

冗余驱动在三平动并联机构性能分析与优化

叶伟¹ 胡利焕² 夏董新² 周哲佳²

(1. 浙江理工大学机电产品可靠性分析与测试国家地方联合工程研究中心, 杭州 310018;
2. 浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018)

摘要: 提出一种冗余驱动在三平动并联机构。利用李群理论和修正的 Grübler – Kutzbach 公式对机构的输出自由度进行了分析。建立机构的位置方程,得到位置逆解和正解表达式,分析机构的运动部分解耦特性。推导机构的雅可比矩阵,并进行奇异分析。分析机构的工作空间。采用螺旋理论和虚功原理,建立机构的动力学模型,得到驱动力的优化分配,驱动力理论分析与仿真计算结果最大偏差为 0.6%。建立机构的运动学评价指标和动力学评价指标,并研究尺度参数与机构性能间的映射关系。基于性能图谱对机构的尺度参数进行优化,提高其综合性能。

关键词: 并联机构; 冗余驱动; 李群理论; 动力学模型; 评价指标; 尺度优化

中图分类号: TH122 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2021)11-0421-10 OSID: 

Performance Analysis and Optimization of Redundantly Actuated Three Translational Parallel Mechanism

YE Wei¹ HU Lihuan² XIA Dongxin² ZHOU Zhejia²

(1. National and Local Joint Engineering Research Center of Reliability Analysis and Testing for Mechanical and Electrical Products, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China
2. Faculty of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: A novel redundantly actuated parallel mechanism with three translational motion was proposed. It had four kinematic limbs that connected the moving platform to the fixed base. The output degrees of freedom of the mechanism was analyzed by using Lie Group theory and the modified Grübler – Kutzbach criterion. The parallel mechanism had three translational degrees of freedom, four actuated prismatic joints, and thus was redundantly actuated. Position model of the parallel mechanism was established. Inverse position solutions and direct position solutions with analytical expressions were derived. The partially decoupled motion feature of the mechanism was studied. Singularity analysis was conducted based on the derived Jacobian matrix. Workspace of the mechanism was analyzed. Velocity and acceleration of each joint and each part of the parallel mechanism were derived through screw theory. Dynamic model was established by using virtual work approach, through which the optimal joint torques were obtained. A numerical simulation based on the ADAMS software was carried out. The maximum deviation between the theoretical and simulation results was 0.6%, which verified the correctness of the theoretical model. Dexterity index and dynamic manipulability ellipsoid index were used to evaluate the kinematic and dynamic performances of the mechanism. Mapping relationship between the performance and dimensions were investigated. Dimensional optimization was conducted based on the performance atlas, which improved the performance of the mechanism. The proposed parallel mechanism can be used to construct a five axis grinding machine.

Key words: parallel mechanism; redundant actuation; Lie Group theory; dynamic model; performance index; dimensional optimization

0 引言

三平动并联机构可以作为分拣装置应用到自动化打包生产线上,也可以串联转动关节形成五轴加工装备^[1],具有很好的应用前景。这类机构一般由3条分支连接动平台和基座构成,最典型的是Delta并联机器人^[2],适合应用于高速分拣领域。在构型设计方面,HUANG等^[3]采用基于螺旋理论的约束综合法设计了一类具有对称分支的三平动并联机构。LI等^[4]采用位移流形方法综合了一类具有良好结构刚度的三平动并联机构。杨廷力等^[5]基于单开链单元,对三平动并联机构进行了构型综合。史巧硕等^[6]采用GF集方法综合了一系列三平动并联机构。孟庆梅等^[7]对一种三平动并联机构Delta-CU进行了误差建模,提高了机器人精度。ZENG等^[8-9]对一种三平动并联机构Tri-pyramid进行了设计与分析。

作为少自由度并联机构中的一类,大多三平动并联机构存在运动耦合问题,导致机构分析困难、控制不便^[10]。针对这个问题,学者们通过构型的巧妙设计,构造了具有运动解耦^[11]或者部分解耦^[12-15]的三平动并联机构。为了控制并联机构的运动,一般需要选取和自由度数目相等的驱动数。然而,为了消除内部奇异^[16]、优化驱动力^[17]、提高精度^[18]等,设计者们经常在机构中安排比自由度数目更多的驱动数,使得机构具有冗余驱动的特点,获得更好的操作性能。在运行过程中,所有驱动协调地运动,共同控制机构的运动。QU等^[19]提出了一种冗余驱动的4-RUU并联机构,相比于非冗余3-RUU机构有更好的操作性能。李仕华等^[20]提出了一种冗余驱动三平动并联机构的综合方法,可消除机构的内部奇异。目前,同时具有运动解耦和冗余驱动两种特征的三平动并联机构实用构型鲜见报道。

本文提出一种运动部分解耦的冗余驱动三平动并联机构新构型,采用李群理论和修正的Grübler-Kutzbach(G-K)公式分析其自由度,并开展运动学、动力学分析与性能优化设计,以期为其工程应用提供理论依据。

1 机构描述与自由度分析

如图1所示,本文提出的并联机构由动平台通过4条分支连接机架组成。其中,分支1、2都是PRRR链(P为移动副,R为转动副),分支3、4都是PRPR链。分支1和分支3共用与基座相连的P副,最后一个R副是以复合铰链的形式连接到动平

台,并且,基座相连的P副与分支中R副轴线平行,另一个P副轴线垂直于R副。分支2、4结构类似。机构中与基座相连的两个P副轴线垂直且共面。

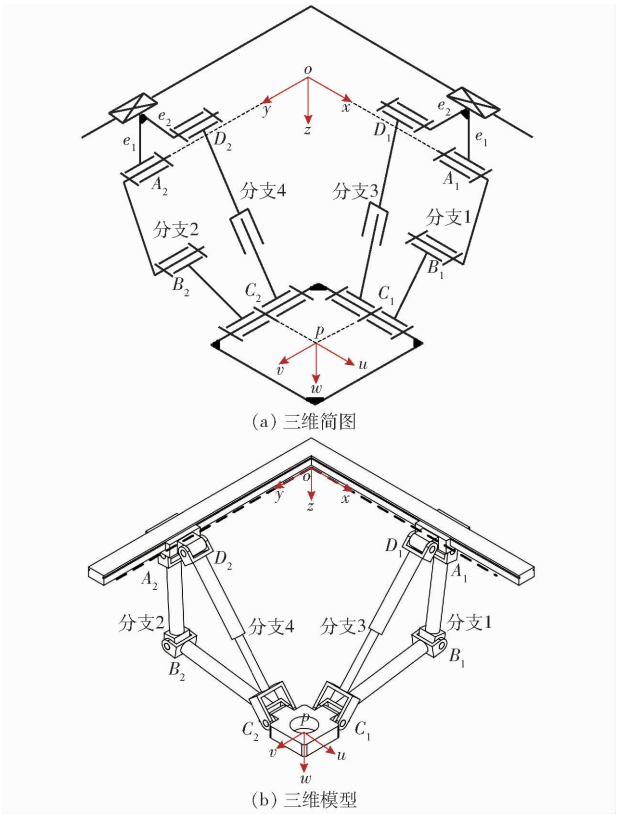


图1 并联机构
Fig. 1 Parallel mechanism

记分支1、3中各R副中心依次为 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 ,分支2、4中各R副中心依次为 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 。连杆 A_iB_i 记为连杆1,其长度为 l_1 ,连杆 B_iC_i 记为连杆2,其长度为 l_2 。动平台为边长 $2a$ 的正方形。记过点 A_1 、 A_2 且方向平行于R副转轴的两直线交点为点 o ,在该点建立固定坐标系 oxy , x 轴沿 oA_1 方向, y 轴沿 oA_2 方向, z 轴由右手法则决定。在动平台中心建立动坐标系 $puvw$,点 p 为动平台中心点, u 轴平行分支1中R副轴线方向, v 轴平行于分支2中R副轴线方向, w 轴由右手法则决定。点 $D_i(i=1,2)$ 与 oxy 平面的距离记为 e_1 , D_1 与 ozx 平面的距离以及 D_2 与 oyz 平面的距离记为 e_2 。

