

三角网格曲面环形刀五轴加工宽行距刀具路径生成方法

陈良骥 赵波 马龙飞 高飞
(天津工业大学机械工程学院, 天津 300387)

摘要: 针对三角网格曲面五轴数控加工中普遍使用的截平面法加工行距较窄、加工效率较低的问题,提出一种可变行距的宽行加工刀具路径生成方法。首先,以三角网格数据重构为基础,提出一种基于 KdTree 网格区域划分的求交算法,实现了网格数据点的快速获取;然后,分析环形刀及三角网格曲面的几何特性,在无曲率干涉条件下提出通过改变侧倾角并优化前倾角使刀具有效切削半径最大化的方法,获得以加工行距最大化为优化目标的最佳刀具倾角组合;最后,结合三角网格曲面的特性建立一种环形刀刀具离散模型,并提出了相应的干涉检测与修正方法。仿真实验表明,在相同加工条件下,本文加工行距优化方法较现有方法明显增大了加工行距、提高了加工效率,而且所提出的刀具干涉与修正处理方法能有效避免局部刀底干涉及全局刀杆干涉现象的发生。

关键词: 五轴数控加工;三角网格曲面;环形刀;加工行距;干涉处理

中图分类号: TH166 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2021)05-0392-12 **OSID:** 

Tool Paths with Large Intervals Generation Method for Five-axis Machining of Triangular Mesh Surface Using Toroidal Cutter

CHEN Liangji ZHAO Bo MA Longfei GAO Fei
(School of Mechanical Engineering, Tiangong University, Tianjin 300387, China)

Abstract: Aiming at the problem of machining inefficiency caused by narrow path interval in the current five-axis CNC machining process of triangular mesh surface, a tool path generation algorithm for variable path interval in machining was proposed. Firstly, with the data reconstruction of triangular mesh, an intersection algorithm based on KdTree mesh partition was proposed, which achieved fast grid data point acquisition. Then, with analyzing the geometric characteristics of the toroidal cutter and the triangular mesh surface, a method was proposed to maximize the effective cutting radius by changing the tilt angle and optimizing the inclination angle under the condition of no curvature interference. Finally, a discrete model of toroidal cutter was established based on the characteristics of triangular mesh surface, and the corresponding interference detection and correction method was also put forward. The simulation results showed that the optimization method of path intervals can significantly improve the machining path intervals compared with the existing methods under the same machining conditions and the presented method of checking and correcting the tool-interference can effectively avoid the local interference of cutter bottom and the global interference of cutter arbor. It can be seen that the methods proposed had upper theoretical significance and practical application value in improving the efficiency of five-axis CNC machining for triangular mesh surface.

Key words: five-axis CNC machining; triangular mesh surface; toroidal cutter; path interval; interference

0 引言

应用计算机辅助设计与制造(CAD/CAM)和计算机数控(CNC)技术加工复杂零件时,需获得零件

待加工曲面的精准数学模型,在此基础上还需生成高效、高精度的加工刀具路径。在各种曲面数学模型中,参数化样条曲面已较早地被应用于产品的数字建模领域。参数曲面数控加工刀具路径生成方法

存在以下共性问题：涉及主曲率、法曲率等诸多数学计算，这其中又涉及参数曲面的多阶偏导运算，使这类方法的计算任务量较大；在切触区域以外的较远端区域不能较好地研究刀具与参数曲面间的干涉与碰撞问题。

近年来，随着精密测量仪器及图形处理器技术（GPU）的发展，对零件待加工表面进行精密测量及快速逆向数据处理后，可将其表达为三维点云数据集的形式，并可按一定的规则最终形成零件表面的三角网格曲面^[1-3]，由此产生面向三角网格曲面的刀具路径生成方法。现行三角网格曲面数控加工刀具路径生成方法主要包括平行截面法（截平面法）、改进的截平面法、拟合参数曲面法^[4-5]。陈甜甜等^[6]基于三角网格的 Loop 细分，使用截平面法获得球头刀的刀具轨迹，但这种方法获得的刀具轨迹的总长度较大，加工效率较低，且仅适用于三轴数控加工。ZHANG 等^[7]提出了基于局部剖分的三角网格刀具路径生成算法，但该算法不能对刀具进行倾斜调整，无法计算出刀具姿态角，因此只能用于三轴数控加工。黄琴^[8]提出了一种适用于三轴数控加工的等误差参数法，可生成三角网格曲面的刀具路径，但同样存在加工效率较低、不能调整刀具倾斜角等问题。在三角网格曲面五轴数控加工刀具路径生成方面，已有不少研究成果^[9-15]。

目前，基于三角网格曲面的刀具路径生成较多采用了球头刀截平面法，该方法虽可将刀触点路径的生成计算简化为求取平面与三角面片交线的计算，也可简化球头刀刀具路径的计算过程，但由于球头刀刀具姿态的调整与加工行距的改变并不密切，导致无法实现变行距的刀具路径生成，生成的刀具路径加工行距较小、加工路径总长度较大，直接影响了曲面的数控加工效率。

针对现行方法存在的问题，本文提出一种面向环形刀的变行距刀具路径生成方法，以加工残留高度为约束条件，以刀触点处获得最大切削宽度为优化目标，对三角网格曲面与刀具接触的局部进行分析，以期实现对环形刀刀具姿态角的优化调整，提高三角网格曲面的数控加工效率。

1 三角网格曲面分析

1.1 三角网格文件拓扑重建

标准的 STL 文件输出的信息为每个三角面片的 3 个顶点坐标值以及每个面片所对应的单位法矢。但由于 STL 文件中三角网格的存储信息是杂乱无序随机排列的，而后续工作需要频繁利用到各信息间的关系，所以需重新建立三角网格信息的拓

扑关系。

建立点表（Vertex）。保证无重复地将每个点的信息都储存在点表中，其中点表中每个点的信息包含有此点的序号及其坐标值，点的序号即所建立点表的行号。

建立面表（Face）。保证无重复地将每个三角面片信息储存在面表中，面表中每个三角面片的信息包含有构成该三角面片的 3 个顶点序号和该面片的序号，面的序号即所建立面表的行号。

建立面法矢表（Normalf）。保证每个三角面片的法矢量都无重复地储存在面法矢表中，法矢表的行号即其所对应的面的序号。

假定以点 V_1 为公共顶点的三角面片有 A、B、C、D、E，每个三角面片的 3 个顶点和法矢量如图 1 所示，据此可分别建立用于存放面片、顶点、法矢量数据信息的面表、点表和面法矢表数据信息存放模式。

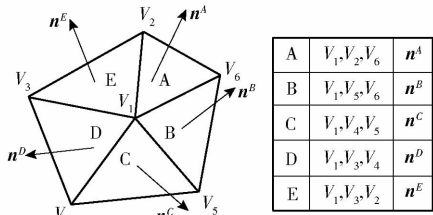


图 1 三角网格信息存放模式

Fig. 1 Triangular mesh information storage mode

1.2 初始刀触（CC）点的求取

对于三角网格曲面的五轴数控加工而言，刀具路径的生成始于刀具与曲面切削接触点（即刀触（CC）点）坐标的计算。曲面的三角网格上 CC 点坐标的计算通常采用求交计算的方法，如图 2 所示。

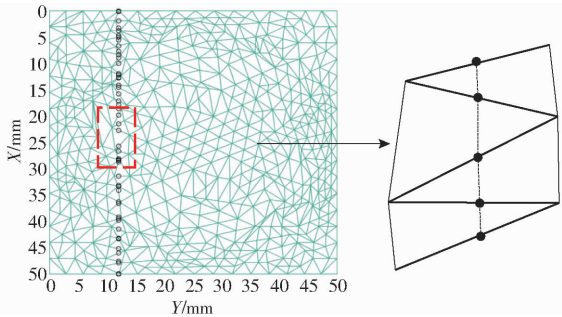


图 2 对三角网格求交可计算刀触点

Fig. 2 Calculated CC point by intersection of triangular meshes

为确定某条刀触点轨迹在整个三角网格上的具体位置，需锁定该轨迹上每个刀触点所对应三角面片的具体索引位置，提出一种合理有效的求交算法，以便可以在无序排列的三角网格表面上求得所需的交点坐标。

在进行求交计算时，由于三角网格数据无序的特性，简单使用遍历的索引方式其搜寻计算速率必

然缓慢。使用高维空间索引结构 KdTree 来对拓扑重建后的三角网格数据进行分割。

沿模型 Y 方向将其划分为 n 个矩形区域,得到分割网格参数 Face_divide、Vertex_divide。 X 方向与之同理,即 X 方向将其划分 n 个矩形区域。划分区域数量 n 依照以下分割网格原则:对网格顶点数据进行 Kd 空间树划分。从模型边界开始,使用垂直于水平面的截平面与网格模型求交(求交时使用的面表与点表为包含模型所有数据的 Face、Vertex 表),得到一系列三角网格表面上的交点,以 2 倍刀具直径为搜索半径对这些点使用 Kd 范围搜索,寻找此范围内的所有三角网格顶点坐标,剔除重复点后得出一组分割网格参数 Face_divide、Vertex_divide。以此类推直至将整个模型覆盖,得到 n 个网格分割区域。

