (16)$$

将式(16)简记为

$$M_{i1} \cos\alpha_i + M_{i2} \sin\alpha_i + M_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{i1} = & -2L_1 x \cos\beta_i - 2L_1 y \sin\beta_i - 2L_1 R_2 \cos\theta \cos\gamma_i \cos\beta_i - \\ & 2L_1 R_2 \sin\theta \cos\gamma_i \sin\beta_i + 2L_1 R_2 \sin\theta \sin\gamma_i \cos\beta_i - \\ & 2L_1 R_2 \cos\theta \sin\gamma_i \sin\beta_i + 2L_1 R_1 + 2L_1 L_2 \cos\xi \\ M_{i2} = & 2L_1 (z + L_2 \sin\xi) \\ M_{i3} = & (x + R_2 \cos\theta \cos\gamma_i - R_2 \sin\theta \sin\gamma_i - R_1 \cos\beta_i - \\ & L_2 \cos\xi \cos\beta_i)^2 + (y + R_2 \sin\theta \cos\gamma_i + R_2 \cos\theta \sin\gamma_i - \\ & R_1 \sin\beta_i - L_2 \cos\xi \sin\beta_i)^2 + (z + L_2 \sin\xi)^2 + L_1^2 - L_3^2 \end{aligned}$$

令 $\tan \frac{\alpha_i}{2} = t$, 则 $\cos \alpha_i = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin \alpha_i = \frac{2t}{1+t^2}$, 由式(17)可求得

$$\alpha_i = 2 \arctan \frac{M_{i2} \pm \sqrt{M_{i2}^2 + M_{i1}^2 - M_{i3}^2}}{M_{i1} - M_{i3}} \quad (18)$$

式(18)即为逆解模型,即给定末端动平台的位姿,可得4条支链的主动臂转角位移。由此可见,机构共有16组逆解,考虑到机构的实际装配,式(18)中根号前取“-”号。

2.3 位置算例验证

不失一般性,取表2中各杆件长度。借助Matlab软件进行数值仿真,验证位置正/逆解模型的正确性。

表 2 机构尺寸参数

Tab. 2 Various dimensional parameters

m

参数	R_1	R_2	L_1	L_2	L_3
数值	0.28	0.21	0.38	0.075	0.90

算例1:给定末端平台参考点 O' 的位置为 $x = 0.2\text{ m}$ 、 $y = 0.1\text{ m}$ 、 $z = -0.6\text{ m}$ 、 $\theta = \pi/3$ 。通过Matlab软件编写逆解程序,可以得出 $\alpha_1 = -0.7069\text{ rad}$ 、 $\alpha_2 = -0.6169\text{ rad}$ 、 $\alpha_3 = 0.3230\text{ rad}$ 、 $\alpha_4 = 0.4263\text{ rad}$ 。利用牛顿-拉普森迭代法对非线性方程组式(15)进行求解。将上述逆解过程中得到的4个主动臂转角作为已知条件,用牛顿迭代法求得动平台位姿: $x = 0.2\text{ m}$ 、 $y = 0.1\text{ m}$ 、 $z = -0.6\text{ m}$ 、 $\theta = \pi/3$,该算例正解与逆解所得结果相互对应。再给定算例2: $x = -0.3\text{ m}$ 、 $y = -0.1\text{ m}$ 、 $z = -0.7\text{ m}$ 、 $\theta = -\pi/4$,逆解程序运行之后得到: $\alpha_1 = 0.7235\text{ rad}$ 、 $\alpha_2 = 0.1032\text{ rad}$ 、 $\alpha_3 = -0.6582\text{ rad}$ 、 $\alpha_4 = -0.0411\text{ rad}$ 。将上述结果作为已知条件,代入正解方程组,运用牛顿迭代法进行求解,计算得到: $x = -0.3\text{ m}$ 、 $y = -0.1\text{ m}$ 、 $z = -0.7\text{ m}$ 、 $\theta = -\pi/4$,与算例给定条件一致。对比两个算例,正解与逆解所得结果均能够相互对应,由此可知,位置正/逆解模型推导正确。

3 速度与加速度分析

3.1 雅可比矩阵构建与速度分析

由式(7)可知,机构动平台参考点 O' 在固定坐标系中的位矢 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^T$ 可改写为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{l}_{OA_i} + \boldsymbol{l}_{A_iB_i} + \boldsymbol{l}_{B_iC_i} + \boldsymbol{l}_{C_iD_i} - \boldsymbol{l}_{D_iO'} \quad (19)$$

对式(19)关于时间 t 求导,得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} = & L_1(\boldsymbol{\omega}_{1i} \times \boldsymbol{b}_i) + L_2(\boldsymbol{\omega}_{2i} \times \boldsymbol{c}_i) + \\ & L_3(\boldsymbol{\omega}_{3i} \times \boldsymbol{w}_i) - R_2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{d}_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{1i} = \dot{\alpha}_i \boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{v}_i = (-\sin \beta_i, \cos \beta_i, 0)^T \\ \boldsymbol{\omega}_{2i} = 0 \\ \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = (0, 0, 1)^T \end{cases} \quad (21)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_{1i}$ ——主动臂角速度
 $\boldsymbol{\omega}_{2i}$ ——连接架角速度
 $\boldsymbol{\omega}_{3i}$ ——从动臂角速度
 $\dot{\boldsymbol{r}}$ ——末端执行器参考点 O' 的线速度
 $\boldsymbol{w}_i$ ——从动臂单位矢量
 $\boldsymbol{\omega}$ ——动平台角速度
 $\dot{\alpha}_i$ ——主动臂角速率
 $\boldsymbol{v}_i$ ——主动臂的转动轴线,为 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 与 $\boldsymbol{b}_i$ 张成平面的单位法矢量
 $\dot{\theta}$ ——动平台绕 z 轴转动的角速率

将式(21)代入式(20),得

$$\dot{\boldsymbol{r}} = L_1 \dot{\alpha}_i \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{b}_i - L_3 \boldsymbol{\omega}_{3i} \times \boldsymbol{w}_i - R_2 \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_i \quad (22)$$

式(22)两端同时左乘 $\boldsymbol{w}_i^T$ 并整理,得

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\boldsymbol{w}_i^T \dot{\boldsymbol{r}} + R_2 \dot{\theta} \boldsymbol{w}_i^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_i)}{L_1 \boldsymbol{w}_i^T (\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{b}_i)} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (23)$$

将式(23)整理成矩阵形式为

$$\boldsymbol{J}_q \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = \boldsymbol{J}_x \dot{\boldsymbol{\psi}} \quad (24)$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = (\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dot{\alpha}_4)^T \quad (25)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta})^T \quad (26)$$

$$\boldsymbol{J}_q = \text{diag}(L_1 \boldsymbol{w}_i^T (\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{b}_i)) \quad (27)$$

$$\boldsymbol{J}_x = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^T & R_2 \boldsymbol{w}_1^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_1) \\ \boldsymbol{w}_2^T & R_2 \boldsymbol{w}_2^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_2) \\ \boldsymbol{w}_3^T & R_2 \boldsymbol{w}_3^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_3) \\ \boldsymbol{w}_4^T & R_2 \boldsymbol{w}_4^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_4) \end{bmatrix} \quad (28)$$