采用李群理论^[21]对机构的输出运动进行分析。考虑到分支1和分支3共用基座移动副,将分支1、3整体考虑,其到动平台的运动可表示为

$$L_{13} = \{T(x)\}(\{R(A_1,x)\}\{R(B_1,x)\}\{R(C_1,x)\} \cap \{R(D_1,x)\}\{T(r_{D_1C_1})\}\{R(C_1,x)\}) = \{T(x)\}\{G(x)\} \quad (1)$$

式中 L_{13} ——分支1和分支3整体到动平台的运动集

$\{T(x)\}$ ——沿 x 轴方向的移动运动群

$\{R(A_1, \mathbf{x})\}$ ——轴线过点 A_1 且平行于向量 $\mathbf{x}$ 的转动运动群

$\mathbf{r}_{D_1C_1}$ —— D_1C_1 方向的单位向量

$\{T(\mathbf{r}_{D_1C_1})\}$ ——沿 D_1C_1 方向的移动运动群

$\{G(\mathbf{x})\}$ ——垂直于向量 $\mathbf{x}$ 的平面运动群

其余符号类同。

同理,分支 2 和分支 4 到动平台的整体运动集 L_{24} 可表示为

$$L_{24} = \{T(\mathbf{y})\} \{G(\mathbf{y})\} \tag{2}$$

动平台运动集 $\{M\}$ 为各分支运动集的交集,可得

$$\begin{aligned} \{M\} &= L_{13} \cap L_{24} = \\ &\{T(\mathbf{x})\} \{G(\mathbf{x})\} \cap \{T(\mathbf{y})\} \{G(\mathbf{y})\} = \\ &\{T(\mathbf{x})\} \{T(\mathbf{y})\} \{T(\mathbf{z})\} \{G(\mathbf{x})\} \cap \\ &\{T(\mathbf{y})\} \{T(\mathbf{x})\} \{T(\mathbf{z})\} \{G(\mathbf{y})\} = \\ &\{T\} \{G(\mathbf{x})\} \cap \{T\} \{G(\mathbf{y})\} = \{T\} \end{aligned} \tag{3}$$

式(3)表明,该并联机构的动平台能输出空间内 3 个方向的移动运动。

采用修正的 G-K 公式^[22]对机构的自由度进行计算,计算式为

$$F = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v \tag{4}$$

式中 F ——机构自由度 d ——机构阶数
 n ——包括机架的构件数目
 g ——运动副数目
 f_i ——第 i 个运动副的自由度
 v ——冗余约束数

本机构中, $d=6, n=12, g=14, f_i=1$ 。分支 1、3 共用与基座相连的 P 副,除去该 P 副后,分支 1 内的 RRR 链与分支 3 内的 RPR 链都是位于同一平面的运动链,产生了 3 个冗余约束。同理,分支 2、4 内也产生 3 个冗余约束。对并联机构进行整体考虑,分支 1、3 的组合对动平台的约束是垂直于分支内转动副的 2 个约束力偶,同样分支 2、4 的组合对动平台的约束也是 2 个力偶,这 4 个力偶并不完全独立,仅限制了动平台的 3 个转动自由度,因此有 1 个是冗余约束。综上,机构中总的冗余约束数 $v=3+3+1=7$ 。

将上述结果代入式(4),可得

$$F = 6 \times (12 - 14 - 1) + 14 + 7 = 3 \tag{5}$$

采用另一种思路,考虑机构构型特点,可认为杆 A_1B_1 、 B_1C_1 、 A_2B_2 、 B_2C_2 是产生虚约束的运动链,将其移除不影响机构自由度。移除虚约束部分后机构 $d=6, n=8, g=8, f_i=1$, 冗余约束数 $v=1$, 代入式(4),计算结果仍然是 $F=3$ 。

根据李群理论和修正后 G-K 公式分析结果可

知,本机构具有 3 个自由度,动平台能输出 3 个方向的移动运动。

为了控制本机构的运动,至少需要选取 3 个运动副作为驱动。考虑到机构中共有 4 个移动副,且都靠近基座,可都选取作为驱动,使机构具有冗余驱动的特点。在机构的运动过程中,可根据动平台的轨迹要求,通过运动学和动力学逆解求取 4 个驱动的输入参数,用于协调控制,使机构执行预期的运动。

该并联机构可应用于五轴机床或分拣机器人的开发。图 2 为五轴打磨机床实例,通过在动平台上安装一个 AC 摆头,打磨头与工件间形成五自由度相对运动,可实现任意曲面的五轴打磨。该机床是由 4 条分支共同支撑动平台,具有良好的结构刚度。

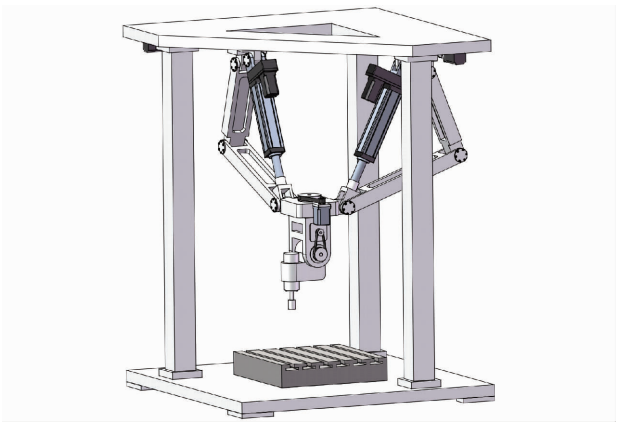


图 2 五轴打磨机床示意图
Fig. 2 Five axis grinding machine

2 运动学分析

2.1 位置分析

位置分析是为了建立动平台输出参数和主动关节输入参数之间的关系。其中位置反解是已知动平台位姿,求解驱动关节输入量。本机构中,动平台的位置可由动坐标系原点 p 在定坐标系中的位置向量 $\mathbf{p} = (x, y, z)^T$ 表示,4 个移动副为机构的主动关节,移动副位移用 $d_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示。根据机构的参数,可得定坐标系中各点坐标为

$$\begin{cases} A_1 = (x, 0, 0)^T \\ A_2 = (0, y, 0)^T \\ D_1 = (x, e_2, -e_1)^T \\ D_2 = (e_2, y, -e_1)^T \\ C_1 = (x, y - a, z)^T \\ C_2 = (x - a, y, z)^T \end{cases} \tag{6}$$