求交计算步骤为:

(1) 根据建立的面表 (Face_divide) 与点表 (Vertex_divide),索引每个三角形对应的顶点坐标 $v_{ij}^1、v_{ij}^2、v_{ij}^3$ 。

(2) 连接 3 个顶点,将三角形离散为 3 条边。使用目标直线与之求交点,记录交点的坐标值为一个刀触点 $CC_{i,j}$,同时记录交点所在边坐标 $edge_point_{i,j}^1、edge_point_{i,j}^2$ 。

(3) 记录下一个刀触点 $CC_{i+1,j}$ 及其所在边的坐标 $edge_point_{i+1,j}^1、edge_point_{i+1,j}^2$,由于求交点是一个连续的过程,若三角形产生一个交点,则此点与与之相邻的另一个交点必然处于同一个三角形。根据此条件,用得到的求交三角形的 2 条边 3 个顶点,结合顶点表与面表,索引得到求交三角形。

(4) 由于三角形的每条边被 2 个三角形所共用,因此会造成数据冗余。此时进行重复性判断,若产生重复交点,则舍去。

(5) 得到交点,并建立求交三角形索引表,此时可以由面法矢表 (Normalf) 获取其所对应的面法矢。

1.3 刀触点沿行距方向的曲率计算

在三角网格曲面中,获取刀触点处沿各方向上曲面的曲率信息对刀具路径的生成有着至关重要的作用,其中本文涉及计算的曲率为与刀触点轨迹线垂直方向(即行距方向)上的曲面曲率。

由 1.2 节中的求交算法可知,刀触点可能正好是网格顶点或位于三角面片的某条边上。网格顶点即为刀触点的情形计算过程比较简单,若刀触点位于网格顶点,此时可以直接输出此点坐标,而其单位法矢量可由公式直接求得。但刀触点位于三角面片某边上的计算过程却比较复杂,本文将主要分析刀触点落在三角面片边上时的情形。

如图 3 所示,设 $CC_{i+1,j}$ 和 $CC_{i-1,j}$ 为 $CC_{i,j}$ 前后相邻的刀触点,3 点共同构成局部刀触点轨迹线, $T_{i,j}$ 为通过刀触点 $CC_{i,j}$ 并垂直于 $CC_{i-1,j}$ 与 $CC_{i+1,j}$ 连接线的垂平面,平面 $T_{i,j}$ 的单位法矢量为

$$l = \frac{CC_{i+1,j} - CC_{i-1,j}}{2} \tag{1}$$

设矢量 d 为当前刀触点轨迹线 $S_{i,j} = \{CC_{i,j} | i = 1, 2, \dots, n\}$ 相对于下一条相邻刀触点轨迹线 $S_{i,j+1} = \{CC_{i,j+1} | i = 1, 2, \dots, n\}$ 的行距方向的单位法矢量,则 d 计算式为

$$d = zl / |zl| \tag{2}$$

式中 z ——工件坐标系 Z 轴方向的单位矢量

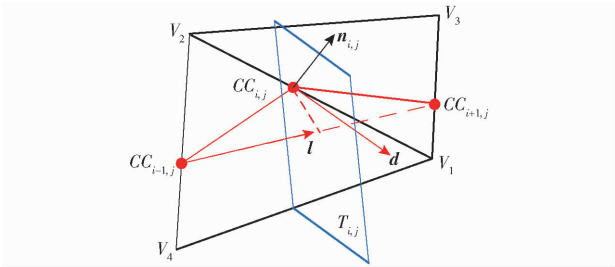


图 3 刀触点 $CC_{i,j}$ 行距方向矢量计算

Fig.3 Vector calculation of line spacing direction with $CC_{i,j}$

由于三角网格曲面仅直接给出所有三角面片的法矢量,而所有顶点处不直接给出法矢量,只能通过间接方式近似求得。在计算机图形学中,通常是以顶点相关联的方向矢量来替代几何表面的真实几何法线。据此,可通过计算与顶点有关的所有三角面片的法矢量取平均值后再进行归一化处理获得。

如图 4 所示, f_k 为一个三角面片, $V_i、V_{i+1}$ 为三角面片 f_k 的 2 个顶点, N_{f_k} 为三角面片 f_k 的面法矢量, n_i 为待求网格顶点 V_i 处曲面的单位法矢量。

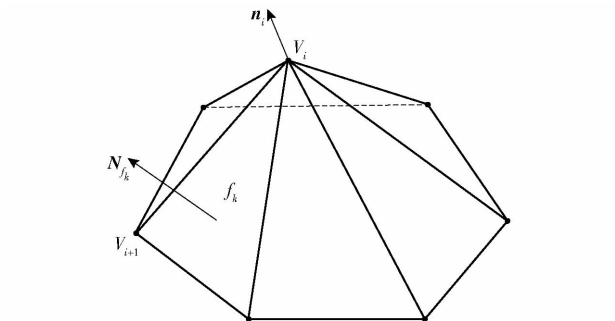


图 4 网格顶点 V_i 的 1-邻域

Fig.4 1-neighborhood of mesh vertex V_i

可先构建网格顶点 V_i 的一阶邻域,使用相关三角面片的面积进行加权求和的方法来计算网格顶点 V_i 的法矢量,计算式为

$$n_i = \frac{\sum_{f_k \in F} A_{f_k} N_{f_k}}{\left\| \sum_{f_k \in F} A_{f_k} N_{f_k} \right\|} \tag{3}$$

式中 F ——三角面片表 (Face)

A_{f_k} ——三角面片 f_k 的面积

三角网格曲面的网格顶点处曲率需构造出该点的一阶邻域信息来进行估算。主要利用 Taubin 提出的理论^[16]计算曲面的第二基本形式,通过求解矩阵计算曲率。

由欧拉公式可知,对于曲面上任意给定的点 v_i ,沿矢量 T_θ 方向的曲率 $k_{v_i}(T_\theta)$ 为

$$k_{v_i}(T_\theta) = k_{\max} \cos^2 \theta + k_{\min} \sin^2 \theta \quad (4)$$

其中 $T_\theta = T_{\max} \cos \theta + T_{\min} \sin \theta$ (5)

式中 $k_{\max}, k_{\min}$ ——点 v_i 处的最大和最小主曲率

$T_{\max}, T_{\min}$ ——点 v_i 处最大和最小主曲率对应的最大和最小主方向矢量

θ ——矢量 T_θ 与点 v_i 处 $k_{\max}$ 对应最大主方向矢量 $T_{\max}$ 之间的夹角

将式(4)的 $k_{v_i}(T_\theta)$ 从 $-\pi$ 到 π 求积分,可以得到对称矩阵 E_{v_i} 为

$$E_{v_i} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_{v_i}(T_\theta) T_\theta T_\theta^T d\theta \quad (6)$$

将 E_{v_i} 分解为

$$E_{v_i} = \begin{bmatrix} T_{\max} & T_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_p^{11} & 0 \\ 0 & m_p^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\max} \\ T_{\min} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中
$$\begin{cases} m_p^{11} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_{v_i}(T_\theta) \cos^2 \theta d\theta \\ m_p^{22} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_{v_i}(T_\theta) \sin^2 \theta d\theta \end{cases} \quad (8)$$

由式(4)~(8)可求得最大、最小主曲率为

$$\begin{cases} k_{\max} = 3m_p^{11} - m_p^{22} \\ k_{\min} = 3m_p^{22} - m_p^{11} \end{cases} \quad (9)$$

求解对称矩阵 E_{v_i} 不为 0 的特征值所对应的特征向量即为最大、最小主曲率分别对应的最大、最小主方向矢量 $T_{\max}, T_{\min}$ 。

由最大、最小主曲率求解得平均曲率 H_c 及高斯曲率 K 为

$$\begin{cases} H_c = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2} \\ K = k_{\max} k_{\min} \end{cases} \quad (10)$$

如图 5 所示, n_1, n_2 分别为三角面片上对应顶点 V_1, V_2 的法矢量。过顶点 V_1, V_2 分别作垂直于法矢量 n_1, n_2 的平面 π_1, π_2 , 则平面 π_1, π_2 分别为三角网格曲面在顶点 V_1, V_2 处的切平面。由式(7)~(9)可以得到 V_1 和 V_2 点处的最大、最小主曲率(分别记为 $k_1^{V_1}, k_2^{V_1}$ 和 $k_1^{V_2}, k_2^{V_2}$)和对应的最大、最小主方向矢量(分别记为 $e_1^{V_1}, e_2^{V_1}$ 和 $e_1^{V_2}, e_2^{V_2}$)。