末端执行器速度与输入速度之间的关系为

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{J} \dot{\boldsymbol{q}} \quad (29)$$

式中 $\boldsymbol{J}_q$ ——直接雅可比矩阵

$\boldsymbol{J}_x$ ——间接雅可比矩阵

$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i$ ——输入角速度

$\dot{\boldsymbol{\psi}}$ ——动平台输出速度

$\boldsymbol{J}$ ——雅可比矩阵

由式(21)、(23)可得主动臂角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{1i} = \frac{\boldsymbol{w}_i^T \dot{\boldsymbol{r}} + R_2 \dot{\theta} \boldsymbol{w}_i^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_i)}{L_1 \boldsymbol{w}_i^T (\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{b}_i)} \boldsymbol{v}_i \quad (30)$$

由式(20)、(21)可得

$$L_3(\boldsymbol{\omega}_{3i} \times \boldsymbol{w}_i) = \dot{\boldsymbol{r}} - L_1(\boldsymbol{\omega}_{1i} \times \boldsymbol{b}_i) + R_2 \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{d}_i \quad (31)$$

对式(31)两端叉乘 $\boldsymbol{w}_i$ ，得从动臂角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{3i} = \frac{[\boldsymbol{w}_i \times](\dot{\boldsymbol{r}} - L_1 \boldsymbol{\omega}_{1i} \times \boldsymbol{b}_i + R_2 \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{d}_i)}{L_3} \tag{32}$$

其中

$$[\boldsymbol{w}_i \times] = \begin{bmatrix} 0 & -w_{iz} & w_{iy} \\ w_{iz} & 0 & -w_{ix} \\ -w_{iy} & w_{ix} & 0 \end{bmatrix}$$

式中 $w_{ix}、w_{iy}、w_{iz}$ —— $\boldsymbol{w}_i$ 的 3 个分量

3.2 加速度分析

在速度分析基础上进行加速度分析,对式(20)

关于时间 t 再求导,得

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}} = & L_1 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{1i} \times \boldsymbol{b}_i + L_1 \boldsymbol{\omega}_{1i} \times (\boldsymbol{\omega}_{1i} \times \boldsymbol{b}_i) + \\ & L_3 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{3i} \times \boldsymbol{w}_i + L_3 \boldsymbol{\omega}_{3i} \times (\boldsymbol{\omega}_{3i} \times \boldsymbol{w}_i) - \\ & [R_2 \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{d}_i + R_2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{d}_i)] \end{aligned} \tag{33}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{1i}$ ——主动臂角加速度

$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{3i}$ ——从动臂角加速度

$$\ddot{\alpha}_i = \frac{\boldsymbol{w}_i^T \ddot{\boldsymbol{r}} - L_1 \boldsymbol{w}_i^T [\boldsymbol{\omega}_{1i} \times (\boldsymbol{\omega}_{1i} \times \boldsymbol{b}_i)] - L_3 \boldsymbol{w}_i^T [\boldsymbol{\omega}_{3i} \times (\boldsymbol{\omega}_{3i} \times \boldsymbol{w}_i)] + \boldsymbol{w}_i^T [R_2 \dot{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_i + R_2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{d}_i)]}{L_1 \boldsymbol{w}_i^T (\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{b}_i)} \tag{36}$$

由式(32)进一步整理得到从动臂的角加速度为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{3i} = \frac{[\boldsymbol{w}_i \times] \{ \ddot{\boldsymbol{r}} - L_1 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{1i} \times \boldsymbol{b}_i - L_1 \boldsymbol{\omega}_{1i} \times (\boldsymbol{\omega}_{1i} \times \boldsymbol{b}_i) - L_3 \boldsymbol{\omega}_{3i} \times (\boldsymbol{\omega}_{3i} \times \boldsymbol{w}_i) + [R_2 \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{d}_i + R_2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{d}_i)] \}}{L_3} \tag{37}$$

3.3 角度、角速度、角加速度对比

给定仿真轨迹:规划动平台参考点 O' 在 $z = -0.8\text{ m}$ 的平面上走一个半径为 0.3 m 的圆轨迹,且给定动平台转角 θ 为 0° 。基于上述分析,求得主动臂角度、角速度及角加速度的变化曲线,如图 4 所示。

由图 4 可知,给定轨迹后,所得主动臂转角、角速度以及角加速度的变化曲线平滑、连续且成导数

$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ——动平台角加速度

$\ddot{\boldsymbol{r}}$ ——末端执行器参考点 O' 的线加速度

对式(21)求导,得

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{1i} = \ddot{\alpha}_i \boldsymbol{v}_i + \dot{\alpha}_i \dot{\boldsymbol{v}}_i \\ \dot{\boldsymbol{v}}_i = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases} \tag{34}$$

式中 $\ddot{\alpha}_i$ ——主动臂角加速率

$\ddot{\theta}$ ——动平台绕 z 轴转动的角加速率

将式(34)代入式(33),得

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}} = & L_1 \ddot{\alpha}_i \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{b}_i + L_1 \boldsymbol{\omega}_{1i} \times (\boldsymbol{\omega}_{1i} \times \boldsymbol{b}_i) + \\ & L_3 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{3i} \times \boldsymbol{w}_i + L_3 \boldsymbol{\omega}_{3i} \times (\boldsymbol{\omega}_{3i} \times \boldsymbol{w}_i) - \\ & [R_2 \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_i + R_2 \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{d}_i)] \end{aligned} \tag{35}$$

在式(33)的两端同乘 $\boldsymbol{w}_i^T$ 并整理,得

关系,说明该机构的运动学分析准确。

4 工作空间与运动性能

4.1 工作空间

并联机构的工作空间是指在考虑各种约束条件下(杆长约束、运动副转角约束等),末端执行器的工作区域^[22-24]。利用上述位置分析中的逆解,采用极限边界搜索法^[23]求解工作空间。首先是一个平

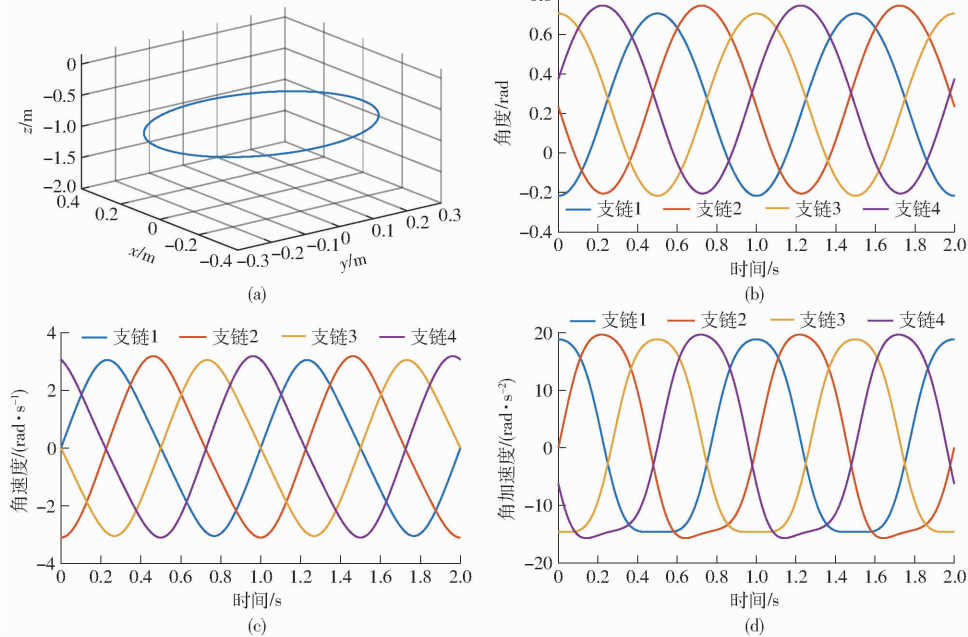


图 4 期望轨迹图与角度、角速度及角加速度的变化曲线

Fig. 4 Expected trajectory and changes of angle, angular velocity and angular acceleration

