

基于绝对节点坐标法的空间并联机构刚柔耦合动力学建模

陈修龙 崔梦强

(山东科技大学机械电子工程学院, 青岛 266590)

摘要: 为研究柔性杆件对空间并联机构动力特性的影响,以具有结构冗余的 3-RRPaR 空间并联机构为研究对象,提出建立冗余空间并联机构刚柔耦合动力学模型的通用方法。基于绝对节点坐标法建立了三维二节点梁单元模型,分析了机构的结构特征,利用拉格朗日乘子法推导了机构的刚柔耦合动力学方程,采用广义 α 方法在 Matlab 中对其动力学方程进行数值求解,得到不同弹性模量下的动力学响应曲线。结果表明,柔性杆件对机构输出特性产生重要的影响,弹性模量越小,对机构的影响越大,且弹性模量对动平台加速度的影响最为显著。本研究为空间并联机构的刚柔耦合动力学建模提供了研究思路。

关键词: 空间并联机构; 绝对节点坐标法; 拉格朗日乘子法; 刚柔耦合动力学

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2021)04-0392-10

OSID:



Rigid Flexible Coupling Dynamic Modeling of Spatial Parallel Mechanism Based on Absolute Node Coordinate Formulation

CHEN Xiulong CUI Mengqiang

(College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: In order to study influence of flexible rod on the dynamic characteristics of the spatial parallel mechanism, the 3-RRPaR spatial parallel mechanism with structural redundancy was taken as the research object, and a general method for establishing rigid flexible coupling dynamic model of redundant spatial parallel mechanism was proposed. A three-dimensional two node beam element model was established based on the absolute node coordinate method. The structural characteristics of the mechanism were studied, and the rigid flexible coupling dynamical equation of the mechanism was derived by Lagrange multiplier method. The generalized α method was used to solve the dynamic equation in Matlab, and the dynamical responses curves of the mechanism under different elastic modulus were obtained. It can be concluded that the flexible rod had an important influence on the output characteristics of the mechanism. The smaller the elastic modulus was, the greater the influence on the mechanism was, and the impact on the acceleration of the moving platform was the most significant. The research can provide a modeling method and idea for other rigid flexible coupling dynamics of other spatial parallel mechanisms, and also can lay a foundation for the dynamic modeling of the mechanism considering joint clearance and flexible rod at the same time.

Key words: spatial parallel mechanism; absolute node coordinate formulation; Lagrange multiplier method; rigid flexible coupling dynamics

0 引言

并联机构具有工作精度高、末端执行器灵敏性好、负载能力强等优点,故而广泛应用于精密制造业和空间机械手等领域^[1-5]。随着机器人技术的不断

进步,对其设备创新性提出了更高的要求。具备结构冗余的空间并联机构可以较好地提高其机构刚度^[6],但在其高速运动时,并联机构中支链的弹性变形会产生系统振动、内应力增大和运动精度降低等不良影响^[7-9]。

近年来,众多学者采用不同建模方法对并联机构的动力学性能进行了研究,柔性杆件的弹性变形问题对机构动力学的影响已成为机构学的研究热点^[10-14]。王宗平等^[15]提出具有六自由度的 6PSS 并联机构,基于拉格朗日方程并利用差商求导方式建立了机构的刚体动力学模型,并分析了运动学和动力学中各参数的变化。陈修龙等^[16]基于牛顿欧拉法建立了 4-UPS-UPU 空间机构的动力学模型,分析了相关支链的受力情况,最后通过虚拟样机验证了 Matlab 理论结果的正确性。ZHANG 等^[17]基于有限元描述了柔性杆件梁单元模型,并通过拉格朗日法建立了考虑柔性杆件的动力学方程,采用一次迭代的方式求解其方程,并研究了弹性振动对机构的影响。WANG 等^[18]根据并联机构刚柔耦合的特点,基于有限元法通过离散柔性构件得到梁单元模型,然后利用 KED 法对 3PRR 平面并联机构的动力学方程进行组合装配,研究了其末端构件的运动特性。YU 等^[19]利用 ANSYS Workbench 软件对一种八连杆机构进行了刚柔耦合动力学分析,研究了柔性构件对机构传动特性曲线的影响,对轴孔尺寸进行优化发现,主连杆处的最大等效应力明显降低。LIU 等^[20]以空间三连杆焊接机器人为研究对象,基于拉格朗日法建立了刚柔耦合动力学模型,分析了柔性关节处不同刚度系数对焊接机器人运动精度的影响,结果表明,系统累积误差与运动轨迹有关。YAN 等^[21]提出一种用于臂架大范围回转运动和弹性振动的混合坐标模型,运用初应力法建立了钢丝绳的刚度矩阵,对超长柔性臂的动力学研究表明,随着载荷的增大,其偏航角的周期和幅值也相应增大。CHEN 等^[22]结合 ANSYS 和 ADAMS 对 2PRR 平面并联机构进行刚柔耦合动力学仿真,结果验证了模型运动学和动力学正逆解的正确性,最后还研究了柔性杆件对从、动滑块运动特性的影响。姜振海等^[23]采用绝对节点坐标方法(ANCF)推导了平面 3RRR 并联机构考虑柔性杆件的动力学方程,利用直接积分方法(BDF)对方程进行求解,发现柔性构件的弹性变形对动平台影响很大,同时还发现主动杆件比从动杆变形严重。XING 等^[24]研究了 6PSS 并联机构刚柔耦合的动力学特性,结合 ADAMS 和 ANSYS 对机构进行运动仿真求解,将得到的响应曲线和机构动力学模型结果进行相互验证,证明了模型的正确性。