图 5 中, d_{V_1}, d_{V_2} 分别为行距方向单位矢量 d 在

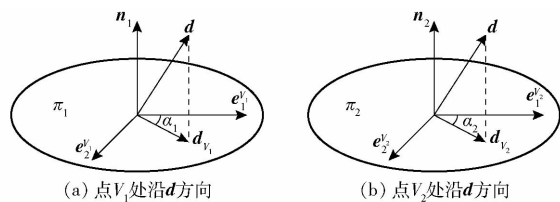


图 5 网格顶点沿任意方向曲率计算

Fig. 5 Curvature calculation of mesh vertex along any direction

切平面 π_1, π_2 上的投影, α_1 和 α_2 分别为 d_{V_1}, d_{V_2} 与最大主方向单位矢量 $e_1^{V_1}$ 和 $e_1^{V_2}$ 的夹角, n_i 为网格顶点 V_i 处曲面的单位法矢量, 则有

$$\begin{cases} d_{V_1} = n_1 dn_1 \\ d_{V_2} = n_2 dn_2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \arccos \frac{d_{V_1} e_1^{V_1}}{|d_{V_1}| |e_1^{V_1}|} \\ \alpha_2 = \arccos \frac{d_{V_2} e_1^{V_2}}{|d_{V_2}| |e_1^{V_2}|} \end{cases} \quad (12)$$

再由欧拉公式,可得三角网格曲面在网格顶点处沿行距方向 d 的法曲率为

$$\begin{cases} k_{V_1}(\alpha_1) = k_1^{V_1} \cos^2 \alpha_1 + k_2^{V_1} \sin^2 \alpha_1 \\ k_{V_2}(\alpha_2) = k_1^{V_2} \cos^2 \alpha_2 + k_2^{V_2} \sin^2 \alpha_2 \end{cases} \quad (13)$$

则位于线段 $V_1 V_2$ 上的点 $CC_{i,j}$ 处沿行距方向 d 的曲率可以采用线性插值方法计算, 计算式为

$$k_p(d) = \mu k_{V_1}(\alpha_1) + (1 - \mu) k_{V_2}(\alpha_2) \quad (14)$$

其中 $\mu = |CC_{i,j} - V_2| / |V_1 - V_2|$

2 加工行距的优化调整

以刀触点 C 为研究对象, 建立图 6 所示的环形刀具偏转模型。刀刃圆环面部分的半径为 r , 底部平面圆部分的半径为 R ; x_c, y_c, z_c 为刀具坐标系; 以点 C 为原点, x_c 轴为刀具进给方向, z_c 轴为曲面在点 C 处的法向, 按照右手法则建立刀触点局部坐标系 x_c, y_c, z_c ; 以环形刀中心为支点绕 y_c 轴旋转的角度 λ 为前倾角 (λ 的取值范围为 $[0, \pi/2]$), 再以点 C 为支点绕 z_c 轴旋转的角度 ω 为侧倾角 (ω 取值范围为 $[-\pi/2, \pi/2]$)。

环形刀的刀刃曲面在点 C 处主曲率为

$$\begin{cases} k_0 = \frac{1}{r} \\ k_{\pi/2} = \frac{\sin \lambda}{R + r \sin \lambda} \end{cases} \quad (15)$$

式中 k_0 ——圆环面沿走刀方向曲率

$k_{\pi/2}$ ——圆环面垂直走刀方向曲率

显然有 $k_0 > k_{\pi/2}$ 。假定 k_1^C, k_2^C 分别为曲面在点 C 处的最大、最小主曲率, 若需使刀具在任意方向都

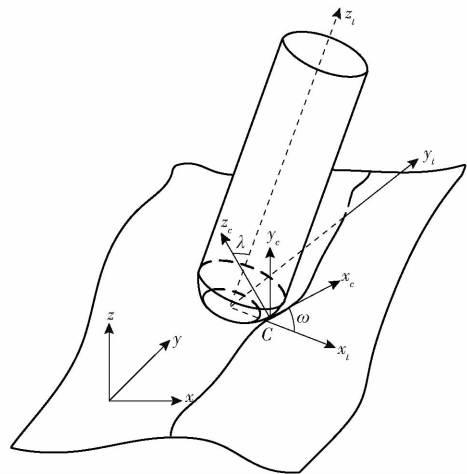


图 6 环形刀的刀具偏转模型

Fig. 6 Tool deflection model of toroidal cutter

不发生局部曲率干涉,应满足刀具曲面的曲率半径较大值小于或等于被加工曲面的曲率半径较小值,即刀具曲面的最小曲率 $k_{\pi/2}$ 应大于或等于被加工曲面最大主曲率 k_1^{CC} ,即 $k_{\pi/2} \geq k_1^{CC}$,联立式(15)可得此时环形刀的前倾角 λ 为

$$\lambda = \arcsin \frac{k_1^{CC} R}{1 - k_1^{CC} r} \quad (16)$$

调整好初始前倾角 λ 后,若 λ 过大,则加入侧倾角 ω 来控制 λ ,此时刀具有效切削半径计算式为

$$r_{eff} = \frac{Rr + r^2 \sin \lambda}{R + r \sin \lambda - R \cos^2 \omega} \quad (17)$$

将球头刀加工行距计算公式^[8]推广,最终可得倾斜状态下的环形刀加工行距计算式为

$$L = \frac{\pm r_p \sqrt{4 (r_p \pm r_{eff})^2 (r_p \pm h)^2 - [r_p^2 \pm 2r_{eff}r_p + (r_p \pm h)^2]^2}}{(r_p \pm h) (r_p \pm r_{eff})^2} \quad (18)$$

式中 r_p ——刀触点曲面沿行距方向的曲率半径
 h ——加工表面残留高度

当刀触点局部曲面为凸曲面时取“+”、凹曲面时取“-”。

设 (λ, ω) 为一条刀触点路径上的第 i 个刀触点处 $\{CC_{i,j} | i = 1, 2, \dots, n\}$ 的刀具姿态角组合。当给定刀具前倾角 $\lambda = \lambda_i$ 时,对每一个侧倾角 ω ,均可相应得到 1 种刀具姿态。由式(17)、(18)可知,不同刀具姿态角的组合 (λ, ω) 可以有不同刀具有效切削半径 r_{eff} ,进而就有不同的加工行距。将式(17)代入式(18),以 0.01° 为迭代精度同时改变 λ 与 ω ,可以得到图 7 所示刀具前倾角 λ 和刀具侧倾角 ω 的不同组合对加工行距 L 的定量影响关系,可见刀具姿态角组合对加工行距的影响关系整体呈抛物线形式,存在最佳刀具姿态角组合使得加工行距达到最

大值。

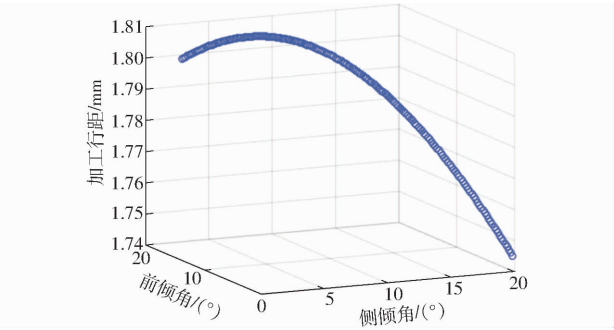


图 7 刀具姿态角组合对加工行距的定量影响

Fig. 7 Quantitative influence of tool attitude angle combination on path interval

对第 i 个刀触点,可以使用离散搜索的迭代方法,在实现加工行距最大的目标条件下,计算出相应的刀具前倾角与侧倾角的最佳组合 (λ_i, ω_i) ,使得

$$L(\lambda_i, \omega_i) = \max_{(\lambda, \omega) \in \Theta} \{L(\lambda, \omega)\} \quad (19)$$

式中 Θ ——刀具无干涉区域

本文加工行距的优化调整主要采用式(16)~(18)迭代计算的方法,选取迭代精度为 0.01° ,每次迭代减小 λ 的同时增大 ω ,以此搜寻求解刀具前倾角与侧倾角的最佳组合 (λ_i, ω_i) 。具体迭代求解过程如图 8 所示。