面上的搜索,极径 ρ 从零开始增大到一定值结束,符合条件的点保存,否则舍弃;极径 ρ 达到一定值后开始圆周搜索,搜索一周转过的角度为 2π ,至此完成一个平面的搜索。然后开始在 z 轴搜索,将 z 轴的范围等距离散,满足条件的保存,反之不保存。至此,工作空间内的点搜索完毕,其包络面即为工作空间。图5为极限边界搜索法流程图。

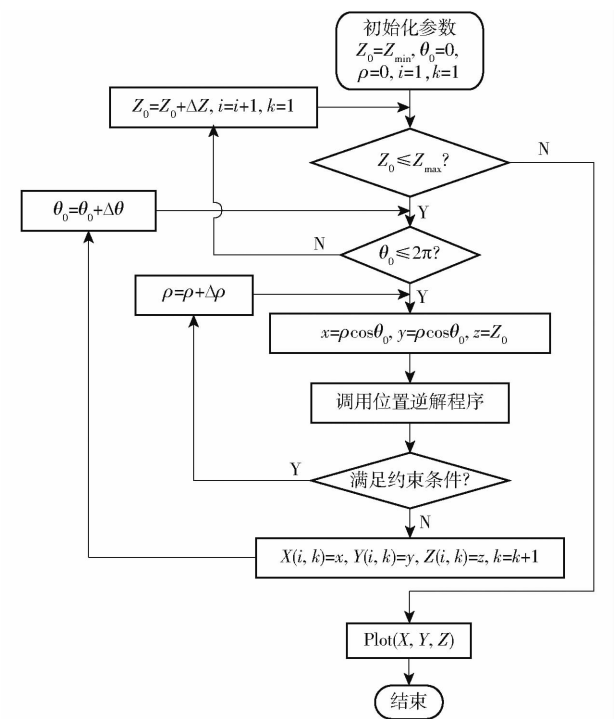


图5 极限边界搜索法流程图

Fig. 5 Flow chart of limit boundary search method

根据杆长及运动副转角等约束,确定搜索范围,取极径搜索范围为 $0\leq\rho\leq0.8\text{ m}$,将其等距离散为150份,将圆周 2π 等距离散为150份,搜索动平台转角 θ 为 0° 时的定姿态工作空间, z 轴循环从 -1.5 m 到 0.5 m 进行搜索,取定步长为 0.01 m ,为避免杆件干涉,设主动臂转角为 $-\pi/6\leq\alpha_i\leq\pi/3$ 。利用上述方法并借助Matlab软件,工作空间求解结果如图6所示。

由图6可看出,机构在动平台转角为 0° 时的定姿态下,其工作空间关于中心对称,工作空间外廓光滑,体积较大且内部无空洞,说明机构在 0° 定姿态下的工作区域较大,机构比较合理。

取动平台转角为 -30° ,其他搜索条件不变,所得工作空间如图7所示。

由图7可知,在转角为 -30° 时的定姿态下,工作空间外廓依旧光滑连续,机构的工作区域较大,并关于中心对称,且相对于 0° 姿态下的工作空间有一定减小。

4.2 动平台转动能力

动平台在工作区域内的转角范围是衡量并联机构动平台转动能力的一个重要指标^[24]。选择不同高度的 $x-y$ 截面来分析该机构动平台的转动能力。首先在初始位置处开始转角循环,满足约束条件的记录下来,反之舍弃;然后开始下一位置处的角度循环,直到某一截面上的点(某一高度下可达工作空间内的所有点)均循环一遍之后,搜索结束。转动

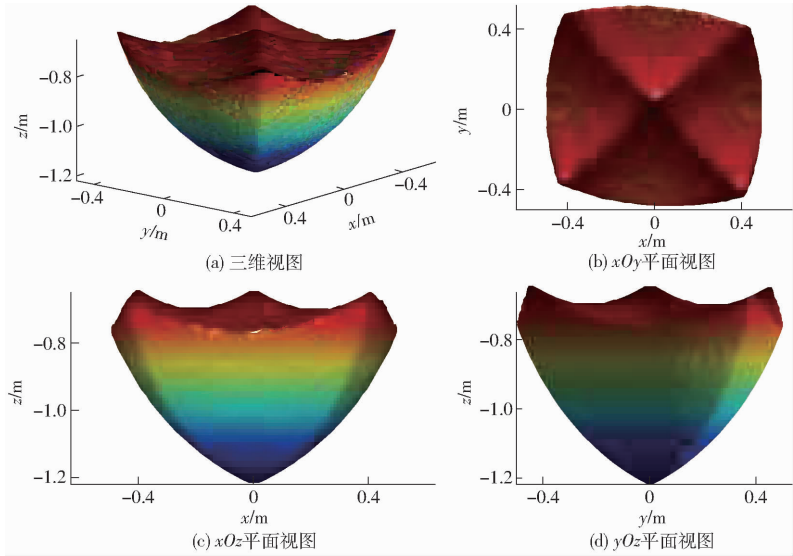


图6 转角为 0° 时工作空间各视图

Fig. 6 Various views of workspace when angle was 0°

角度分别取最大、最小值,由此得到此截面上的最大、最小转动角度的分布情况。

取不同平面($z=-0.75\text{ m}$ 、 $z=-0.9\text{ m}$ 、 $z=-1.1\text{ m}$),设定极坐标半径范围 $0\leq\rho\leq1\text{ m}$,极坐标

搜索后得到的截面为可达工作空间,分别计算动平台在此截面内的每个点的最大转角 $\gamma_{\max}$ 和最小转角 $\gamma_{\min}$,结果如图8所示。