根据机构的几何关系,求得其位置逆解为

$$\begin{cases} d_1 = x \\ d_2 = y \\ d_3 = |\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{C}_1| = \sqrt{(y - a - e_2)^2 + (z + e_1)^2} \\ d_4 = |\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{C}_2| = \sqrt{(x - a - e_2)^2 + (z + e_1)^2} \end{cases} \quad (7)$$

对式(7)作变换,可以得到机构的位置正解为

$$\begin{cases} x = d_1 \\ y = d_2 \\ z = -e_1 \pm \sqrt{d_3^2 - (d_2 - a - e_2)^2} \end{cases} \quad (8)$$

式中“ $\pm$ ”与机构装配方式有关,对应图2中装配方式应取“ $+$ ”号。

根据式(7)、(8)可知,动平台在 x 方向的位移完全取决于 d_1 ,在 y 方向的位移完全取决于 d_2 ,在 z 方向的位移可由 d_2 和 d_3 (或 d_1 和 d_4) 决定,因此具有运动部分解耦的特点,在分析、轨迹规划和控制方面具有优势。

2.2 奇异分析

当机构处于或接近奇异位形时,会导致刚度下降、运动失控等后果,应对其展开分析。对位置方程求导,得到机构的速度方程,整理成矩阵形式为

$$\boldsymbol{J}_A \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{d}_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_B \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中

$$\boldsymbol{J}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{J}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y - a - e_2 & z + e_1 \\ x - a - e_2 & 0 & z + e_1 \end{bmatrix}$$

可以得到机构雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_A^{-1} \boldsymbol{J}_B \quad (10)$$

根据雅可比矩阵情况,并联机构的奇异位形可分为3类:逆解奇异、正解奇异和混合奇异^[23]。

当只有 $\det(\boldsymbol{J}_A) = 0$ 时,机构发生逆解奇异,此时动平台自由度瞬时减少。根据式(9),该奇异在 d_3 或 d_4 为0时发生。由于实际机构中移动副行程限制,该类奇异不会发生。

冗余驱动并联机构在矩阵 $\boldsymbol{J}_B$ 降秩时发生正解奇异。当 $z = -e_1$,即点 D_1 、 D_2 和 p 共面时,矩阵 $\boldsymbol{J}_B$ 的第3列全为0,此时动平台沿 z 轴方向的移动运动

不可控。图3为对应的正解奇异位形。

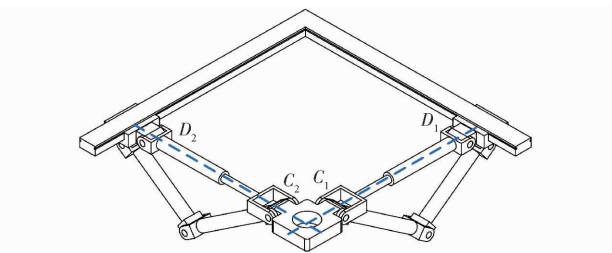


图3 正解奇异位形

Fig.3 Direct singular configuration

当逆解奇异和正解奇异的条件同时满足时,机构处于混合奇异位形。由于逆解奇异不会发生,机构也不存在混合奇异。

2.3 工作空间

由于各分支共同约束,并联机构的工作空间通常较小。给定机构参数 $a = 50\text{ mm}$, $e_1 = 23\text{ mm}$, $e_2 = 40\text{ mm}$, $l_1 = 50\text{ mm}$, $l_2 = 200\text{ mm}$ 。限定驱动1、2的行程范围为 $50 \sim 400\text{ mm}$,驱动3、4的行程范围为 $175 \sim 350\text{ mm}$ 。为避免杆件干涉,令 B_iC_i 和 C_iD_i ($i = 1, 2$) 的夹角大于 45° 。为避免奇异位形,令 $z > 0$,利用搜索法可绘制机构的三维工作空间如图4所示。可以发现,机构在 x 、 y 方向的移动范围为 $50 \sim 356\text{ mm}$,在 z 方向移动范围为 $0 \sim 310\text{ mm}$,具有较大的工作空间(图4)。

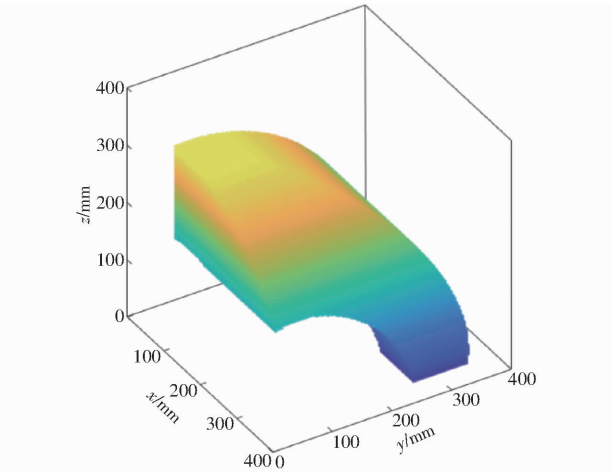


图4 工作空间

Fig.4 Workspace

3 动力学分析

3.1 速度分析

动力学建模与分析是并联机构高速高精度控制的基础,采用螺旋理论结合虚功原理的方法^[24]进行动力学建模。

在定坐标系中,令 $\boldsymbol{r}_{ia}$ 、 $\boldsymbol{r}_{ib}$ 、 $\boldsymbol{r}_{ic}$ 和 $\boldsymbol{r}_{id}$ ($i = 1, 2$) 分别为点 A_i 、 B_i 、 C_i 和 D_i 的位置矢量,分支1、2中PRRR链的运动螺旋可表示为

$$\left\{\begin{aligned}\$_{11}&= [\mathbf{O}^T \quad \mathbf{x}^T]^T \\ \$_{12}&= [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{r}_{1a}^T \times \mathbf{x}^T]^T \\ \$_{13}&= [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{r}_{1b}^T \times \mathbf{x}^T]^T \\ \$_{14}&= [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{r}_{1c}^T \times \mathbf{x}^T]^T \\ \$_{21}&= [\mathbf{O}^T \quad \mathbf{y}^T]^T \\ \$_{22}&= [\mathbf{y}^T \quad \mathbf{r}_{2a}^T \times \mathbf{y}^T]^T \\ \$_{23}&= [\mathbf{y}^T \quad \mathbf{r}_{2b}^T \times \mathbf{y}^T]^T \\ \$_{24}&= [\mathbf{y}^T \quad \mathbf{r}_{2c}^T \times \mathbf{y}^T]^T\end{aligned}\right. \quad (11)$$

式中 $\$_{ij}$ ——分支 i 中第 j 个关节的运动螺旋, $i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$