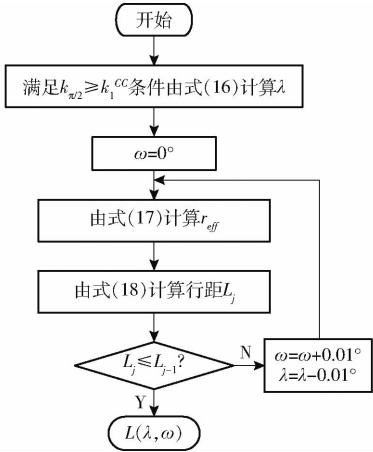


图 8 加工行距的优化调整流程图

Fig. 8 Optimization and adjustment flowchart of processing path interval

在下一条相邻刀具路径生成过程中,施加加工行距约束条件后,可能会产生一些位于三角面片内部的刀触点。由三角网格曲面特性可知,每个三角面片内的点所包含几何信息一致,所以为了去除冗余刀触点并减少计算量,需要对这些内部点 $\{C'_{i,j+1} | i = 1, 2, \dots, n\}$ 进行修正,如图 9 所示。最终选用位于网格线上的点 $\{C_{i,j+1} | i = 1, 2, \dots, n\}$ 作为下一条相邻刀触点路径上的数据点。

当刀具姿态角确定后,其在工件坐标系下的刀位点 C_L 和刀轴单位矢量 z_L 计算式为

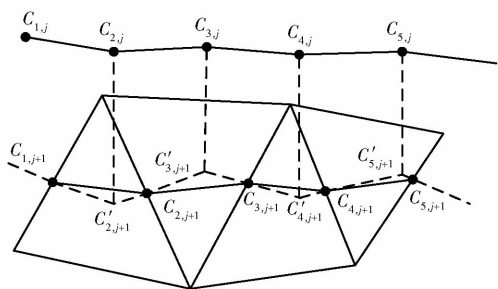


图 9 相邻刀触点冗余数据去除

Fig. 9 Removal of redundant data from adjacent cutter contacting points

$$\begin{cases} C_L = C - x_c R \cos \omega \cos \lambda - y_c R \sin \omega \cos \lambda + \\ z_c (r + R \sin \lambda) \\ z_t = x_c \cos \omega \sin \lambda + y_c \sin \omega \sin \lambda + z_c \cos \lambda \end{cases} \quad (20)$$

3 干涉处理及路径优化

五轴数控加工的干涉分为局部干涉和全局干涉,局部干涉包括由于刀具有效切削半径大于待加工曲面曲率半径引起的局部曲率干涉以及待加工曲面局部曲率变化较大而引起的局部刀底干涉;全局干涉则是刀杆与待加工曲面间的干涉。局部曲率干涉问题已在第 2 节中得以解决,而局部刀底干涉和全局干涉则需建立一种新的环形刀刀具离散模型进行干涉的检测与修正。

3.1 刀具离散模型建立

如图 10 所示, C_L 表示环形刀的刀心点,基于刀心点建立环形刀刀具坐标系 $C_L x_t y_t z_t$ 。在 $C_L x_t y_t$ 平面内,设任意方向与 x_t 轴的转角参数为 ϕ ;在刀刃圆环面的一个截平面 $C_L z_t x_t$ 内,设任意方向与 z_t 轴的转角参数为 τ 。建立环形刀刀刃圆环面部分在刀具坐标系 $C_L x_t y_t z_t$ 关于 ϕ 与 τ 的参数方程为

$$\partial(\phi, \tau) = \begin{bmatrix} (R + r \sin \tau) \cos \phi \\ (R + r \sin \tau) \sin \phi \\ r - r \cos \tau \end{bmatrix} \quad (\phi \in [0, 2\pi], \tau \in [0, \pi/2]) \quad (21)$$

由于刀触点一侧为切削区域,所以取远离刀触点一侧 $\phi \in [\pi/2, 3\pi/4], \tau \in [0, \pi/2]$ 区域为离散区域,记为 $\{q_i \in \mathbf{D}^3, 1 \leq i \leq n\}$ 。

如图 11 所示,刀杆部位离散建模时,为了提高干涉检测效率,以 z_t 方向为离散轴,离散精度 $\varepsilon = 0.1 \text{ mm}$,获得 $\{O_m | O_1, O_2, \dots, O_n\}$ 一系列离散点,离散点的个数 n 为

$$n = \text{round} \left(\frac{H - (R + r)}{2 \sqrt{(R + r)^2 - (R + r - \varepsilon)^2}} \right) + 1 \quad (22)$$

式中 H ——刀杆总长度

$\text{round}(\cdot)$ ——取整函数

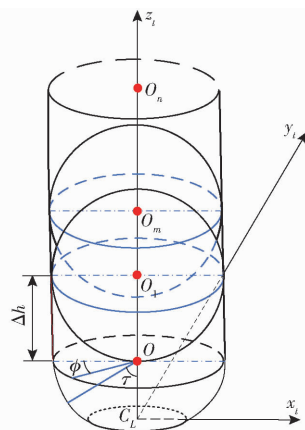


图 10 刀具离散模型

Fig. 10 Tool discrete model

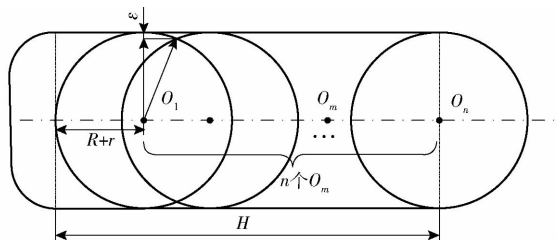


图 11 刀杆离散模型

Fig. 11 Discrete model of tool holder

刀杆离散点的第 1 个点 O_1 位于距刀刃圆环面顶端 $\Delta h = R + r$ 处、最后一个点 O_n 位于刀杆顶端。因干涉检测是在以每个离散点 O_m 为球心,刀杆半径 $R + r$ 为搜索半径的球状区域内检测,所以与第 1 个离散点 O_1 相对应的部分(即图 10 中刀杆 Δh 部分)则会检测不到,需要进行单独离散。这里对 Δh 所对应的刀杆圆环面部分仍按精度 ε 进行离散,可获得离散点集为 $\{rep_m | rep_1, rep_2, \dots, rep_n\}$,如图 12 所示的红色点云所示。

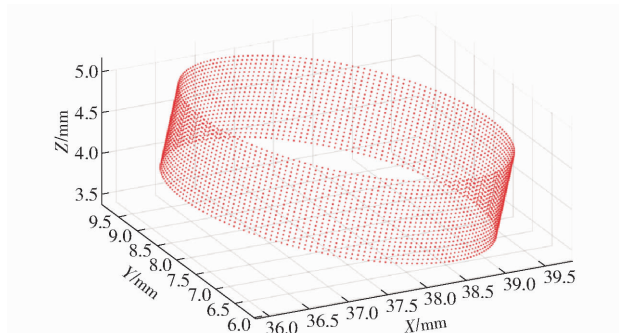


图 12 刀杆 Δh 部分圆环面的离散点集

Fig. 12 Discrete point set of torus of part Δh of tool holder

3.2 干涉检测与修正

干涉检测时,可通过待加工曲面的网格顶点是否落在刀具体内来判断当前位置是否发生干涉。

对刀刃圆环面部分的局部刀底干涉,本文提出干涉检测离散搜索算法为:

(1) 首先以圆环刀点 O 为查询点,以长度 $R + r$

为查询距离阈值,从构建的曲面 KdTree 数据集中使用范围搜索(Radius searches)查找所有与查询点距离小于阈值 $R + r$ 的数据点,记为 $\{p_i \in \mathbf{R}^3, 1 \leq i \leq n\}$ 。

(2) 设点 C_L 坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 对所有 $p_i(a, b, c)$ 选取满足条件 $a \leq x_0$ 的点为刀刃圆环面干涉侧的空间数据点集, 记为 Γ , 其空间表示如图 13 所示。

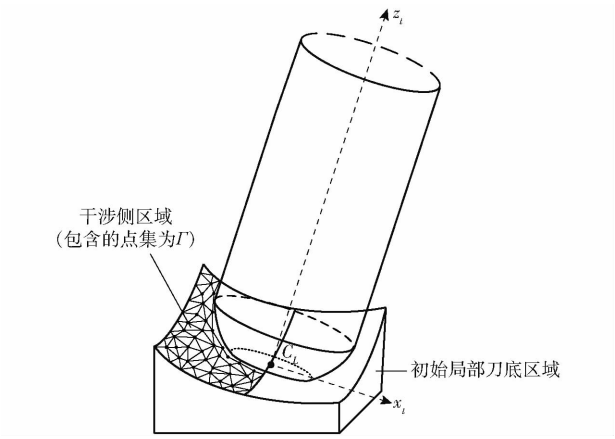


图 13 局部刀底干涉检测区域

Fig. 13 Local tool bottom interference detection area

(3) 取点集 Γ 中的一个点 $Q(a_1, b_1, c_1)$, 搜寻 $\{q_i(x, y, z) \in \mathbf{D}^3, 1 \leq i \leq n\}$ 中满足 $z - c_1 \leq \delta$ (δ 可以设置为给定值 0.1 mm), 确定 $\{q_i(x, y, z) \in \mathbf{D}^3, 1 \leq i \leq n\}$ 中 z 值与 $Q(a_1, b_1, c_1)$ 的 c_1 值最接近的所有点, 这些点将与 $Q(a_1, b_1, c_1)$ 处于同一水平高度, 形成如图 14 中红色椭圆线所示的点集 Ω 。