由图8可知,以上3个平面上的转角 $\gamma_{\max}$ 与 $\gamma_{\min}$

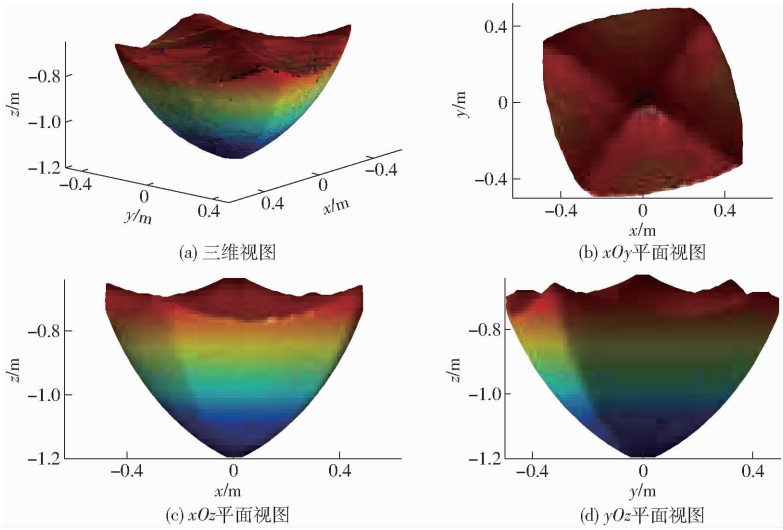


图 7 转角为 -30° 时工作空间各视图

Fig. 7 Various views of workspace when angle was -30°

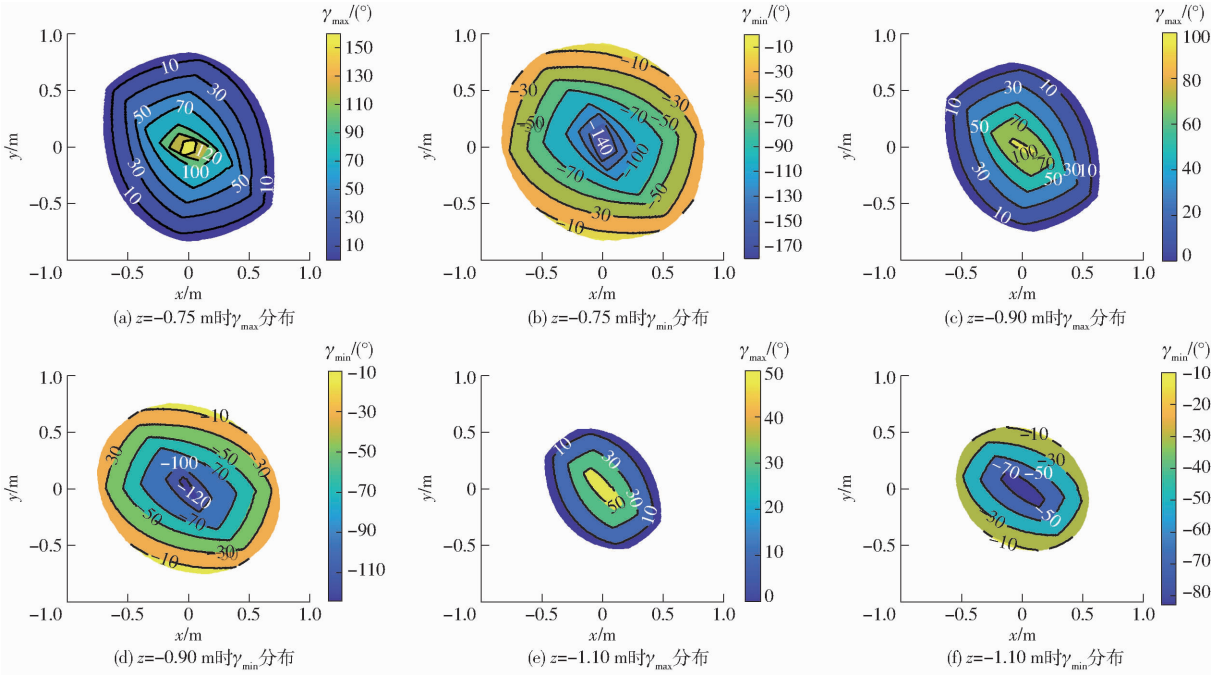


图 8 不同高度下的转角 $\gamma_{\max}$ 、 $\gamma_{\min}$ 的分布情况

Fig. 8 Distribution of $\gamma_{\max}$ and $\gamma_{\min}$ at different heights

的分布较均匀,等高线平滑,无突变。中间接近 z 轴处的最大转角最大,在 $z = -0.75\text{ m}$ 这一平面上可达到 150° 左右,随着距离 z 轴越来越远, $\gamma_{\max}$ 越来越小。最小转角的分布与最大转角类似,在 $z = -0.75\text{ m}$ 时, z 轴附近的最小转角可达到 -170° 左右,向外逐渐变大。由此可知,动平台在中间的转动能力最大,随着末端动平台参考点 O' 距离 z 轴越来越远,转动能力减弱。通过以上几个平面的分析可知,该机构的转动能力较好,由内而外转动能力依次降低,符合规律。

4.3 运动性能

灵巧度是衡量机器人运动性能的重要指标^[25],反映在某一位置时末端执行器获得运动传递性能。

目前灵巧度性能指标主要由可操作度与条件数两种方法来表示。条件数指标定义为^[25-26]

$$\text{cond}(\boldsymbol{J}) = \|\boldsymbol{J}\| \|\boldsymbol{J}^{-1}\| \tag{38}$$

式中 $\|\boldsymbol{J}\|$ ——雅可比矩阵的 Frobenius 范数

根据上述所求雅可比矩阵,可知条件数与结构尺寸和位形有关系。当其趋于无穷大时,机构处于奇异位形,性能变差甚至失去运动能力。当其等于 1 时,机构运动传递性能最优。一般条件数在做纯移动或纯滚动的机构中应用较广泛^[25]。但在含有不同类型自由度的机构中(既含有转动自由度也含有移动自由度),由于雅可比矩阵内部元素量纲不统一,会对分析结果造成偏差,不能正确反映机构的运动传递性能^[18]。因此,本文利用特征长度因

子^[27]对雅可比矩阵进行量纲齐次化处理,即

$$\boldsymbol{J}_h = \left[\boldsymbol{J}_{h1} \quad \frac{1}{L} \boldsymbol{J}_{h2} \right] \tag{39}$$

式中 $\boldsymbol{J}_h$ ——齐次雅可比矩阵
 $\boldsymbol{J}_{h1}$ ——原雅可比矩阵的前 3 列
 $\boldsymbol{J}_{h2}$ ——原雅可比矩阵的第 4 列
 L ——特征长度因子

各向同性条件可进一步表达为

$$\boldsymbol{J}_h^T \boldsymbol{J}_h = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{h1}^T \boldsymbol{J}_{h1} & \frac{1}{L} \boldsymbol{J}_{h1}^T \boldsymbol{J}_{h2} \\ \frac{1}{L} \boldsymbol{J}_{h2}^T \boldsymbol{J}_{h1} & \frac{1}{L^2} \boldsymbol{J}_{h2}^T \boldsymbol{J}_{h2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O}^T & \lambda^2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

式中 λ ——一个非零标量
 $\boldsymbol{O}$ ——零矩阵
 $\boldsymbol{I}_3$ ——3×3 单位矩阵

将 $\boldsymbol{J}_{h1}$ 、 $\boldsymbol{J}_{h2}$ 相关表达式代入式(40)求解,可得

$$\lambda^2 = \sum_{i=1}^4 H_i^2$$
$$L = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 Q_i^2}{\sum_{i=1}^4 H_i^2}} \tag{41}$$

其中 $H_i = \frac{1}{\sqrt{3} L_1 \boldsymbol{w}_i^T (\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{b}_i)}$ $Q_i = \frac{R_2 \boldsymbol{w}_i^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_i)}{L_1 \boldsymbol{w}_i^T (\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{b}_i)}$

机构条件数指标表达式为

$$\text{cond}(\boldsymbol{J}_h) = \|\boldsymbol{J}_h\| \|\boldsymbol{J}_h^{-1}\| \tag{42}$$