$\mathbf{O}$ ——零向量

分支 3 和分支 4 中 PRPR 链的运动螺旋表示为

$$\left\{\begin{aligned}\$_{31}&= [\mathbf{O}^T \quad \mathbf{x}^T]^T \\ \$_{32}&= [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{r}_{1d}^T \times \mathbf{x}^T]^T \\ \$_{33}&= [\mathbf{O}^T \quad \mathbf{r}_{d_1c_1}^T]^T \\ \$_{34}&= [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{r}_{1c}^T \times \mathbf{x}^T]^T \\ \$_{41}&= [\mathbf{O}^T \quad \mathbf{y}^T]^T \\ \$_{42}&= [\mathbf{y}^T \quad \mathbf{r}_{2d}^T \times \mathbf{y}^T]^T \\ \$_{43}&= [\mathbf{O}^T \quad \mathbf{r}_{d_2c_2}^T]^T \\ \$_{44}&= [\mathbf{y}^T \quad \mathbf{r}_{2c}^T \times \mathbf{y}^T]^T\end{aligned}\right. \quad (12)$$

本文并联机构只有 3 个移动自由度, 因此动平台的速度与加速度可表示为

$$\left\{\begin{aligned}\mathbf{V}_p &= (0, 0, 0, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \\ \mathbf{A}_p &= (0, 0, 0, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})^T\end{aligned}\right. \quad (13)$$

根据螺旋理论, 动平台速度螺旋 $\mathbf{V}_p$ 在定坐标系中可以由分支中各关节运动螺旋的线性组合表示为

$$\mathbf{V}_p = \omega_{i1} \$_{i1} + \omega_{i2} \$_{i2} + \omega_{i3} \$_{i3} + \omega_{i4} \$_{i4} \quad (14)$$

式中 ω_{ij} ——分支 i 中第 j 个关节的速度, $i, j = 1, 2, 3, 4$

式(16)可表示成矩阵形式

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{J}_i [\omega_{i1} \quad \omega_{i2} \quad \omega_{i3} \quad \omega_{i4}]^T \quad (15)$$

其中 $\mathbf{J}_i = [\ \$_{i1} \quad \$_{i2} \quad \$_{i3} \quad \$_{i4}]$

式中 $\mathbf{J}_i$ —— 6×4 雅可比矩阵

由式(17)可求得分支 i 中各个关节的速度为

$$[\omega_{i1} \quad \omega_{i2} \quad \omega_{i3} \quad \omega_{i4}]^T = \mathbf{J}_i^{-1} \mathbf{V}_p \quad (16)$$

锁定分支中的驱动关节, 可以得到一个约束螺旋 $\$_{Ti}$ 与除驱动关节螺旋外的所有被动关节螺旋都互易, 即 $\$_{Ti} \circ \$_{ij} = 0$ 。该约束螺旋即驱动关节对应的传递力螺旋, 各分支传递力螺旋表示为

$$\left\{\begin{aligned}\$_{T1}&= [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{r}_{1c}^T \times \mathbf{x}^T]^T \\ \$_{T2}&= [\mathbf{y}^T \quad \mathbf{r}_{2c}^T \times \mathbf{y}^T]^T \\ \$_{T3}&= [\mathbf{r}_{d_1c_1}^T \quad \mathbf{r}_{1c}^T \times \mathbf{r}_{d_1c_1}^T]^T \\ \$_{T4}&= [\mathbf{r}_{d_2c_2}^T \quad \mathbf{r}_{2c}^T \times \mathbf{r}_{d_2c_2}^T]^T\end{aligned}\right. \quad (17)$$

式中 $\$_{Ti}$ ——分支 i 的传递力螺旋, $i = 1, 2, 3, 4$

结合式(16)可以求出各驱动关节的速度 $\dot{\mathbf{d}}$ 为

$$\dot{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{d}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \$_{T1}^T \Delta \mathbf{V}_p \\ \$_{T2}^T \Delta \mathbf{V}_p \\ \$_{T3}^T \Delta \mathbf{V}_p \\ \$_{T4}^T \Delta \mathbf{V}_p \end{bmatrix} = \mathbf{J}_s \Delta \mathbf{V}_p \quad (18)$$

其中 $\mathbf{J}_s = [\$_{T1} \quad \$_{T2} \quad \$_{T3} \quad \$_{T4}]^T$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{J}_s$ —— 4×6 雅可比矩阵

Δ —— 6×6 算子矩阵

将式(17)代入式(20)中作变换后, 可以得到并联机构各被动关节的速度与 4 个驱动关节速度之间的关系为

$$[\omega_{i1} \quad \omega_{i2} \quad \omega_{i3} \quad \omega_{i4}]^T = (\mathbf{J}_s \Delta \mathbf{J}_i)^{-1} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{G}_i \dot{\mathbf{d}} \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} G_{\omega_{i1}}^1 & G_{\omega_{i1}}^2 & G_{\omega_{i1}}^3 & G_{\omega_{i1}}^4 \\ G_{\omega_{i2}}^1 & G_{\omega_{i2}}^2 & G_{\omega_{i2}}^3 & G_{\omega_{i2}}^4 \\ G_{\omega_{i3}}^1 & G_{\omega_{i3}}^2 & G_{\omega_{i3}}^3 & G_{\omega_{i3}}^4 \\ G_{\omega_{i4}}^1 & G_{\omega_{i4}}^2 & G_{\omega_{i4}}^3 & G_{\omega_{i4}}^4 \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{G}_i$ ——分支 i 的一阶影响系数矩阵

分支 i 中第 j 个关节的速度螺旋 $\mathbf{V}_{ij}$ 可以由驱动关节速度的线性组合表示为

$$\mathbf{V}_{ij} = [\omega_{ij}^T \quad \mathbf{v}_{ij}^T]^T = \$_{ij}^1 \dot{d}_1 + \$_{ij}^2 \dot{d}_2 + \$_{ij}^3 \dot{d}_3 + \$_{ij}^4 \dot{d}_4 \quad (20)$$

其中

$$\$_{ij}^k = G_{\omega_{i1}}^k \$_{i1} + \cdots + G_{\omega_{ij}}^k \$_{ij}$$

式中 $\$_{ij}^k$ ——驱动 k 对分支 i 中第 j 个关节贡献的速度螺旋, $i, j, k = 1, 2, 3, 4$

注意到上述速度螺旋的参考点都为定坐标系原点 o , 当选择的参考点由点 o 转换到机构各部件质心处时, 速度螺旋可进行变换, 即

$$\$_{ij,c}^k = [(S(\$_{ij}^k))^T \quad (S_0(\$_{ij}^k) \times \mathbf{r}_{ij,c})^T]^T \quad (21)$$

式中 $\$_{ij,c}^k$ ——驱动 k 对分支 i 中第 j 个部件质心贡献的速度螺旋

$\mathbf{r}_{ij,c}$ ——原点 o 到分支 i 中第 j 个部件质心处的位置向量

$S(\$)$ ——螺旋原部

$S_0(\$)$ ——螺旋对偶部

3.2 加速度与受力分析

类似于速度分析, 动平台相对于定坐标系的加速度 $\mathbf{A}_p$ 也可用分支各关节运动螺旋组合^[25]表示为

$$\boldsymbol{A}_p = \dot{\omega}_{i1} \boldsymbol{\$}_{i1} + \dot{\omega}_{i2} \boldsymbol{\$}_{i2} + \dot{\omega}_{i3} \boldsymbol{\$}_{i3} + \dot{\omega}_{i4} \boldsymbol{\$}_{i4} + \boldsymbol{\$}_{Lie-i}$$