上述弹性动力学的研究对象大多数为串联机构和平面并联机构,而对于具有结构冗余的空间并联机构的建模分析研究较少。本文以具有结构冗余 3-RRPaR 空间并联机构为研究对象,基于绝对节点

坐标法建立柔性梁单元模型,利用拉格朗日乘子方法推导机构的刚柔耦合动力学方程,并通过广义 α 方法求解其动力学方程,以分析构件材料的弹性模量对机构动力学的影响。

1 基于 ANCF 方法的梁单元模型

1.1 ANCF 梁单元空间模型

采用三维二节点的梁单元模型对柔性杆件进行建模,其中梁单元模型如图 1 所示,图中 $OXYZ$ 为系统坐标系;梁单元的两端节点分别为点 i 和点 j ; $\mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{r}_j$ 分别为单元两节点在 $OXYZ$ 下的位置矢量。

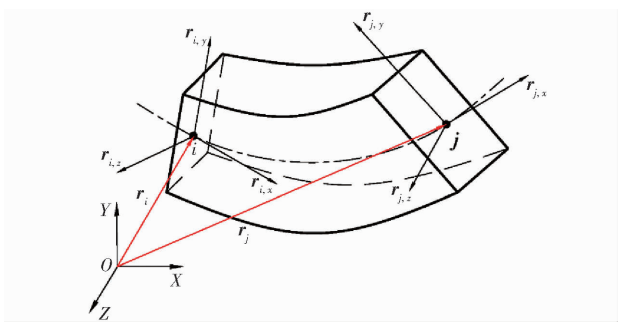


图 1 梁单元模型

Fig. 1 Beam element model

该模型通过插值法可得出单元上随机一点的位置坐标(位移场)为

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 + m_1x + m_2y + m_3z + m_4xy + m_5xz + m_6x^2 + m_7x^3 \\ n_0 + n_1x + n_2y + n_3z + n_4xy + n_5xz + n_6x^2 + n_7x^3 \\ c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz + c_6x^2 + c_7x^3 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(x, y, z) \mathbf{e}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{e} = [\mathbf{r}_i^T \quad \mathbf{r}_{i,x}^T \quad \mathbf{r}_{i,y}^T \quad \mathbf{r}_{i,z}^T \quad \mathbf{r}_j^T \quad \mathbf{r}_{j,x}^T \quad \mathbf{r}_{j,y}^T \quad \mathbf{r}_{j,z}^T]^T \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{r}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial \beta} = \left[\frac{\partial r_{\alpha,1}}{\partial \beta} \quad \frac{\partial r_{\alpha,2}}{\partial \beta} \quad \frac{\partial r_{\alpha,3}}{\partial \beta} \right]^T$$

$$(\alpha = i, j; \beta = x, y, z)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{s}_8] \otimes \mathbf{I}_3 \quad (3)$$