为更好地观察机构的运动传递性能,一般取条件数的倒数,即 $\kappa(\boldsymbol{J}_h) = 1/\text{cond}(\boldsymbol{J}_h)$ 。将工作空间中所有点的坐标值代入雅可比矩阵,结合式(42),可得到其灵巧度的空间分布。

选取末端执行器位于 $\theta = 0^\circ$ 时的定姿态,借助 Matlab 软件,得到机构的灵巧度分布如图 9 所示。

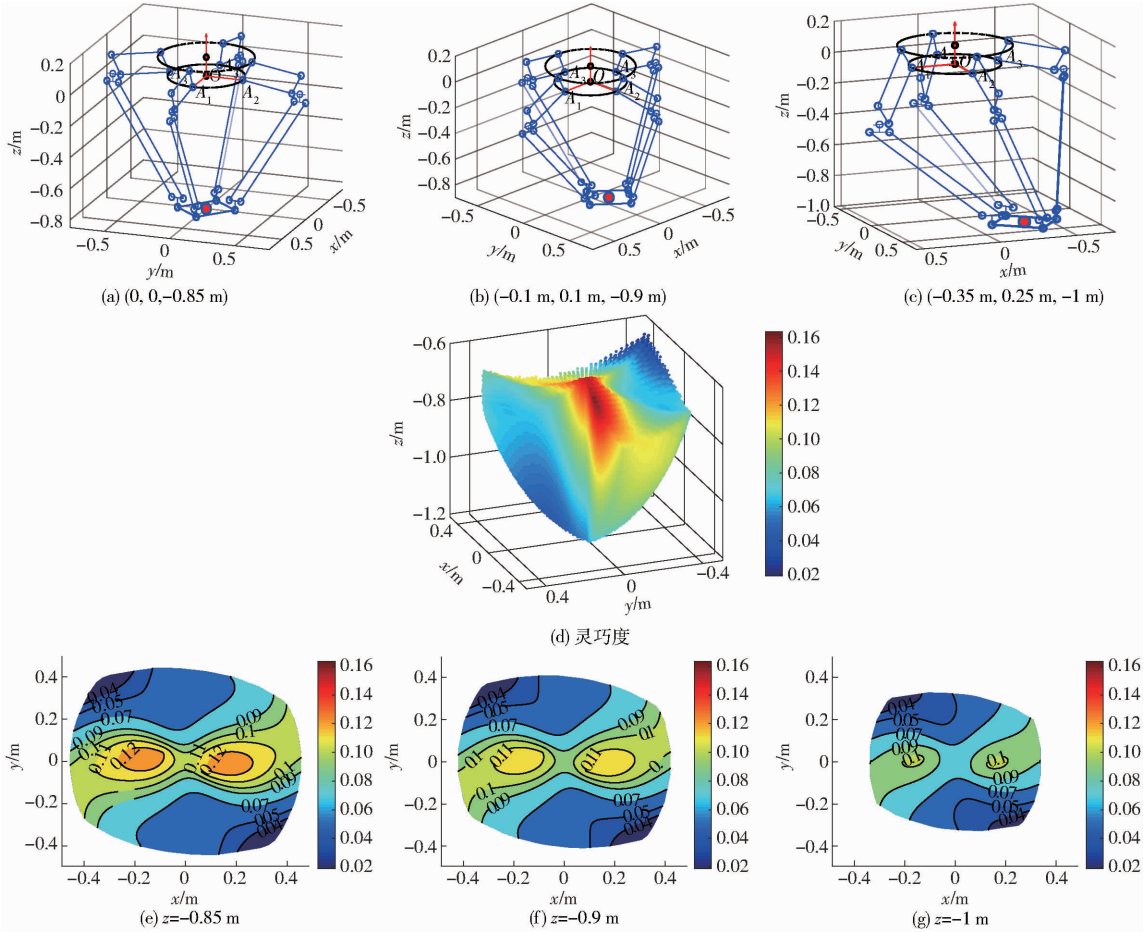


图 9 灵巧度空间分布结果以及某位置下的构型图

Fig. 9 Condition number distributions in whole workspace and configuration diagram of certain position

由图 9 可知, $\kappa(\boldsymbol{J}_h)$ 在 0.02~0.16 之间连续变化,无突变,表明该机构具有较好的运动传递性能。在图 9d~9g 所示深蓝色区域, $\kappa(\boldsymbol{J}_h)$ 较小,运动性能略差,这是因为该机构采用矩形平台,矩形较短的边距离工作空间边界位置相对较近,所以该处

$\kappa(\boldsymbol{J}_h)$ 较小,运动性能略差。中间处 $\kappa(\boldsymbol{J}_h)$ 最大,性能最好。两个长边距离工作空间边界处相对于短边较远,所以 $\kappa(\boldsymbol{J}_h)$ 较大,在相应位置处有较好的运动传递性能。需指出,该机构在经优化设计后,运动性能可进一步提高。

基于求得的量纲齐次雅可比矩阵,定义可操作度指标为^[24]

$$\sigma = \sqrt{\det(\mathbf{J}_h \mathbf{J}_h^T)} \quad (43)$$

当 $\sigma = 0$ 时,末端执行器位于奇异位置,当 $\sigma \neq 0$ 时,可操作度越大,机构运动性能越好。选择不同平面来分析该机构的可操作度。

选择 $z = -0.85 \text{ m}$ 的平面,结合式(43),得到可操作度的空间分布结果如图 10 所示。

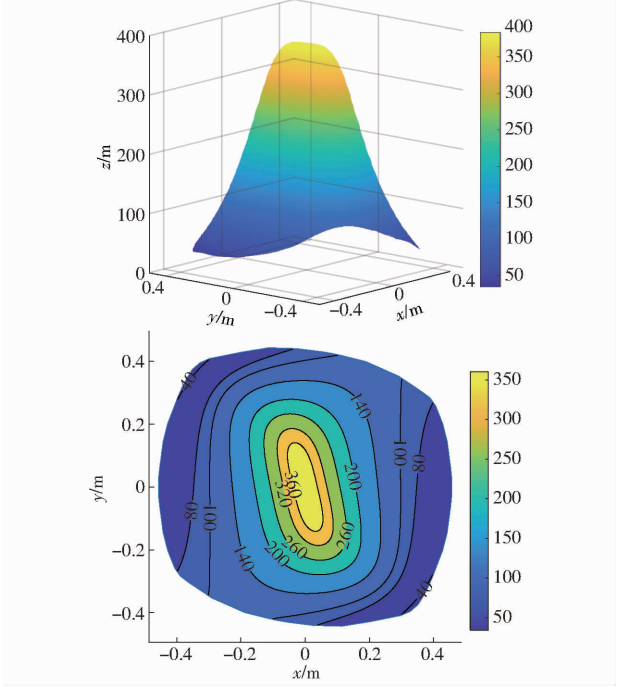


图 10 $\theta = 0^\circ$ 定姿态可操作度 ($z = -0.85 \text{ m}$)
Fig. 10 Fixed attitude maneuverability at $\theta = 0^\circ$
($z = -0.85 \text{ m}$)

选取 $z = -1 \text{ m}$ 的平面,得到可操作度的分布,结果如图 11 所示。

由图 10 可知, σ 在 $50 \sim 400$ 范围内变化,其与动平台的形状、工作空间的边界处均有关。图 11 中具有相似分布情况,且 σ 在 $60 \sim 250$ 范围内变化。可操作度结果与条件数结果大致对应,表明该机构运动传递性能较好,靠近工作空间边界处的区域,性能较低。