(24)

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\$}_{Lie-i} = & (\dot{\omega}_{i1} \boldsymbol{\$}_{i1}) \circ (\dot{\omega}_{i2} \boldsymbol{\$}_{i2} + \dot{\omega}_{i3} \boldsymbol{\$}_{i3} + \dot{\omega}_{i4} \boldsymbol{\$}_{i4}) + \\ & (\dot{\omega}_{i2} \boldsymbol{\$}_{i2}) \circ (\dot{\omega}_{i3} \boldsymbol{\$}_{i3} + \dot{\omega}_{i4} \boldsymbol{\$}_{i4}) + (\dot{\omega}_{i3} \boldsymbol{\$}_{i3}) \circ (\dot{\omega}_{i4} \boldsymbol{\$}_{i4}) \end{aligned}$$

由式(24)可求得分支*i*中各关节螺旋加速度为

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{i1} & \dot{\omega}_{i2} & \dot{\omega}_{i3} & \dot{\omega}_{i4} \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{J}_i^{-1} (\boldsymbol{A}_p - \boldsymbol{\$}_{Lie-i}) \quad (25)$$

进一步可以求得机构各部件相对于定坐标系原点*o*的加速度螺旋为

$$\boldsymbol{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ij}^T & \boldsymbol{a}_{ij}^T \end{bmatrix}^T = \dot{\omega}_{i1} \boldsymbol{\$}_{i1} + \cdots + \dot{\omega}_{ij} \boldsymbol{\$}_{ij} + \boldsymbol{\$}_{Lie-ij}$$

(26)

$$\boldsymbol{\$}_{Lie-ij} = (\dot{\omega}_{i1} \boldsymbol{\$}_{i1}) \circ (\dot{\omega}_{i2} \boldsymbol{\$}_{i2} + \cdots + \dot{\omega}_{ij} \boldsymbol{\$}_{ij}) + \cdots + (\dot{\omega}_{i(j-1)} \boldsymbol{\$}_{i(j-1)}) \circ (\dot{\omega}_{ij} \boldsymbol{\$}_{ij})$$

式中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ ——分支*i*中第*j*个部件相对于点*o*的加速度螺旋

与速度螺旋类似,分支*i*中第*j*个部件相对于其质心处的加速度螺旋 $\boldsymbol{A}_{ij,C}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{ij,C} = & \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ij}^T & \boldsymbol{a}_{ij,C}^T \end{bmatrix}^T = \\ & \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{ij}^T & (\dot{\boldsymbol{v}}_{ij} + \dot{\omega}_{ij} \times \boldsymbol{r}_{ij,C} + \boldsymbol{\omega}_{ij} \times (\boldsymbol{\omega}_{ij} \times \boldsymbol{r}_{ij,C}))^T \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

(27)

在求得各部件速度及加速度后,分支*i*中第*j*个部件质心处受到的惯性力/力矩螺旋 $\boldsymbol{F}_{I,ij,C}$ 、重力螺旋 $\boldsymbol{F}_{G,ij,C}$ 、外力/力矩螺旋 $\boldsymbol{F}_{E,ij,C}$ 可分别表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{I,ij,C} = [(-m_{ij} \boldsymbol{a}_{ij,C})^T \quad (-\boldsymbol{I}_{ij} \dot{\omega}_{ij} - \boldsymbol{\omega}_{ij} \times \boldsymbol{I}_{ij} \boldsymbol{\omega}_{ij})^T]^T \\ \boldsymbol{F}_{G,ij,C} = [(m_{ij} \boldsymbol{g})^T \quad \boldsymbol{O}^T]^T \\ \boldsymbol{F}_{E,ij,C} = [\boldsymbol{f}_{E,ij,C}^T \quad \boldsymbol{\tau}_{E,ij,C}^T]^T \end{cases}$$

(28)

式中 $\boldsymbol{I}_{ij}$ ——分支*i*中第*j*个部件相对于定坐标系的惯性矩阵

m_{ij} ——分支*i*中第*j*个部件的质量

$\boldsymbol{g}$ ——重力加速度

$\boldsymbol{f}_{E,ij,C}$ ——分支*i*中第*j*个部件质心处所受外力

$\boldsymbol{\tau}_{E,ij,C}$ ——分支*i*中第*j*个部件质心处所受外力矩

机构分支*i*中第*j*个部件质心处所受的合力 $\boldsymbol{F}_{ij,C}$ 可表示为

$$\boldsymbol{F}_{ij,C} = \boldsymbol{F}_{I,ij,C} + \boldsymbol{F}_{G,ij,C} + \boldsymbol{F}_{E,ij,C} \quad (29)$$

3.3 驱动力优化

根据式(9)、(10),机构的驱动速度与动平台速度螺旋间的映射关系可表示为

$$\dot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{J}_d \boldsymbol{V}_p$$

(30)

其中 $\boldsymbol{J}_d = [\boldsymbol{O}_{3 \times 4} \quad \boldsymbol{J}]$

式中 $\boldsymbol{J}_d$ ——驱动速度与动平台速度间的雅可比矩阵

根据已求得并联机构各部件的受力与速度,机构运动时总体瞬时功率可表示为

$$\begin{aligned} P = & \sum \boldsymbol{F}_{ij,C} \Delta \boldsymbol{V}_{ij,C} + \sum \tau_i \dot{d}_i = \\ & \sum \boldsymbol{F}_{ij,C} \Delta (\boldsymbol{\$}_{ij,C}^1 \dot{d}_1 + \boldsymbol{\$}_{ij,C}^2 \dot{d}_2 + \boldsymbol{\$}_{ij,C}^3 \dot{d}_3 + \boldsymbol{\$}_{ij,C}^4 \dot{d}_4) + \\ & \sum \tau_i \dot{d}_i = \boldsymbol{F}_v^T \dot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{\tau}^T \dot{\boldsymbol{d}} \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_v = & \begin{bmatrix} \sum \boldsymbol{F}_{ij,C} \Delta \boldsymbol{\$}_{ij,C}^1 \\ \sum \boldsymbol{F}_{ij,C} \Delta \boldsymbol{\$}_{ij,C}^2 \\ \sum \boldsymbol{F}_{ij,C} \Delta \boldsymbol{\$}_{ij,C}^3 \\ \sum \boldsymbol{F}_{ij,C} \Delta \boldsymbol{\$}_{ij,C}^4 \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\tau} = & [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4]^T \end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ ——驱动力

引入虚速度 $\delta \boldsymbol{V}_p$,将式(30)代入式(31)可得

$$\delta P = \boldsymbol{F}_v \boldsymbol{J}_d \delta \boldsymbol{V}_p + \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{J}_d \delta \boldsymbol{V}_p \quad (32)$$

在虚功原理中,虚速度 $\delta \boldsymbol{V}_p$ 为任意值,为使得并联机构的总虚功 δP 始终为零,须满足

$$\boldsymbol{F}_v \boldsymbol{J}_d + \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{J}_d = 0 \quad (33)$$