$$\mathbf{s}_1 = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3$$

$$\mathbf{s}_2 = l(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3)$$

$$\mathbf{s}_3 = l(\psi - \zeta\psi) \quad \mathbf{s}_4 = l(\xi - \zeta\xi)$$

$$\mathbf{s}_5 = 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \quad \mathbf{s}_6 = l(-\zeta^2 + \zeta^3)$$

$$\mathbf{s}_7 = l\zeta\psi \quad \mathbf{s}_8 = l\zeta\xi$$

$$\zeta = x/l \quad \psi = y/l \quad \xi = z/l$$

式中 m_i, n_i, c_i ——插值系数, $i = 0, 1, \dots, 7$

$\mathbf{S}$ ——梁单元形函数

$\mathbf{e}$ ——梁单元节点坐标

- ⊗——克罗内克积运算符
- I_3 ——三阶单位矩阵
- l ——梁单元变形前长度

从式(2)可看出,梁单元的广义坐标个数共有24个,分别由节点处的位置坐标和描述3个方向的坐标矢量组成。

1.2 单元质量矩阵

梁单元质量矩阵可通过其动能求出,在计算梁单元动能前需求出其单元任一点的速度,计算式为

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{S} \dot{\boldsymbol{e}} \tag{4}$$

其动能计算式为

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{\boldsymbol{r}}^T \dot{\boldsymbol{r}} dV_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{S} \dot{\boldsymbol{e}} dV_e = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{M}_e \dot{\boldsymbol{e}} \tag{5}$$

其中
$$\boldsymbol{M}_e = \rho \int_{V_e} \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{S} dV_e \tag{6}$$

式中 V_e ——单元体积

ρ ——杆件材料密度

$\boldsymbol{M}_e$ ——单元质量矩阵

1.3 单元广义弹性力

如图2所示,当点 P_0 通过一段距离 u 后到点 P ,根据连续介质力学^[25]相关知识可得到变形梯度 $\boldsymbol{J}$ 表达式为

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{r}_0} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial \boldsymbol{v}} \right)^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{v}} \boldsymbol{J}_0^{-1} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{S} \boldsymbol{e}_0$

式中 $\boldsymbol{r}_0$ ——变形体运动前点 P_0 的位置矢量

$\boldsymbol{e}_0$ ——梁单元在初始状态下的位置坐标向量

$\boldsymbol{J}_0$ ——单位矩阵

$\boldsymbol{v}$ ——单元坐标系下的位置矢量

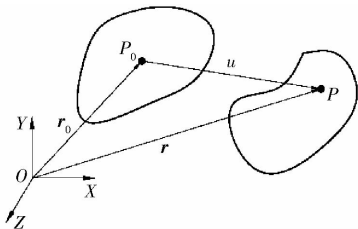


图2 变形体的一般运动过程示意图
Fig.2 Schematic diagram of general motion of deformable body

图3所示单元坐标系与系统坐标系重合时,可得到用右柯西-格林表达的变形张量为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{J}^T \boldsymbol{J} \tag{8}$$

可推导得拉格朗日应变张量为

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \frac{1}{2} (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}_3) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_a \boldsymbol{e} - 1 & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_d \boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_e \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_b \boldsymbol{e} - 1 & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_f \boldsymbol{e} & \\ \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{S}_c \boldsymbol{e} - 1 & & \end{bmatrix} \tag{9}$$

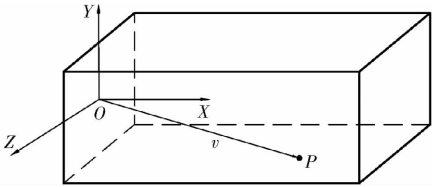


图3 单元局部坐标系中质点的位置矢量
Fig.3 Position vector of particle in local coordinate system of element

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_a &= \sum_{\alpha=1}^3 \boldsymbol{S}_{\alpha,x}^T \boldsymbol{S}_{\alpha,x} & \boldsymbol{S}_b &= \sum_{\alpha=1}^3 \boldsymbol{S}_{\alpha,y}^T \boldsymbol{S}_{\alpha,y} \\ \boldsymbol{S}_c &= \sum_{\alpha=1}^3 \boldsymbol{S}_{\alpha,z}^T \boldsymbol{S}_{\alpha,z} & \boldsymbol{S}_d &= \sum_{\alpha=1}^3 \boldsymbol{S}_{\alpha,x}^T \boldsymbol{S}_{\alpha,y} \\ \boldsymbol{S}_e &= \sum_{\alpha=1}^3 \boldsymbol{S}_{\alpha,x}^T \boldsymbol{S}_{\alpha,z} & \boldsymbol{S}_f &= \sum_{\alpha=1}^3 \boldsymbol{S}_{\alpha,y}^T \boldsymbol{S}_{\alpha,z} \\ \boldsymbol{S}_{\alpha,\beta} &= \partial \boldsymbol{S}_{\alpha} / \partial \beta \quad (\beta = x, y, z) \end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{S}_{\alpha}$ ——形函数矩阵的第 α 行元素, $\alpha = 1, 2, 3$
为了便于后续积分计算,将式(9)应变张量转换成向量表达形式为