5 奇异性分析

当机构处于奇异位置时,运动性能大大降低,甚至失去运动能力,从而导致机构被损坏。串联机器人与并联机器人均具有奇异位置,并联机器人由于有多条支链形成的多闭环结构相互制约的特点,奇异性相对比较复杂。本文采用雅可比矩阵来分析奇异位置^[11-20]。

5.1 第一类奇异

该类奇异又称边界奇异,当直接雅可比矩阵降

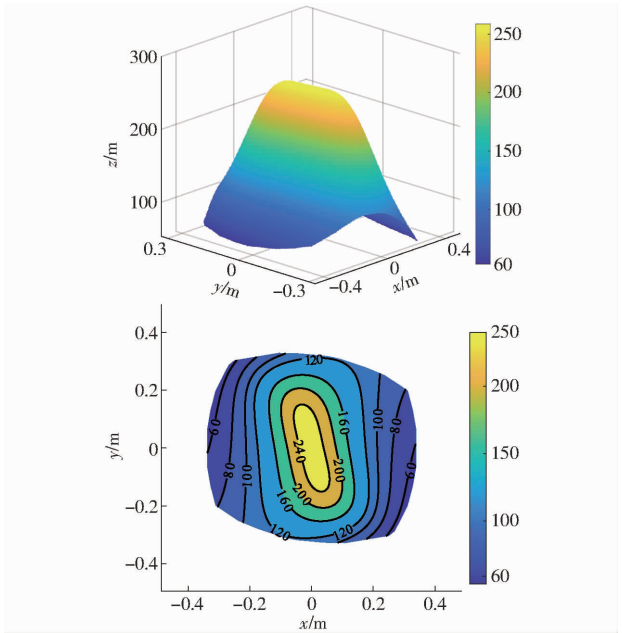


图 11 $\theta = 0^\circ$ 定姿态可操作度 ($z = -1 \text{ m}$)

Fig. 11 Fixed attitude maneuverability at $\theta = 0^\circ$ ($z = -1 \text{ m}$)

秩时,即行列式的值为零,机构发生边界奇异^[18]。结合前述雅可比矩阵可得,当 $\det(\mathbf{J}_q)$ 为零时,机构中一条或多条支链处于工作空间边界位置,驱动副失去某个方向上的运动能力。记直接雅可比矩阵 $\mathbf{J}_q$ 对角元素为 J_{qi} ($i = 1, 2, 3, 4$),即 $\mathbf{J}_q = \text{diag}(\mathbf{J}_{qi})$, $\mathbf{J}_{qi}$ 中一个或多个为零时, $\mathbf{J}_q$ 发生降秩, $\mathbf{J}_{qi}$ 为

$$J_{qi} = \mathbf{L}_i \mathbf{w}_i^T (\mathbf{v}_i \times \mathbf{b}_i) = \mathbf{w}_i^T (\mathbf{v}_i \times \mathbf{l}_{A_i B_i}) \quad (44)$$

式中 $\mathbf{w}_i$ ——从动臂单位矢量

$\mathbf{l}_{A_i B_i}$ ——主动臂的方向矢量

由式(42)可知,当主动臂与从动臂平时时, $J_{qi} = 0$,此时 $\mathbf{J}_q$ 降秩,为第一类奇异位置,也是该机构的工作空间边界点。图 12 给出了两种奇异位形。

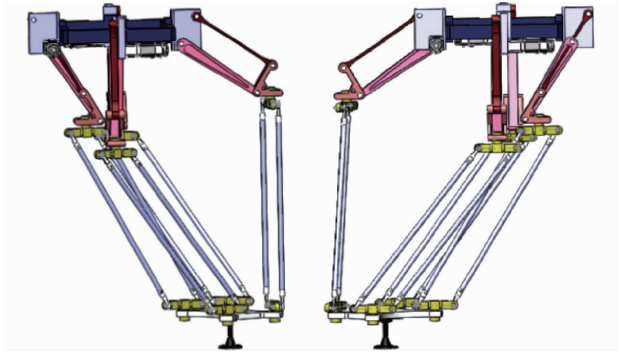


图 12 第一类奇异位形

Fig. 12 The first kind of singular configuration

结合图 12 可知,当产生奇异时,主动臂转角(主动臂与水平面夹角,向下为正)大于 $\pi/2$,机构杆件之间易产生干涉,为防止机构杆件之间的干涉,取主动臂转角为 $-\pi/6 \leq \alpha_i \leq \pi/3$,在此条件下可避免第一类奇异。

5.2 第二类奇异

该类奇异又称正运动学奇异,当间接雅可比矩阵 J_x 降秩,即 $\det(J_x) = 0$ 时,发生该类奇异。在第二类奇异位置处,锁定机构的驱动关节,末端动平台仍然可以产生一定的运动,即至少获得一个自由度^[11]。 J_x 为

$$J_x = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^T & R_2 \boldsymbol{w}_1^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_1) \\ \boldsymbol{w}_2^T & R_2 \boldsymbol{w}_2^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_2) \\ \boldsymbol{w}_3^T & R_2 \boldsymbol{w}_3^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_3) \\ \boldsymbol{w}_4^T & R_2 \boldsymbol{w}_4^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{d}_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^T & R_2 \boldsymbol{w}_1^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{l}_{O'D_1}) \\ \boldsymbol{w}_2^T & R_2 \boldsymbol{w}_2^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{l}_{O'D_2}) \\ \boldsymbol{w}_3^T & R_2 \boldsymbol{w}_3^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{l}_{O'D_3}) \\ \boldsymbol{w}_4^T & R_2 \boldsymbol{w}_4^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{l}_{O'D_4}) \end{bmatrix} \quad (45)$$

式中 $\boldsymbol{l}_{O'D_i}$ ——动系原点到支链末端的方向矢量
当末端执行器参考点 O' 位于 $x = 0, y = 0$, 在 z 轴上,且动平台为正方形时, $\boldsymbol{w}_i^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{l}_{O'D_i}) = 0$, 此时 J_x 降秩,机构发生第二类奇异。若发生第二类奇异,其可能情况如图 13 所示。

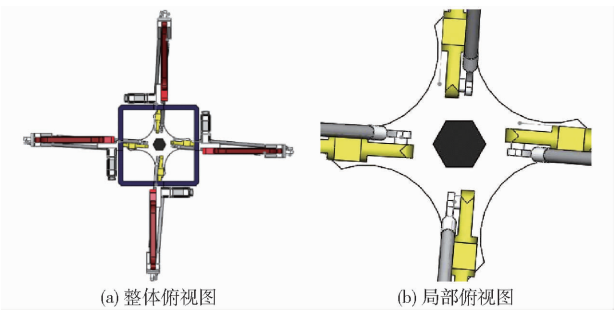


图 13 第二类奇异位形

Fig. 13 The second kind of singular configuration

需要说明的是,由于本机构方案采用的动平台形状为矩形,故不会产生 $\boldsymbol{w}_i^T (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{l}_{O'D_i})$ 均为 0 的情况。