对于冗余驱动并联机构,其驱动关节数大于机构自由度,因此其逆动力学所求的驱动力组合并不唯一,存在无穷多种组合。不合理的驱动力组合可能导致机构部件之间的内力过大而对机构造成损坏,式(33)中雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_d$ 不为方阵,对其转置求伪逆后可得驱动力的最小二范数组合^[26]为

$$\boldsymbol{\tau} = -(\boldsymbol{J}_d^T)^{-1} (\boldsymbol{F}_v \boldsymbol{J}_d)^T \quad (34)$$

3.4 数值仿真验证

通过 ADAMS 动力学仿真软件来验证上述动力学模型的正确性。机构各部件参数如表 1 所示。设定动平台做螺旋上升运动,其具体轨迹(单位:mm)为

$$\begin{cases} x = 245 - 50 \cos(\pi t_m) \\ y = 205 + 50 \sin(\pi t_m) \\ z = 200 - 5 t_m \end{cases} \quad (35)$$

式中 t_m ——运动的持续时间,取 0~5 s

在冗余驱动并联机构的仿真过程中,为解决逆动力学解不唯一的问题,将分支 1~3 的驱动关节位移量以及通过驱动力优化计算出的分支 4 的驱动力理论值输至 ADAMS 软件,这样动平台不仅能输出给定轨迹还能测量出唯一的驱动力组合。

图 5 为理论计算结果和仿真结果的对比情况,其中,驱动力曲线表示的是沿移动副移动方向驱动合力的幅值。可以看出基于螺旋理论以及最小二范数优化得到的驱动力和 ADAMS 仿真中的驱动力基

表 1 并联机器人参数
Tab.1 Parameters of parallel robot

部件	质量/kg	质心坐标/m	转动惯量/(kg·m ²)
滑块	0.183 6	(0,0,0.018)	(8.650×10 ⁻⁵ ,5.440×10 ⁻⁵ ,1.097×10 ⁻⁴)
连杆 1	0.158 6	(0,0,0.086)	(8.651×10 ⁻⁵ ,1.097×10 ⁻⁴ ,5.440×10 ⁻⁵)
连杆 2	0.179 6	(0,0,0.1)	(6.506×10 ⁻⁴ ,1.656×10 ⁻⁵ ,6.575×10 ⁻⁴)
分支 3,4 上连杆	0.084 5	(0,0,0.061)	(1.510×10 ⁻⁴ ,9.190×10 ⁻⁶ ,1.544×10 ⁻⁴)
分支 3,4 下连杆	0.077 3	(0,0,0.071)	(2.333×10 ⁻⁴ ,1.544×10 ⁻⁵ ,2.209×10 ⁻⁴)
动平台	0.183 9	(0,0,0)	(1.788×10 ⁻⁴ ,3.670×10 ⁻⁴ ,2.058×10 ⁻⁴)

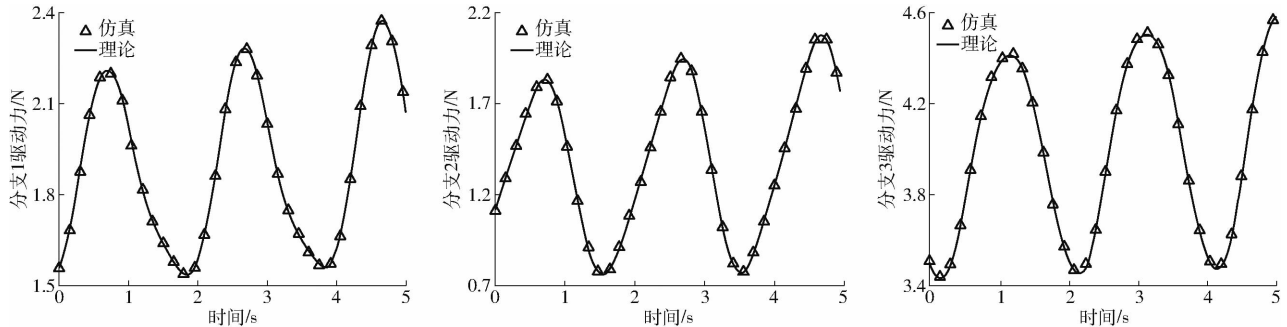


图 5 理论计算结果与 ADAMS 仿真结果对比
Fig.5 Comparison of theoretical calculation results and ADAMS simulation results

本一致,最大偏差仅为 0.6%。结果证明了并联机构动力学模型的正确性,可用于后续的动力学性能评估和控制系统设计。

4 性能评价

对于并联机构,可采用雅可比矩阵条件数的倒数对其运动学性能进行评价,即机构灵巧度指标^[27]。灵巧度越接近 1,表示机构运动学性能越好,而越接近 0 表明机构越接近奇异位形。雅可比矩阵 J 的奇异值为

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(J^T J)}$$
 (36)

式中 λ_i ——矩阵 $J^T J$ 的特征值
灵巧度指标可表示为

$$\kappa_1 = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$
 (37)

为了解机构工作空间内运动学性能情况,取中间位置 $z=175\text{ mm}$ 处的平面,绘制灵巧度指标分布如图 6 所示。可以看到灵巧度具有对称性,且与机构结构特点相符。

灵巧度指标反映了并联机构在不同位置下的运动学性能,为了评估机构在工作空间内的全域运动学性能,将 $\kappa_1 \geq 0.6$ 的区域定义为优质灵巧度空间,定义优质灵巧度空间与整体工作空间的比值为全域运动学指标,即

$$\sigma = \frac{\int_{S_{GT}} dW}{\int_S dW}$$
 (38)

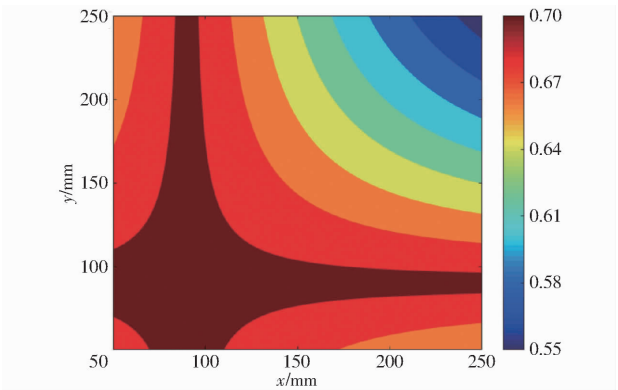


图 6 灵巧度指标分布图
Fig.6 Distribution of dexterity index

式中 W ——机构的整体工作空间
 S_{GT} ——优质灵巧度空间面积
 S ——整体工作空间面积
 σ ——全域运动学指标

σ 的取值范围为 0~1,其值越大表明工作空间内机构的整体运动学性能越好。

在动力学性能评估方面,动态可操作度椭球(Dynamic manipulability ellipsoid, DME)^[28]是常用指标,该指标衡量了动平台在特定驱动力作用下改变位姿的能力。当驱动力被约束后动平台在不同方向上加速度范围的椭球^[29]可表示为

$$\|\tilde{F}\| \leq 1 \Rightarrow \tilde{a}^T \tilde{J}_T^{-T} \tilde{M} \tilde{J}_T^{-1} \tilde{a} \leq 1$$
 (39)