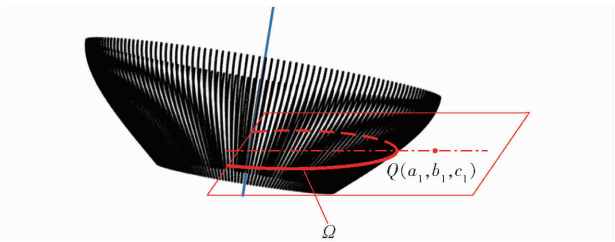


图 14 刀刃圆环面上与干涉检测点处于同一水平高度的点集

Fig. 14 Point set on torus of tool edge and interference detection point at the same level

若 Ω 中存在点满足 $x \leq c_1$ 且同时有 $b \in (y_{\min}, y_{\max})$ ($y_{\max}, y_{\min}$ 分别为 $\{q_i(x, y, z) \in \mathbf{D}^3, 1 \leq i \leq n\}$ 中 y 值的最大和最小值), 则该点 $Q(a_1, b_1, c_1)$ 可判定为一个干涉点。

(4) 重复执行步骤 (1) ~ (3), 最终可得到所有发生干涉的点的集合 Λ 。

对刀杆部分的全局干涉检测, 首先使用 Kd 范围搜索, 以 O_m 为查询点, $R + r$ 为阈值, 则小于阈值的点应为干涉点。由于每一搜索区域为球状, 所

以需要对刀杆未检测到的 Δh 部分进行补充干涉检测, 对该部分离散点集 $\{rep_m | rep_1, rep_2, \dots, rep_n\}$ 进行干涉检测的方法可参照局部刀底干涉检测方法。

关于干涉发生时修正处理的总体思路为: 当存在干涉点集 Λ 时, 先确定其中干涉量最大的点 p_i 及对应于 Ω 中的刀具离散点 q_i , 调整此时刀具前倾角 λ 和侧倾角 ω , 使该点的干涉量为 0 时为止, 以此避免刀具干涉的产生。记干涉点 $\{p_j\} (j=0, 1, 2, \dots, n) \in \Lambda$, 刀具离散点 $\{q_j\} (j=0, 1, 2, \dots, n) \in \Omega$, 其中最大干涉量为 ε_r , 则有

$$\varepsilon_r = \max_{1 \leq j \leq n} |p_j - q_j| \tag{23}$$

设刀具干涉修正后的刀具前倾角和侧倾角修正增量角分别为 λ' 和 ω' 。如图 15 所示, 黑实线刀具表示未进行干涉修正时的刀具姿态, 蓝实线刀具表示干涉修正之后的刀具姿态, φ 为矢量 $\mathbf{C}p_i$ 与矢量 $\mathbf{C}q_i$ 的夹角, 表示为避免干涉时刀具应绕刀触点 C 转过的增量角度。增量角 φ 计算式为

$$\varphi = \arccos \frac{\mathbf{C}p_i \mathbf{C}q_i}{|\mathbf{C}p_i| |\mathbf{C}q_i|} \tag{24}$$

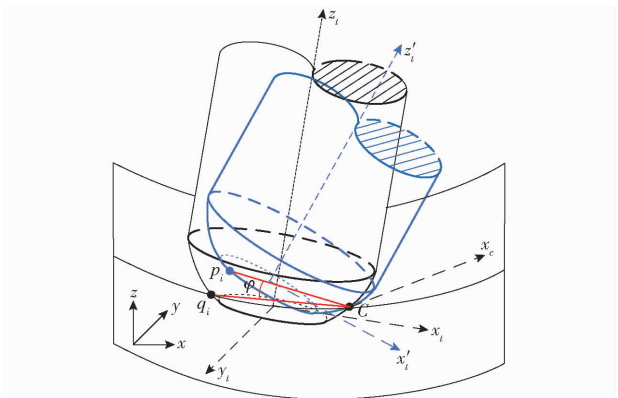


图 15 干涉角度修正

Fig. 15 Interference angle correction

图 15 中刀具在空间中的姿态由两个倾角 λ 与 ω 共同表示, 所以需要将增量角 φ 转换为刀具的两个增量倾角。依据为将增量角 φ 投影至刀具坐标系, 分别计算其在 $x_i z_i$ 平面内的分量 λ' 与 $x_i y_i$ 平面内的分量 ω' 。采用将构成增量角 φ 的边矢量 $\mathbf{C}p_i$ 与矢量 $\mathbf{C}q_i$ 直接投影到刀具坐标系的方法求取 λ' 与 ω' 。投影分解的计算过程为

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i \mathbf{z}_i \tag{25}$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_p = [\mathbf{z}_i (p_i - C)] \mathbf{z}_i \\ \mathbf{F}_q = [\mathbf{z}_i (q_i - C)] \mathbf{z}_i \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_p' = [\mathbf{y}_i (p_i - CC)] \mathbf{y}_i \\ \mathbf{F}_q' = [\mathbf{y}_i (q_i - CC)] \mathbf{y}_i \end{cases} \tag{27}$$

$$\lambda' = \arccos \frac{\mathbf{F}_p' \mathbf{F}_q'}{|\mathbf{F}_p'| |\mathbf{F}_q'|} \tag{28}$$

$$\omega' = \arccos \frac{\mathbf{F}_p \mathbf{F}_q}{|\mathbf{F}_p| |\mathbf{F}_q|} \quad (29)$$

3.3 本文方法技术路线

三角网格曲面环形刀五轴加工宽行距刀具路径生成及刀具干涉检测与修正方法技术路线如图 16 所示。

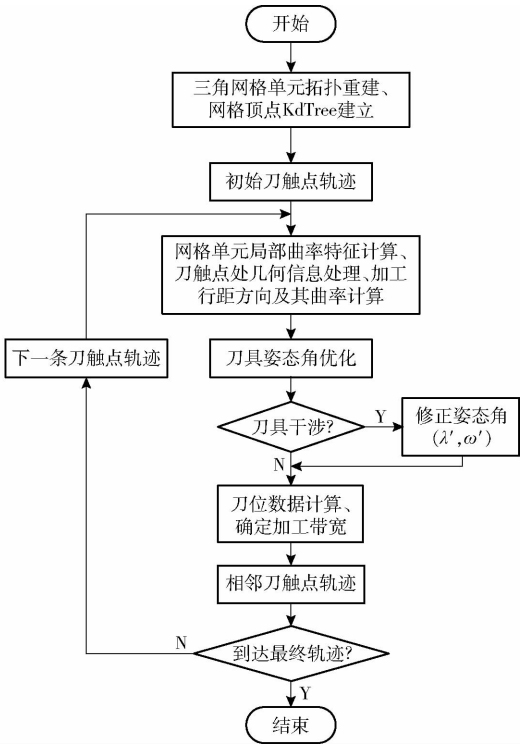


图 16 技术路线
Fig. 16 Technology roadmap

4 实例计算及数据对比

为了验证提出算法的有效性,使用如图 17a 所示 50 mm × 50 mm 的复杂曲面模型进行验证计算。可以看出该曲面模型同时具有凹面及凸面且曲率变化较大。通过编制的 Matlab 程序读取曲面模型的 STL 文件,经本文的拓扑关系重建算法建立的三角网格曲面模型如图 17b 所示,此三角网格模型一共包含 1 567 个顶点、2 994 个三角面片。

选取刀具参数为 $R = 1\text{ mm}$ 、 $r = 1\text{ mm}$ 的环形刀,及刀具参数为 $R = 2\text{ mm}$ 的球头刀,规定残留高度为 0.003 mm 。

图 18 为部分相邻的几条刀触点路径,取其中一条刀轨,其加工行距曲线如图 19 所示。由图 19 可以看出,本文方法获得的加工行距优化前后都优于球头刀加工时的行距,相比于截平面法,本文提出的加工行距优化方法,为了保证曲面每一处皆可加工到而选取当前刀轨上所有刀触点对应行距的最小值作为生成下一条刀轨的方法,可使原有的加工行距得以进一步增大,优化后行距最大提高了