5.3 第三类奇异

该类奇异又称混合奇异,当直接雅可比与间接雅可比均降秩^[11-18]时,即 $\det(J_q) = 0$ 且 $\det(J_x) = 0$ 时,发生该类奇异。此时末端执行器位于工作空间的边界点,驱动副失去某个方向的运动能力,而末端又仍然存在未被约束的自由度。因该机构通过设定主动臂转角范围,避免了第一类奇异,故不存在混合奇异。

6 仿真实验

为验证前述理论分析的正确性,借助 ADAMS 软件对该机器人机构进行仿真实验。将机器人的 SolidWorks 三维虚拟样机模型导入 ADAMS,导入之后,对约束进行定义,并添加电机驱动。依据前述运动分析,在 Matlab 中规划好相应轨迹,即在 1 s 内走一个半径为 0.3 m 的圆轨迹,利用位置逆解可求得

4 条支链的主动臂输入转角。然后,把主动臂转角数据从 Matlab 导入到 ADAMS 中,作为驱动输入进行仿真实验。仿真过程中,机器人的运动情况如图 14 所示。仿真实验结果表明,机器人末端执行器能够完全跟踪期望轨迹,证明了该机构结构设计的合理性和运动分析的正确性。

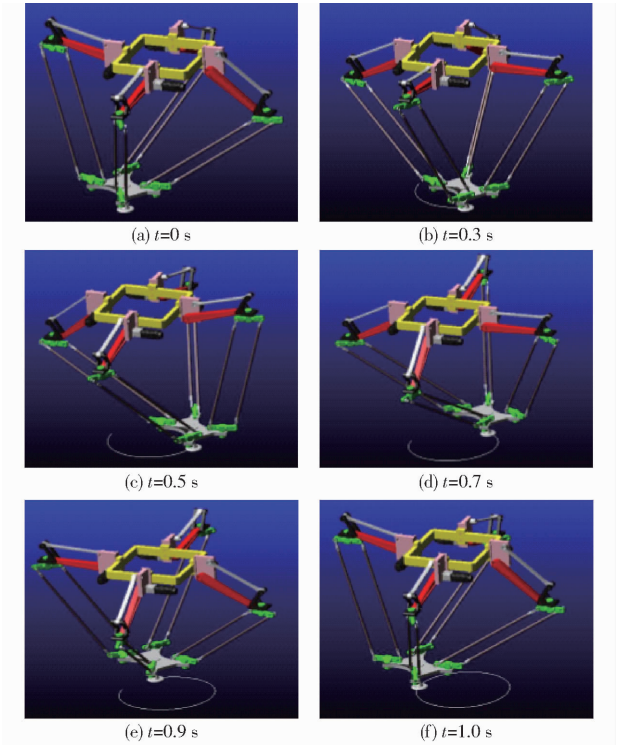


图 14 ADAMS 仿真实验中一个周期内末端执行器各时刻所处的位置

Fig. 14 Position of end effector at each time in a cycle in ADAMS simulation experiment

7 结论

- (1)提出了一种可实现 SCARA 运动的新型并联机构,其 4 条支链相同,整体结构紧凑。由于支链含有双平行四边形结构,比不含闭环结构的支链具有更高的承载能力、刚度以及稳定性。
- (2)基于李群理论证明了该机构有 4 个自由度,即 3T1R。在拓扑分析基础上,借助闭环矢量法求得了位置正/逆解、雅可比矩阵、速度及加速度等,数值仿真结果正确合理,彼此之间相互对应,机构运行平稳,为后续控制策略设计奠定了基础。
- (3)通过极限边界搜索法得到的机构工作空间较大,中间无空洞,外廓曲面光滑。动平台的最大、最小转动角在工作空间的分布均匀,无突变,且转动范围较大,证明机构具有较好的转动能力。利用量纲齐次雅可比矩阵分析了条件数和可操作度,两种方法得到的结果表明该机构在工作空间内的运动传递性能优良。

(4)利用直接、间接雅可比矩阵分析了该机构的几类奇异位形,可以发现,通过设置一些约束条件和动平台采用矩形形状可有效避免机构的奇异位形。在理论分析基础上,借助 ADAMS 多体动力学软件进行了轨迹跟踪仿真实验,进一步证实了该机构结构设计的合理性和理论分析的正确性。

参 考 文 献

[1] 叶鹏达,尤晶晶,仇鑫,等. 并联机器人运动性能的研究现状及发展趋势[J]. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(3): 363 – 377.
YE Pengda, YOU Jingjing, QIU Xin, et al. Status and development trend of motion performance in parallel pobot[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2020, 52(3): 363 – 377. (in Chinese)

[2] 王海峰,尹彬,罗锐捷,等. 四自由度 SCARA 机器人系统机构设计及运动学分析[J]. 机电工程, 2019, 36(12): 1320 – 1324.
WANG Haifeng, YIN Bin, LUO Ruijie, et al. Mechanism design and kinematics analysis of 4 – dof SCARA robot system[J]. Mechanical and Electrical Engineering, 2019, 36(12): 1320 – 1324. (in Chinese)

[3] CLAVEL R. A fast robot with parallel geometry[C]//Proceedings of the 18th Int. Symposium on Industrial Robots, 1988: 91 – 100.

[4] PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4 – DOF parallel robots[C]// Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 1999: 508 – 513.

[5] KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4:a new parallel mechanism for SCARA motions[C]// Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2003: 1875 – 1880.

[6] 黄田,赵学满,梅江平,等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构:CN202528189U[P]. 2012 – 11 – 14.

[7] 刘辛军,谢福贵,王立平,等. 一种可实现 SCARA 运动的四自由度单动平台并联机构:CN102922513A[P]. 2013 – 02 – 13.

[8] XIE Fugui, LIU Xinjun. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2015, 7(4):041015.

[9] LIU Xinjun, HAN Gang, XIE Fugui, et al. A novel acceleration capacity index based on motion/force transmissibility for high-speed parallel robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 126:155 – 170.

[10] MO Jiao, SHAO Zhufeng, GUAN Liwen, et al. Dynamic performance analysis of the X4 high-speed pick-and-place parallel robot[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2017, 46:48 – 57.

[11] 沈惠平,尹洪贺,邵国为,等. 低耦合度 3T1R 并联操作手设计与运动学分析[J]. 农业机械学报, 2017, 48(5): 405 – 412.
SHEN Huiping, YIN Honghe, SHAO Guowei, et al. Design and kinematics analysis of a novel 3T1R parallel manipulator with lower coupling degree[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(5): 405 – 412. (in Chinese)

[12] 沈惠平,许正骁,许可,等. 零耦合度且部分解耦的 3T1R 并联机构设计与运动分析[J]. 农业机械学报, 2019, 50(4): 382 – 392.
SHEN Huiping, XU Zhengxiao, XU Ke, et al. Design and kinematic analysis of zero coupling and partially decoupled 3T1R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(4): 382 – 392. (in Chinese)

[13] 沈惠平,许可,杨廷力,等. 一种零耦合度且运动解耦的新型 3T1R 并联操作手 2 – (RPa3R)3R 的设计及其运动学[J]. 机械工程学报, 2019, 55(5): 53 – 64.
SHEN Huiping, XU Ke, YANG Tingli, et al. New 3T1R parallel manipulator 2 – (RPa3R)3R with zero coupling degree and partial decoupling: design and kinematics[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(5): 53 – 64. (in Chinese)

[14] 杨廷力,金琼,刘安心,等. 基于单开链单元的欠秩并联机器人机构型综合的一般方法[J]. 机械科学与技术, 2001(3): 321 – 325,308.