式中 $\tilde{F}$ ——系统广义驱动力
 $\tilde{a}$ ——动平台广义加速度

$\tilde{\mathbf{J}}_T$ ——驱动速度和动平台平移速度之间的雅可比矩阵

$\tilde{\mathbf{M}}$ ——系统惯性矩阵

可以计算矩阵 $\tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{J}}_T^{-1}$ 的条件数倒数来评价机构动力学性能的各向同性为

$$\kappa_2 = \frac{\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{J}}_T^{-1})}{\sigma_{\max}(\tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{J}}_T^{-1})}$$

(40)

同样,以 $z = 175\text{ mm}$ 处的二维平面为例,绘制工作空间内的 DME 指标分布如图 7 所示,可以看到动力学指标也呈对称分布,与机构结构特征吻合。

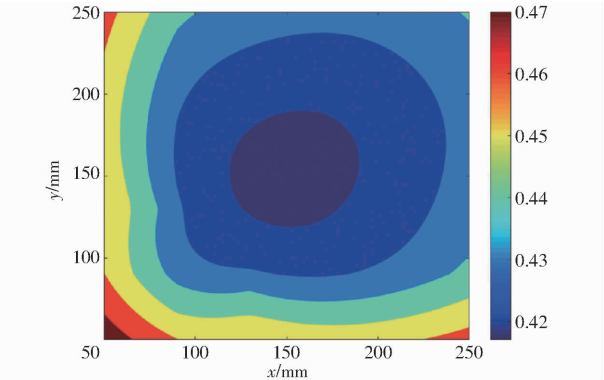


图 7 DME 指标分布图

Fig.7 Distribution of DME index

5 尺度优化

上述全域运动学指标可用于并联机构的尺度优化设计。以 l_1 、 l_2 和 a 为设计参数,采用空间模型法^[30]来开展尺度优化。令标准化因子

$$D = \frac{a + l_1 + l_2}{3}$$

(41)

无量纲参数与约束条件分别为

$$\begin{cases} r_1 = a/D \\ r_2 = l_1/D \\ r_3 = l_2/D \end{cases}$$

(42)

$$\begin{cases} r_1 \leq r_2 \leq r_3 \\ 0 < r_1, r_2, r_3 < 3 \end{cases}$$

(43)

根据式(43)的约束条件,可以得到如图 8 所示的参数设计空间。无量纲参数与设计空间参数之间的关系为

$$\begin{cases} s = r_1 \\ t = r_1 + 2r_2 \end{cases}$$

(44)

通过计算可以得到全域运动学指标在参数设计空间中的性能分布如图 9 所示,定义图谱中 $\sigma = 1$ 的区域为性能优良区域。为了获得良好的运动学性能,可以选取性能优良区域中的参数作为机构参数,

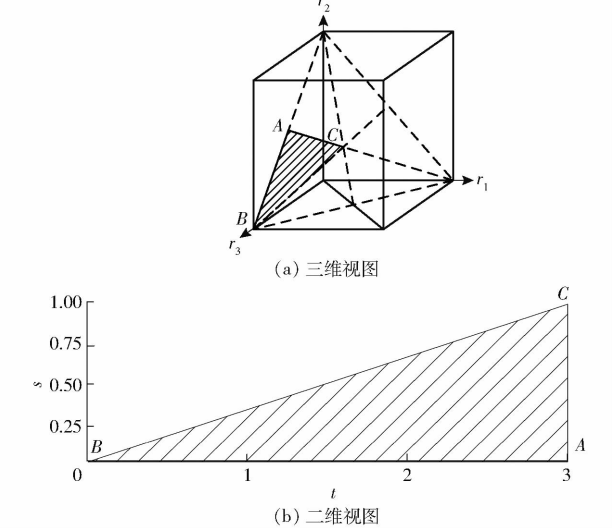


图 8 参数设计空间

Fig.8 Parameter design space

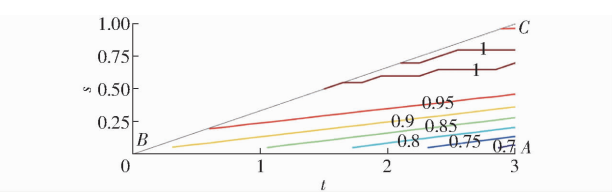


图 9 全域性能图谱

Fig.9 Atlas of global performance

如 $s = 0.6$, $t = 2.6$, 可得优化后机构尺度参数为 $a = 88\text{ mm}$, $l_1 = 146\text{ mm}$, $l_2 = 204\text{ mm}$ 。同样取高度 $z = 175\text{ mm}$ 处的平面,绘制优化后机构性能指标分布如图 10 所示。可以发现,整个平面内灵巧度均大于 0.6,运动学性能较优化前有明显提升。

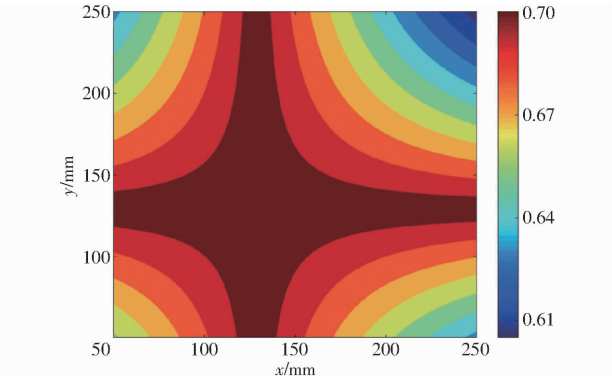


图 10 灵巧度指标分布图

($a = 88\text{ mm}$, $l_1 = 146\text{ mm}$, $l_2 = 204\text{ mm}$)

Fig.10 Distribution map of dexterity index

($a = 88\text{ mm}$, $l_1 = 146\text{ mm}$, $l_2 = 204\text{ mm}$)