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = [\boldsymbol{\epsilon}_{11} \quad \boldsymbol{\epsilon}_{22} \quad \boldsymbol{\epsilon}_{33} \quad 2\boldsymbol{\epsilon}_{12} \quad 2\boldsymbol{\epsilon}_{13} \quad 2\boldsymbol{\epsilon}_{23}]^T \tag{10}$$

通过式(10)推导出梁单元的弹性变形能为

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{\epsilon} dV_e \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ ——构件材料的弹性常数矩阵

对单元变形能求导可得到单元弹性力为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_e &= - \frac{\partial U_e}{\partial \boldsymbol{e}} = \\ &= - \int_{V_e} \left(\frac{\lambda + 2G}{2} \sum_{i=1, i=j}^3 2\boldsymbol{\epsilon}_{i,j} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{i,j}}{\partial \boldsymbol{e}} + \right. \\ &\quad \left. \lambda \sum_{\substack{i=1, i=j, i \neq \alpha \\ \alpha=1, \alpha=\beta}}^3 \boldsymbol{\epsilon}_{i,j} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{\alpha,\beta}}{\partial \boldsymbol{e}} + 2G \sum_{i=1, j>i}^3 2\boldsymbol{\epsilon}_{i,j} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{i,j}}{\partial \boldsymbol{e}} \right) dV_e = \\ &= - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{e}) \boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{i,j}}{\partial \boldsymbol{e}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{S}_{,i}^T \boldsymbol{S}_{,j} + \boldsymbol{S}_{,j}^T \boldsymbol{S}_{,i}) \boldsymbol{e} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \leq j)$

式中 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{e})$ ——单元弹性力刚度矩阵,非常数矩阵,具有时变性

1.4 单元广义外力

外力 $\boldsymbol{F}$ 作用在单元上任意一点时,可通过虚功原理求得该点的力 $\boldsymbol{F}$ 对单元所做的虚功为

$$\delta W_e = \boldsymbol{F}^T \delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{S} \delta \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{Q}_e^g)^T \delta \boldsymbol{e} \tag{13}$$

通过式(13)可得系统坐标系 $OXYZ$ 下沿 X 轴正方向的重力的一般表达式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_e^g &= \rho \int_{V_e} [g \quad 0 \quad 0] \boldsymbol{S} dV_e = \\ &= m_e g \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{l}{12} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{l}{12} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \end{aligned} \tag{14}$$

式中 m_e ——梁单元质量

2 刚柔耦合动力学模型

2.1 自由度分析

如图 4 所示,该机构由定平台、3 条型式相同的支链和动平台组成,其中每条支链包括主动臂和具有平行四边形构型的从动臂,可以看出该机构具有结构冗余,有利于增大机构运作过程中构件的刚度,提高稳定性。选择修正的 Grubler - Kutzbach 公式^[26]计算自由度 P ,计算式为