[15] 于靖军,刘辛军,丁希仑,等. 机器人机构的数学基础[M]. 北京:机械工业出版社, 2008.

[16] 黄真,赵永生,赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社, 2014.

[17] 陈巧红,李秦川,武传宇,等. 基于李群的两 1R3T 并联机构自由度分岔[J]. 机械工程学报, 2010, 46(1): 55 – 61.
CHEN Qiaohong, LI Qinchuan, WU Chuanyu, et al. Mobility bifurcation of two 1R3T parallel mechanisms based on Lie group [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(1): 55 – 61. (in Chinese)

[18] 贺磊盈,涂叶凯,叶伟,等. 一种可整周回转的新型 3T1R 并联机构运动学分析[J]. 机械工程学报, 2018, 54(11): 151 – 160.
HE Leiying, TU Yekai, YE Wei, et al. Kinematics analysis of a novel 3T1R parallel manipulator with full rotational capability [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(11): 151 – 160. (in Chinese)

[19] 车林仙. 4 – RUP_aR 并联机器人机构及其运动学分析[J]. 机械工程学报, 2010, 46(3): 35 – 41.
CHE Linxian. 4 – RUPP_ aR parallel robot mechanisms and their kinematics analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(3): 35 – 41. (in Chinese)

[20] 宋远璞. 四自由度高速并联机器人机构动力学分析与运动控制研究[D]. 南京:南京理工大学, 2018.
SONG Yuanpu. Dynamic analysis and motion control of four degree of freedom high speed parallel robot mechanism[D]. Nanjing:Nanjing University of Science and Technology, 2018. (in Chinese)

[21] 邵国万,刘玉芹. 基于牛顿迭代法的移动机器人编队算法[J]. 计算机仿真, 2004(12): 146 – 148.
SHAO Guowan, LIU Yuqin. Algorithm of mobile robots formation based on iterative Newton scheme[J]. Computer Integrated

Manufacturing Systems,2004(12):146-148. (in Chinese)

[22] 沈惠平,王达,李菊,等. 1T2R 并联机构拓扑降耦设计与运动性能分析[J]. 农业机械学报,2021,52(5):370-377,426.
SHEN Huiping, WANG Da, LI Ju, et al. Topological coupling-reducing design and kinematic performance analysis for 1T2R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(5): 370-377,426. (in Chinese)

[23] 沈惠平,顾晓阳,李菊,等. 基于拓扑降耦的 3T1R 并联机构设计与运动学特性分析[J]. 农业机械学报,2021,52(8):406-415.
SHEN Huiping, GU Xiaoyang, LI Ju, et al. Topological coupling-reducing based design of 3T1R parallel mechanism and kinematics performances analysis[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(8): 406-415. (in Chinese)

[24] 畅博彦,李晓宁,金国光,等. 具有整周回转能力的 3T1R 并联机构运动学分析[J]. 农业机械学报,2019,50(7):406-416.
CHANG Boyan, LI Xiaoning, JIN Guoguang, et al. Kinematics analysis of novel 3T1R parallel manipulator with full rotational capability[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(7): 406-416. (in Chinese)

[25] 李亮,李思凡,王海芳,等. Delta 分拣机器人工作空间及灵巧度分析[J]. 包装与食品机械,2020,38(2):32-37.
LI Liang, LI Sifan, WANG Haifang, et al. Workspace and dexterity analysis of Delta sorting robot[J]. Packaging and Food Machinery, 2020, 38(2): 32-37. (in Chinese)

[26] YOSHIKAWA T. Dynamic manipulability of robot manipulators[J]. The Society of Instrument and Control Engineers, 1985, 2(1):113-124.

[27] ANGELES J. The design of isotropic manipulator architectures in the presence of redundancies[J]. The International Journal of Robotics Research, 1992, 11(3):196-201.

~~~~~

(上接第 403 页)

[26] BOUYER E, MEKHOLOUFI G, ROSILIO V, et al. Proteins, polysaccharides, and their complexes used as stabilizers for emulsions; alternatives to synthetic surfactants in the pharmaceutical field? [J]. International Journal of Pharmaceutics, 2012, 436(1-2):359-378.

[27] SHAMSARA O, JAFARI S M, MUHIDINOV Z K. Fabrication, characterization and stability of oil in water nano-emulsions produced by apricot gum-pectin complexes[J]. International Journal of Biological Macromolecules, 2017, 103:1285-1293.

[28] SILVA M, BUI T, DHARMADANA D, et al. Ultrasound-assisted formation of double emulsions stabilized by casein-whey protein mixtures[J]. Food Hydrocolloids, 2020, 109:106143.

[29] HASANIN M, LABEEB A M. Dielectric properties of nicotinic acid/methyl cellulose composite via “green” method for anti-static charge applications[J]. Materials Science and Engineering B, 2021, 263:114797.

[30] ZHANG J, JIAA G, ZHAO W, et al. Nanoencapsulation of zeaxanthin extracted from *Lycium barbarum* L. by complex coacervation with gelatin and CMC[J]. Food Hydrocolloids, 2021, 112:106280.

[31] 李秋慧,王中江,李佳妮,等. 大豆蛋白-溶血磷脂 O/W 型复合乳液的乳化特性[J]. 食品科学,2017,38(3):20-25.  
LI Qiuhui, WANG Zhongjiang, LI Jiani, et al. Emulsifying properties of soybean protein - lysophosphatide oil-in-water (O/W) emulsion[J]. Food Science, 2017, 38(3):20-25. (in Chinese)

[32] 程金菊,颜廷胜,DUDU O E,等. 蛋白/蔗糖酯界面作用对冰淇淋脂肪球低温失稳的影响[J]. 农业机械学报,2021,52(1):367-374.  
CHENG Jinju, YAN Tingsheng, DUDU O E, et al. Effect of protein and sucrose ester interfacial interaction on destabilization of fat globules at low temperatures in ice cream emulsions[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(1):367-374. (in Chinese)

[33] PAL R. Rheology of simple and multiple emulsions[J]. Current Opinion in Colloid & Interface Science, 2011, 16(1):41-60.

[34] BONNET M, CANSELL M, BERKAOU I, et al. Release rate profiles of magnesium from multiple W/O/W emulsions[J]. Food Hydrocolloids, 2009, 23(1):92-101.

[35] KUMAR R, SINHA V R. Preparation and optimization of voriconazole microemulsion for ocular delivery[J]. Colloids & Surfaces B Biointerfaces, 2014, 117:82-88.

[36] MURILLO-MARTÍNEZ M M, PEDROZA-ISLAS R, LOBATO-CALLEROS C, et al. Designing W<sub>1</sub>/O/W<sub>2</sub> double emulsions stabilized by protein-polysaccharide complexes for producing edible films: rheological, mechanical and water vapour properties [J]. Food Hydrocolloids, 2011, 25(4):577-585.

[37] ZAIDUL I S, FAHIM T K, SAHENA F, et al. Dataset on applying HPMC polymer to improve encapsulation efficiency and stability of the fish oil: in vitro evaluation[J]. Data in Brief, 2020, 32:106111.