图 11 为尺寸优化后机构的 DME 指标分布情况,对比图 7 可以发现,机构动力学性能也得到了提升。

6 结论

(1)提出了一种冗余驱动的三平动并联机构,

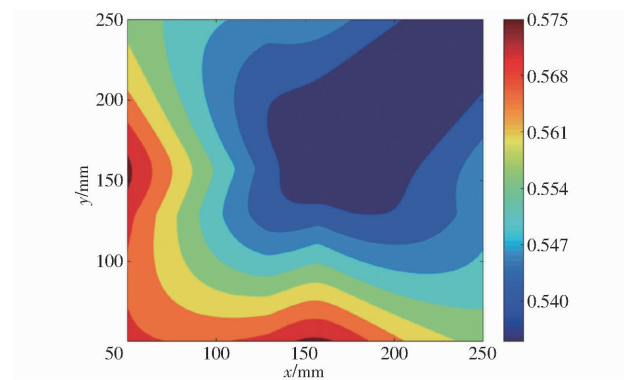


图 11 优化后 DME 指标分布图

Fig. 11 Distribution map of DME index after optimization

具有运动部分解耦的特点,可作为本体构造五轴打磨装置。

(2)采用螺旋理论和虚功原理建立了机构的动力学模型,并对关节驱动力进行了优化分配,驱动力理论分析与仿真计算结果最大偏差为 0.6%,验证了模型的正确性。

(3)建立了灵巧度指标和动态可操作度椭圆指标,并绘制了反映机构性能与尺度参数映射关系的性能图谱,得到了具有更优性能的机构尺度参数。

参 考 文 献

- [1] 蔡赞,张邦成,姚禹. 3PTT-2R 串并联数控机床动力学耦合特性研究[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(12): 362-369. CAI Yun, ZHANG Bangcheng, YAO Yu. Dynamics coupling characteristics of 3PTT-2R NC serial-parallel machine tool[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(12): 362-369. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20151249&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2015.12.049. (in Chinese)
- [2] CLAVEL R. A fast robot with parallel geometry[C]//Proc. Int. Symposium on Industrial Robots, 1988: 91-100.
- [3] HUANG Z, LI Q. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method[J]. The International Journal of Robotics Research, 2003, 22(1): 59-79.
- [4] LI Q, HERVÉ J M. Structural shakiness of nonoverconstrained translational parallel mechanisms with identical limbs[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2008, 25(1): 25-36.
- [5] 杨廷力,金琼,刘安心,等. 基于单开链单元的三平移并联机器人机构型综合及其分类[J]. 机械工程学报, 2002, 38(8): 31-36. YANG Tingli, JIN Qiong, LIU Anxin, et al. Structural synthesis and classification of the 3DOF translational parallel robot mechanisms based on the units of single-opened-chain[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(8): 31-36. (in Chinese)
- [6] 史巧硕,高峰,余发国. 基于 GF 集的三自由度移动并联机构型研究[J]. 上海交通大学学报, 2008, 42(7): 1109-1115. SHI Qiaoshuo, GAO Feng, YU Faguo. Type synthesis of 3-DOF translational parallel mechanisms based on GF set[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2008, 42(7): 1109-1115. (in Chinese)
- [7] 孟庆梅,李佳宇,李菊,等. 半对称三平移 Delta-CU 并联机构运动误差分析与标定[J/OL]. 农业机械学报, 2021, 52(1): 393-400. MENG Qingmei, LI Jiayu, LI Ju, et al. Error modeling analysis and calibration of semi-symmetrical three-translation Delta-CU parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(1): 393-400. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20210144&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2021.01.044. (in Chinese)
- [8] ZENG Q, EHMAN K F, CAO J. Tri-pyramid robot: design and kinematic analysis of a 3-DOF translational parallel manipulator[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2014, 30(6): 648-657.
- [9] ZENG Q, EHMAN K F, CAO J. Tri-pyramid robot: stiffness modeling of a 3-DOF translational parallel manipulator[J]. Robotica, 2016, 34(2): 383-402.
- [10] 沈惠平,熊坤,孟庆梅,等. 并联机构运动解耦设计方法与应用研究[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(6): 348-356. SHEN Huiping, XIONG Kun, MENG Qingmei, et al. Design methods for kinematic decoupled parallel mechanisms and its applications[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 348-356. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20160646&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2016.06.046. (in Chinese)
- [11] KONG X, GOSSELIN C M. Kinematics and singularity analysis of a novel type of 3-CRR 3-DOF translational parallel manipulator[J]. The International Journal of Robotics Research, 2002, 21(9): 791-798.
- [12] 孙驰宇,沈惠平,王一熙,等. 零耦合度部分运动解耦三平移并联机构刚度建模与分析[J/OL]. 农业机械学报, 2020, 51(6): 385-395. SUN Chiyu, SHEN Huiping, WANG Yixi, et al. Stiffness analysis of three-translation parallel mechanism with zero coupling degree and partial motion decoupling[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(6): 385-395. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20200642&journal_id=jcsam.

- DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.06.042. (in Chinese)
- [13] SHEN H, CHABLAT D, ZENG B, et al. A translational three-degrees-of-freedom parallel mechanism with partial motion decoupling and analytic direct kinematics[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2020, 12(2): 021112.
- [14] ZOU Q, ZHANG D, LUO X, et al. Enumeration and optimum design of a class of translational parallel mechanisms with prismatic and parallelogram joints[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 150: 103846.
- [15] 沈惠平, 曾博雄, 尤晶晶, 等. 具有解析式位置正解的三平移并联机构设计与分析[J/OL]. *农业机械学报*, 2020, 51(2): 383–391, 426.
SHEN Huiping, ZENG Boxiong, YOU Jingjing, et al. Topology design and analysis of three-translation parallel mechanism with analytical direct position solutions[J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2020, 51(2): 383–391, 426. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=2002042&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.02.042. (in Chinese)
- [16] SAGLIA J A, DAI J S, CALDWELL D G. Geometry and kinematic analysis of a redundantly actuated parallel mechanism that eliminates singularities and improves dexterity[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2008, 130(12): 124501.
- [17] 卿建喜, 李剑锋, 方斌. 冗余驱动 Tricept 并联机构的驱动优化[J]. *机械工程学报*, 2010, 46(5): 8–14.
QING Jianxi, LI Jianfeng, FANG Bin. Drive optimization of Tricept parallel mechanism with redundant actuation[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46(5): 8–14. (in Chinese)
- [18] 韩先国, 陈五一, 郭卫东. 采用冗余驱动提高并联机床精度的研究[J]. *航空学报*, 2002, 23(5): 487–490.
HAN Xianguo, CHEN Wuyi, GUO Weidong. New approach to improve accuracy of PKMs by redundant control[J]. *Acta Areonautica et Astronautica Sinica*, 2002, 23(5): 487–490. (in Chinese)
- [19] QU H, GUO S, ZHANG Y. Kinematics analysis of a redundantly actuated 4-RUU translational parallel manipulator and its nonredundant 3-RUU counterpart[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2017, 231(17): 3238–3249.
- [20] 李仕华, 崔红柳, 刘艳敏. 消除内部奇异的三平移并联机构冗余驱动支链的综合[J]. *机械工程学报*, 2014, 50(23): 36–41.
LI Shihua, CUI Hongliu, LIU Yanmin. Synthesis of elimination inner singularity branched link with actuation redundancy for 3-translational parallel mechanisms[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(23): 36–41. (in Chinese)
- [21] LI Q, HERVÉ J M. 1T2R parallel mechanisms without parasitic motion[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2010, 26(3): 401–410.
- [22] 黄真, 刘靖芳, 李艳文. 论机构自由度[M]. 北京:科学出版社, 2011.
- [23] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990, 6(3): 281–290.
- [24] GALLARDO J, RICO J M, FRISOLI A, et al. Dynamics of parallel manipulators by means of screw theory[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2003, 38(11): 1113–1131.
- [25] RICO J M, DUFFY J. An application of screw algebra to the acceleration analysis of serial chains[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1996, 31(5): 445–457.
- [26] WANG Y, BELZILE B, ANGELES J, et al. The modeling of redundantly actuated mechanical systems[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2019, 11(6): 1–20.
- [27] MERLET J. Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2006, 128(128):199–206.
- [28] YOSHIKAWA T. Dynamic manipulability of robot manipulators[J]. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, 1985, 21(9): 970–975.
- [29] CHEN G, YU W, LI Q, et al. Dynamic modeling and performance analysis of the 3-PRRU 1T2R parallel manipulator without parasitic motion[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90(1): 339–353.
- [30] LIU X, WANG J. A new methodology for optimal kinematic design of parallel mechanisms[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, 42: 1210–1224.