$$P = 6(n - m - 1) + \sum_{i=1}^m f_i + s \tag{15}$$

式中 n ——机构构件总数,取 17
 m ——机构运动副总数,取 21
 f_i ——第 i 个运动副的自由度
 s ——冗余约束个数,取 12

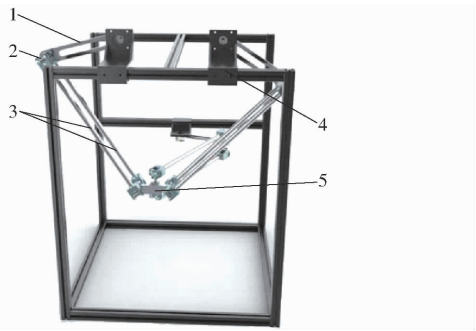


图 4 3-RRPa 空间并联机构的三维模型

Fig. 4 Three dimensional model of 3-RRPa spatial parallel mechanism

1. 主动臂 2. 转动副 3. 转动臂 4. 定平台 5. 动平台

将各个参数数值代入式(15)中,可求得本机构自由度为 3,且均是移动方向。

2.2 约束方程

多体系统的约束方程需要根据运动副种类的不同建立相关的位置及方向约束,每个运动副相邻的两构件需要在其自身建立局部坐标系以便描述其在空间的位置及姿态。由于本机构运动副均为转动副,故刚性构件用自然坐标法(NCF)描述,柔性构件采用 ANCF 描述,其机构简图如图 5 所示,以此确定每个构件在系统坐标系下的位姿。

该并联机构由主动臂作为驱动构件,为了便于约束方程的建立及后续的计算仿真,主动臂采用质心坐标法描述,其中一条由定平台上一点到动平台上一点组成的支链的坐标命名,如图 6 所示,可知机构广义坐标为

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_N, \boldsymbol{q}_e) \tag{16}$$

式中 $\boldsymbol{q}_N = (O_{i1}, O_{i2}, O_{i3}, O_{i4}, O_{i5}, O'_i) \ (i = 1, 2, 3)$, 主动臂坐标包含 6 个广义坐标,其他均为 3 个广义坐

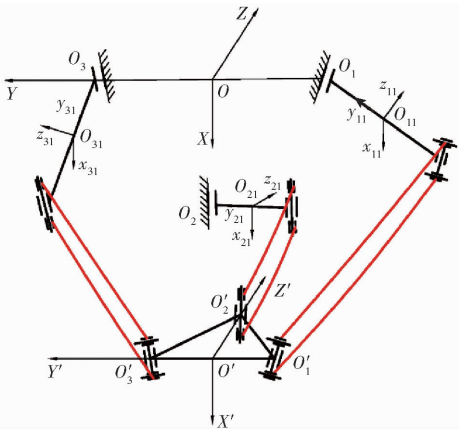


图 5 3-RRPa 空间并联机构刚柔耦合结构简图
Fig. 5 Structure diagram of rigid flexible coupling of 3-RRPa spatial parallel mechanism

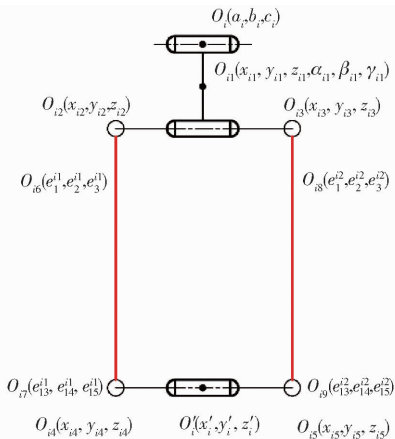


图 6 单支链坐标命名示意图

Fig. 6 Schematic of coordinate naming of single branch chain

标; $\boldsymbol{q}_e = (O_{i6}, O_{i7}, O_{i8}, O_{i9}) \ (i = 1, 2, 3)$, 每个节点的广义坐标个数均为 12,故该机构一共有 207 个广义坐标,但为了方便描述广义坐标与自由度的关系,取节点的前 3 个位置坐标作为约束广义坐标,可以看出该并联机构一共有 99 个约束广义坐标。

本机构共有 3 个移动自由度,因此建立线性无关的约束方程 96 个,以及 3 个驱动约束。 $O_i(a_i, b_i, c_i) \ (i = 1, 2, 3)$ 是定平台上的 3 个固定点,主动臂处的转动副约束为

$$\boldsymbol{\Phi}_{1i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{i1} + \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{O}_i \\ \boldsymbol{\alpha}_{i1} \\ \boldsymbol{\beta}_{i1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_{5 \times 1} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{2i} = \boldsymbol{O}_{i2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_s/2 \end{bmatrix} - 2\boldsymbol{O}_{i1} - \boldsymbol{O}_i = \boldsymbol{O}_{3 \times 1} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{3i} = \boldsymbol{O}_{i3} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_s/2 \end{bmatrix} - 2\boldsymbol{O}_{i1} - \boldsymbol{O}_i = \boldsymbol{O}_{3 \times 1} \tag{19}$$