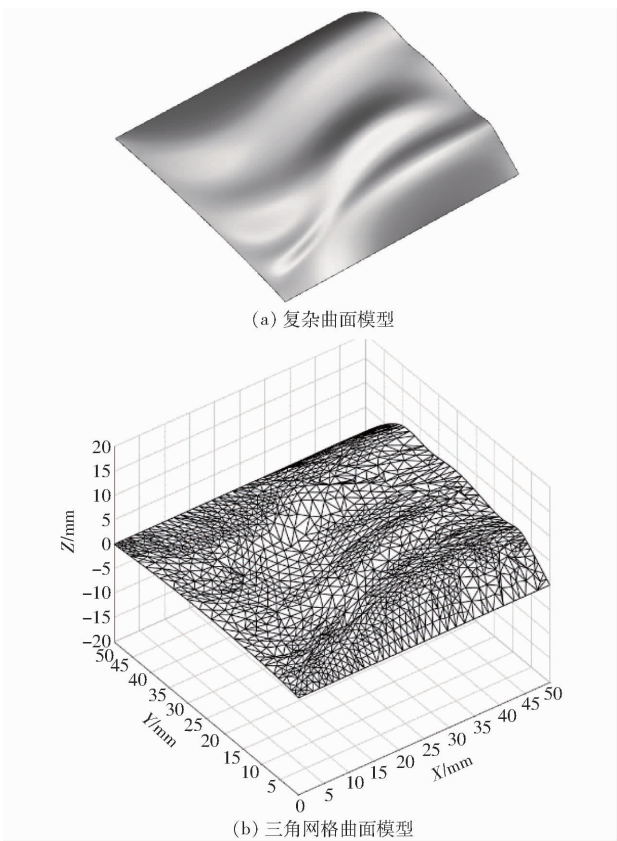


图 17 复杂曲面及其三角网格模型
Fig. 17 Complex surface and its triangular mesh model

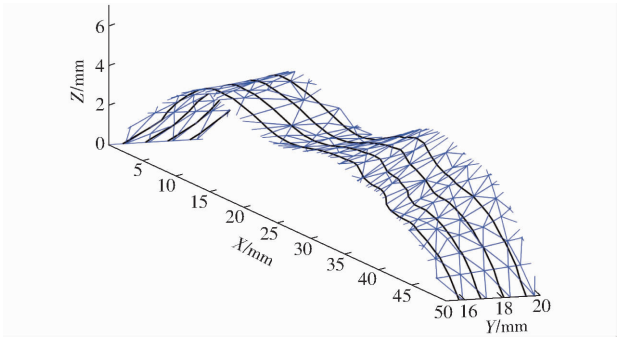


图 18 部分相邻刀触点路径
Fig. 18 Partially adjacent cutter contacting point path

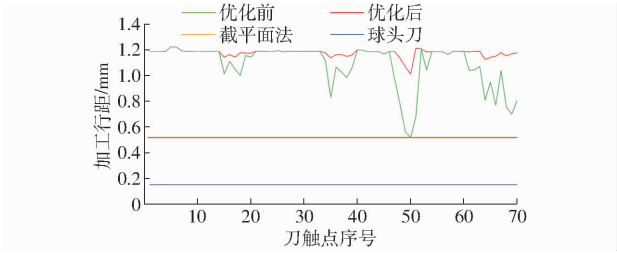


图 19 加工行距对比
Fig. 19 Comparison of path intervals

约 0.5 mm 。图 20 为加工行距优化前后前倾角和侧倾角的变化趋势,可以看出,在行距优化前没有侧倾角,仅根据无曲率干涉的约束条件设置了前倾角不大于某个临界角,结合图 19 可以发现,在加工行距较窄的区域,通过降低前倾角,相应的加大侧倾角使

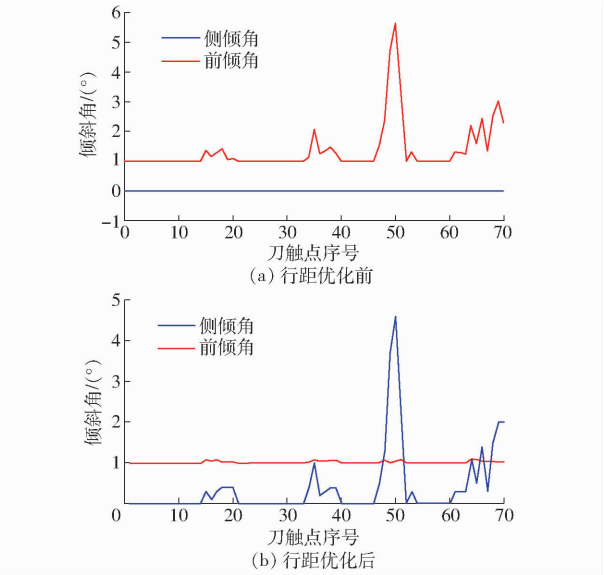


图 20 行距优化前后前倾角和侧倾角的变化曲线
Fig. 20 Change curves of tilt and inclination angle before and after path interval optimization

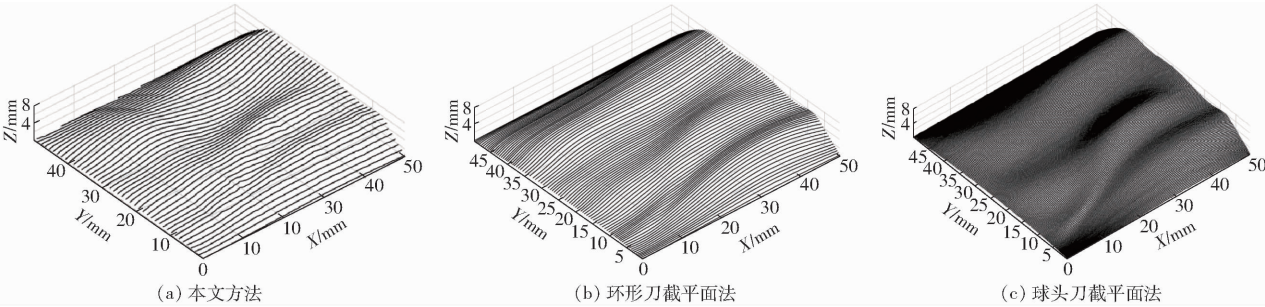


图 21 不同方法生成的刀触点路径
Fig. 21 CC point path generated by different methods

表 1 3 种方法的计算结果比较		
Tab. 1 Comparison of calculation results of three methods		
方法	刀轨数量	刀轨总长度/mm
本文方法	46	2 376
环形刀截平面法	89	4 836
球头刀截平面法	332	18 063

测方法,检测到该路径存在的部分干涉区域如图 22 中的红色区域所示。通过对此区域的一条刀触点路径(图 22 中的绿色路径)进行干涉修正处理,分别获得干涉修正后的刀具前倾角增量 λ' 及侧倾角增量 ω' ,如图 23 所示。干涉处理前后的前倾角及侧倾角曲线变化如图 24 所示。

修正前后该路径上一个点位修正效果如图 25 所示。由图 25a 可以看出,刀具与三角网格曲面发生了局部刀底干涉的情况,直接导致远离刀触点的刀具底部和已加工表面产生了切削接触;由图 25b 可以看出,远离刀触点的刀具底部已与曲面脱离了切削接触,进而避免了刀底干涉的发生。

为了验证本文算法的有效性,在相同条件下,使

刀具有效切削半径增大,进而达到加工行距变宽的目的。同时由图 18 的各刀触点路径可以看出,刀触点路径的连续性较好,可实现预期加工行距变宽的目标,能提高复杂曲面的加工效率。

使用本文方法生成的加工行距优化后的刀触点路径如图 21a 所示,使用改进的环形刀截平面法^[9]所生成的刀触点路径如图 21b 所示,而使用球头刀截平面法所生成的刀触点路径如图 21c 所示,可以看出本文方法所生成的刀触点路径的加工行距明显变宽。

3 种方法得到的刀触点路径的刀轨数量和刀轨总长度如表 1 所示。由表 1 可知,与加工三角网格曲面广泛使用的截平面法相比,本文方法加工效率有大幅度提升,而对比最常用的球头刀加工三角网格曲面的方法其加工效率更是达到了数倍的提升。

针对图 21a 的刀触点路径,通过本文的干涉检

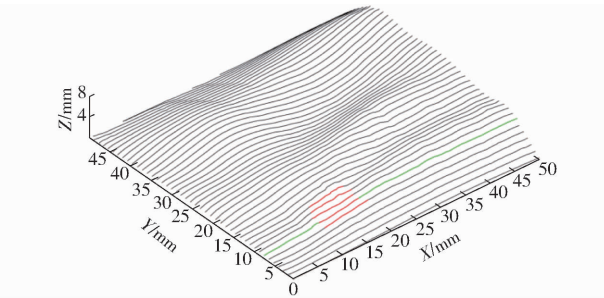


图 22 部分干涉区域
Fig. 22 Part of interference area

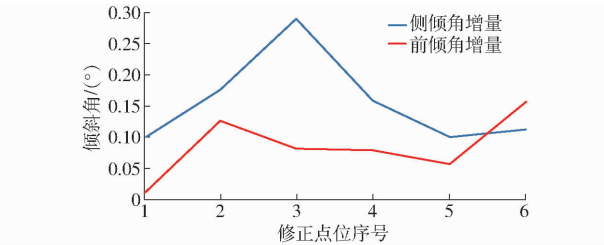


图 23 前倾角增量 λ' 及侧倾角增量 ω' 的变化曲线
Fig. 23 Change curves of tilt angle increment λ' and inclination angle increment ω'

用截平面法及本文方法通过精雕公司 JDGR400 A -

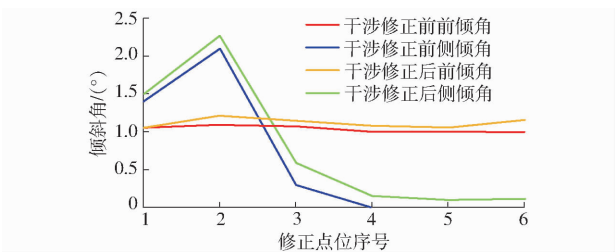


图 24 干涉修正前后的刀具姿态角变化曲线
Fig. 24 Change curves of tool attitude angle before and after interference correction

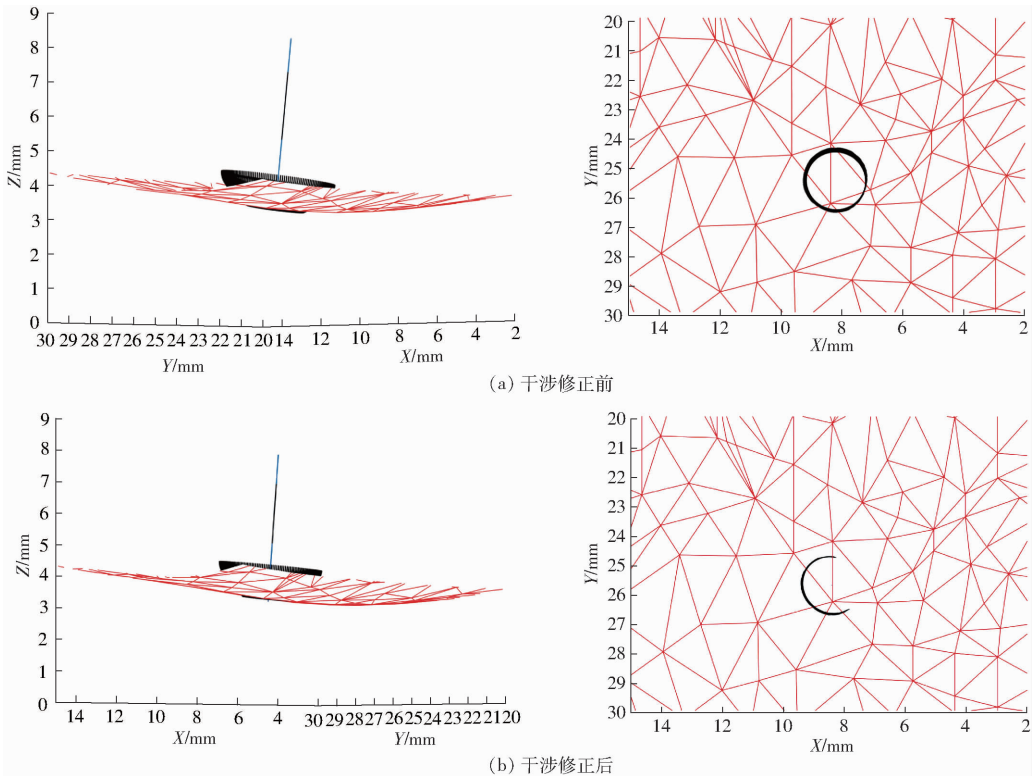


图 25 某干涉点处干涉修正前后效果对比
Fig. 25 Effect comparison before and after interference correction at an interference point

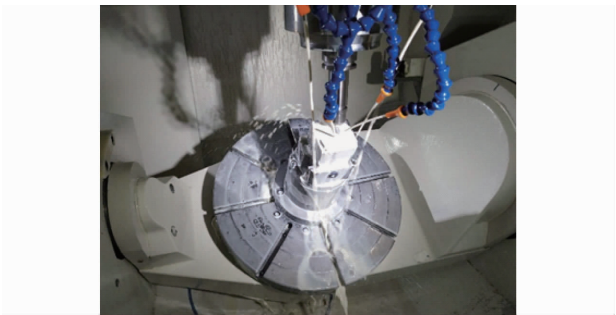


图 26 工件五轴切削加工过程
Fig. 26 Five-axis cutting process of workpiece

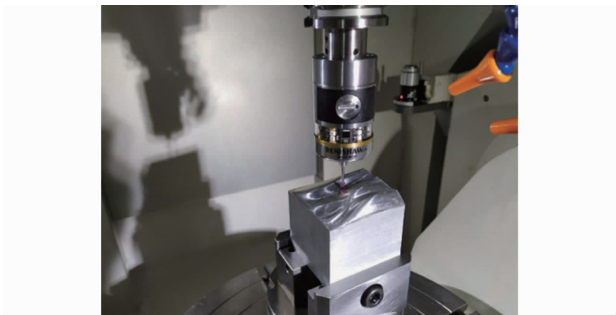


图 27 工件表面粗糙度检测
Fig. 27 Workpiece surface roughness detection

提下,相对传统的截平面加工方法,本文方法明显增加了加工行距,有利于缩短工件曲面五轴加工路径的总长度,可有效提高曲面五轴加工效率。

5 结论

(1) 针对三角网格文件生成的大量无序状离散

C 型双摆台结构五轴机床对硬铝合金材料进行加工 (图 26)。加工完成后,使用雷尼绍 OMP60 型测头对工件表面粗糙度进行检测 (图 27)。采用截平面法加工获得曲面加工件及其局部行距放大效果图 (图 28),经检测,该工件最大加工残高为 0.003 9 mm,局部行距为 0.56 mm。图 29 为使用本文方法加工获得的曲面加工件其局部行距放大效果图,其表面最大加工残高为 0.004 2 mm,局部行距为 1.03 mm。由此可见,在获得相近加工残高 (表面粗糙度) 的前

数据,对其进行了拓扑关系重建,同时提出了一种新的三角网格求交算法,该方法逻辑清晰、易于实现,且具有较易去除冗余数据的特点。

(2) 针对三角网格曲面不连续的特点,提出了一种基于 KdTree 搜索的刀具干涉检测及其修正的方法。



图 28 截平面法加工结果

Fig. 28 Cutting plane method processing result

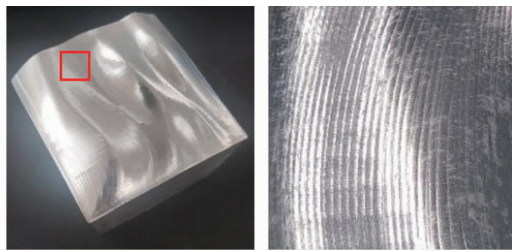


图 29 本文方法加工结果

Fig. 29 Processing results of the proposed method

(3) 针对环形刀的五轴加工,提出了一种可变行距的宽行加工刀具路径生成方法,该方法在保证

表面粗糙度、无刀具干涉的前提下,使加工行距变宽,进而提高了曲面五轴加工效率。

参 考 文 献

- [1] HONG Xinyu, HONG Rongjing, LIN Xiaochuan. Tool orientations' generation and nonlinear error control based on complex surface meshing[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2019, 105(10): 4279–4288.
- [2] 张应中, 谢馥香, 罗晓芳, 等. 采用半边编码的三角网格拓扑数据结构[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(2): 328–334.
ZHANG Yingzhong, XIE Fuxiang, LUO Xiaofang, et al. A topological data structure using coding of half-edges for triangle meshes[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2016, 28(2): 328–334. (in Chinese)
- [3] 巢海远, 刘景, 童晶, 等. 一种处理带有边界的非封闭 STL 模型的切片算法[J]. 计算机集成制造系统, 2015, 21(10): 2587–2595.
CHAO Haiyuan, LIU Jing, TONG Jing, et al. Slicing algorithm for non-closed STL model with border[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2015, 21(10): 2587–2595. (in Chinese)
- [4] 钱乘. 基于 STL 模型的复杂曲面加工刀具轨迹规划方法研究[D]. 芜湖: 安徽工程大学, 2019.
QIAN Cheng. Research on tool path planning method of complex surface machining based on STL model[D]. Wuhu: Anhui Polytechnic University, 2019. (in Chinese)
- [5] 陈晓兵, 廖文和, 戴宁. 三角网格曲面等参数线刀轨生成算法[J]. 中国机械工程, 2013, 24(8): 1047–1051.
CHEN Xiaobing, LIAO Wenhe, DAI Ning. An algorithm for constant scallop-height tool path generation for triangular mesh surface machining[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(8): 1047–1051. (in Chinese)
- [6] 陈甜甜, 赵罡. Loop 细分曲面精加工刀具轨迹生成[J]. 北京航空航天大学学报, 2015, 41(4): 663–668.
CHEN Tiantian, ZHAO Gang. Tool path generation for Loop subdivision surface based finish machining[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2015, 41(4): 663–668. (in Chinese)
- [7] ZHANG Zixian, FENG Yixiong, REN Bingyin, et al. Exploratory study of spiral NC tool path generation on triangular mesh based on local subdivision[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 83(5–8): 835–845.
- [8] 黄琴. 基于 Loop 细分的自适应刀具路径规划的研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2014.
HUANG Qin. Research on adaptive tool path generation technology based on Loop subdivision[D]. Changsha: Hunan University, 2014. (in Chinese)
- [9] 陈晓兵, 廖文和. 利用特征刀位点的三角网格表面 NURBS 刀轨生成[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2010, 22(9): 1587–1592.
CHEN Xiaobing, LIAO Wenhe. NURBS tool path generation using dominant cutter location points for triangular mesh surface machining[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2010, 22(9): 1587–1592. (in Chinese)
- [10] 杨旭静, 王小芳, 郑娟, 等. 基于包络面的网格曲面等残留高度路径规划[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2013, 40(10): 38–42.
YANG Xujing, WANG Xiaofang, ZHENG Juan, et al. Constant scallop-height tool path generation for mesh surface based on tool envelope surface[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2013, 40(10): 38–42. (in Chinese)
- [11] 徐金亭, 刘伟军, 卞宏友, 等. 基于网格曲面模型的等残留刀位轨迹生成方法[J]. 机械工程学报, 2010, 46(11): 193–198.
XU Jinting, LIU Weijun, BIAN Hongyou, et al. Constant scallop tool path for triangular surface machining[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(11): 193–198. (in Chinese)
- [12] XU Jinting, SUN Yuwen, WANG Shunke. Tool path generation by offsetting curves on polyhedral surfaces based on mesh flattening[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013, 64(9–12): 1201–1212.
- [13] 许都, 秦衡峰, 周后明. 基于三角网格曲面映射的数控高速加工刀轨规划[J]. 计算机集成制造系统, 2016, 22(10): 2371–2379.
XU Du, QIN Hengfeng, ZHOU Houming. CNC machining tool path panning based on triangular mesh surface mapping[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2016, 22(10): 2371–2379. (in Chinese)
- [14] WEN H, GAO J, XIANG K, et al. Cutter location path generation through an improved algorithm for machining triangular mesh[J]. Computer Aided Design, 2017, 87: 29–40.
- [15] 贺英, 陈志同, 吴献珍. 复杂曲面宽行加工等参数线刀轨精确搭接方法[J]. 航空学报, 2014, 35(4): 1142–1148.
HE Ying, CHEN Zhitong, WU Xianzhen. Iso-parametric tool path overlapping method for sculptured surfaces in wide strip machining[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2014, 35(4): 1142–1148. (in Chinese)
- [16] 刘胜兰, 周儒荣, 聂军洪, 等. 主曲率均匀的网格光顺[J]. 计算机学报, 2004, 27(1): 79–84.
LIU Shenglan, ZHOU Rurong, NIE Junhong, et al. Mesh smoothing using principal curvature flow[J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(1): 79–84. (in Chinese)
- [17] 尹业熙, 秦衡峰, 周后明. 基于定向距离理论的五轴加工刀具轨迹规划算法[J]. 中国机械工程, 2017, 28(22): 2681–2688.

- YIN Yexi, QIN Hengfeng, ZHOU Houming. Tool path planning algorithm of five axis machining based on directional distance theory[J]. China Mechanical Engineering, 2017,28(22):2681-2688. (in Chinese)
- [18] LIU Xu, LI Yingguang, MA Sibo, et al. A tool path generation method for freeform surface machining by introducing the tensor property of machining strip width[J]. Computer-Aided Design, 2015,66: 1-13.
- [19] 胡泽启,秦训鹏,吴锐,等. 五轴加工空间曲线示教编程技术[J]. 计算机集成制造系统, 2016,22(12):2836-2844.
HU Zeqi, QIN Xunpeng, WU Rui, et al. Teaching-programing technique for spatial curve of five-axis NC machining[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2016,22(12):2836-2844. (in Chinese)
- [20] 孙殿柱,范述鑫,李延瑞,等. 三角网格细分曲面数控加工刀轨快速生成算法[J]. 农业机械学报, 2009,40(3):218-221.
SUN Dianzhu, FAN Shuxin, LI Yanrui, et al. Algorithm of NC tool path generation for triangular meshing subdivision surface[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009,40(3):218-221. (in Chinese)
- [21] 张鹏翔,周凯,李学崑. 基于冗余联动的六轴联动数控机床加工轨迹误差优化[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(2): 411-419.
ZHANG Pengxiang, ZHOU Kai, LI Xuekun. Optimization of machining trajectory error based on redundant linkage in six-axis linkage CNC machine tool[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019,50(2):411-419. http://www.jcsam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20190247&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.02.047. (in Chinese)
- [22] 王贵,刘志兵,王西彬,等. 曲面高阶切触分析及其在曲面加工刀位规划中的应用[J]. 计算机集成制造系统, 2015, 21(5):1237-1243.
WANG Gui, LIU Zhibing, WANG Xibin, et al. Contact analysis of higher order curved surface and relevant application in tool path planning of surface machining[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2015, 21(5):1237-1243. (in Chinese)
- [23] JEAN-MAX R, SONIA D, STÉPHANE S, et al. Study of the effective cutter radius for end milling of free-form surfaces using a torus milling cutter[J]. Computer-Aided Design, 2013,45(6): 951-962.
- [24] 范立成,杜志江,孙立宁. 三轴摆动磨削雕刻曲面刀具轨迹生成算法[J]. 计算机集成制造系统, 2008,14(7):1417-1420.
FAN Licheng, DU Zhijiang, SUN Lining. Tool-path generation algorithm of sculptured surface by 3-axis swing grinding[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2008,14(7):1417-1420. (in Chinese)
- [25] 丁汉,毕庆贞,朱利民,等. 五轴数控加工的刀具路径规划与动力学仿真[J]. 科学通报, 2010,55(25):44-53.
DING Han, BI Qingzhen, ZHU Limin, et al. Tool path planning and dynamic simulation of five axis NC machining[J]. Chinese Science Bulletin, 2010,55(25):44-53. (in Chinese)

(上接第 385 页)

- [19] 许允斗,郭金伟,王志峰,等. 线矢力各向同性分析与其在机构构型综合中的应用[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(1): 406-411.
XU Yundou, GUO Jinwei, WANG Zhifeng, et al. Isotropic analysis of line vector forces and its application in type synthesis of mechanisms[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019,50(1):406-411. http://www.jcsam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20190147&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.01.047. (in Chinese)
- [20] BOUDREAU R, MAO X, PODHODESKI R. Backlash elimination in parallel manipulators using actuation redundancy[J]. Robotica, 2011, 30(3): 379-388.
- [21] SAGLIA J A, TSAGARAKIS N G, DAI J S, et al. A high-performance redundantly actuated parallel mechanism for ankle rehabilitation[J]. International Journal of Robot Research, 2009, 28(9): 1216-1227.
- [22] AYAS M S, ALTAS I H. Fuzzy logic based adaptive admittance control of a redundantly actuated ankle rehabilitation robot[J]. Control Engineering Practice, 2017, 59: 44-54.
- [23] ZHANG D, GAP Z. Forward kinematics, performance analysis, and multi-objective optimization of a bio-inspired parallel manipulator[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2012, 28(4): 484-492.
- [24] ZHANG D, LEI J. Kinematic analysis of a novel 3-DOF actuation redundant parallel manipulator using artificial intelligence approach[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2011, 27(1): 157-163.
- [25] ZHAO Yongjie, GAO Feng. Dynamic formulation and performance evaluation of the redundant parallel manipulator[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2009, 25(4-5): 770-781.
- [26] BEDOUSTANI Y B, TAGHIRAD H D, AREF M M. Dynamics analysis of a redundant parallel manipulator driven by elastic cables[C]//10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Hanoi, Vietnam, 2008.
- [27] JIANG Yao, LI Tiemin, WANG Liping. The dynamic modeling, redundant-force optimization, and dynamic performance analyses of a parallel kinematic machine with actuation redundancy[J]. Robotica, 2015, 33(2): 241-263.
- [28] LIANG Dong, SONG Yimin, SUN Tao, et al. Optimum design of a novel redundantly actuated parallel manipulator with multiple actuation modes for high kinematic and dynamic performance[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 83(1-2): 631-658.
- [29] FONTES J V, SILVA M M. On the dynamic performance of parallel kinematic manipulators with actuation and kinematic redundancies[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 103: 148-166.
- [30] LIU Xiaofei, YAO Jiantao, XU Yundou, et al. Research of driving force coordination mechanism in parallel manipulator with actuation redundancy and its performance evaluation[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 90(2): 983-998.