其中 $\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos\gamma_{i1} & -\sin\gamma_{i1} & 0 \\ \sin\gamma_{i1} & \cos\gamma_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{i1}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

式中 $\mathbf{R}_i$ ——第 i 个支链主动臂变换矩阵
 l_{i1} ——第 i 个支链主动臂杆长
 $\mathbf{O}$ ——零矩阵

对于刚性构件与柔性构件的约束,可采用对应节点重合的形式进行约束,即

$$\Phi_{4i} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{i2} - \mathbf{O}_{i6} \\ \mathbf{O}_{i3} - \mathbf{O}_{i8} \\ \mathbf{O}_{i4} - \mathbf{O}_{i7} \\ \mathbf{O}_{i5} - \mathbf{O}_{i9} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{12 \times 1} \tag{20}$$

$$\Phi_{5i} = [\mathbf{O}_{i3} - \mathbf{O}_{i2}]^T (\mathbf{A}_i [0, 0, 1]^T) = \mathbf{O}_{1 \times 1} \tag{21}$$

$$\Phi_{6i} = \mathbf{O}_{i4} - \mathbf{O}'_i - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_s/2 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{3 \times 1} \tag{22}$$

$$\Phi_{7i} = \mathbf{O}_{i5} - \mathbf{O}'_i - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_s/2 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{3 \times 1} \tag{23}$$

式中 $\mathbf{A}_i$ ——柔性杆件的变换矩阵^[27]

根据动平台的几何特性利用 NCF 法建立三角板单元,其约束方程为

$$\Phi_{b1} = \mathbf{O}'_2 - \mathbf{O}'_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{3 \times 1} \tag{24}$$

$$\Phi_{b2} = \mathbf{O}'_3 - \mathbf{O}'_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 2w_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{3 \times 1} \tag{25}$$

该并联机构通过运动学反解可求出每条支链大臂的运动函数,可建立其驱动方程的约束为

$$\Phi_d = \begin{bmatrix} \gamma_{11} - \theta_1 \\ \gamma_{21} - \theta_2 \\ \gamma_{31} + \theta_3 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{3 \times 1} \tag{26}$$

式中 θ_i ——关于时间的驱动函数, $i = 1, 2, 3$

由式(17)~(26)可组成 3-RRPaR 并联机构刚柔耦合的约束方程为

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}^T & \Phi_{21}^T & \cdots & \Phi_{71}^T & \Phi_{12}^T & \Phi_{22}^T & \cdots & \Phi_{72}^T \\ \Phi_{13}^T & \Phi_{23}^T & \cdots & \Phi_{73}^T & \Phi_{b1}^T & \Phi_{b2}^T & \cdots & \Phi_d^T \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{99 \times 1} \tag{27}$$

2.3 质量矩阵

质量矩阵是反映构件在空间中质量分布的最佳方法,是构建机构动力学方程不可或缺的一部分。质量矩阵为常数矩阵时可提高仿真计算效率,故该

并联机构采用 NCF 和 ANCF 方法对构件进行描述,并且柔性构件的常数质量矩阵没有离心力和科氏力。

对于主动臂采用常见的质心坐标方法进行描述,故其质量矩阵为

$$\mathbf{M}_k = \text{diag}(m_k, m_k, m_k, I_{kx}, I_{ky}, I_{kz}) \quad (k = 1, 6, 11) \tag{28}$$

对于 NCF 方法描述的刚性杆件,采用两点零矢形式通过惯性力的虚功率可求得刚性杆单元质量矩阵为

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \frac{m_k}{3} & \frac{m_k}{6} \\ \frac{m_k}{6} & \frac{m_k}{3} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \quad (k = 2, 5, 7, 10, 12, 15) \tag{29}$$

刚性三角板单元质量矩阵为

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \frac{m_k}{6} & \frac{m_k}{12} & \frac{m_k}{12} \\ & \frac{m_k}{6} & \frac{m_k}{12} \\ & & \frac{m_k}{6} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \quad (k = 16) \tag{30}$$

对于 ANCF 方法描述的柔性梁单元,由式(6)可求得其对应的质量矩阵为

$$\mathbf{M}_k = \rho \int_{V_e} \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV_e \quad (k = 3, 4, 8, 9, 13, 14) \tag{31}$$

由式(28)~(31)可组建机构的质量矩阵为

$$\mathbf{M}_\Sigma = \text{diag}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \cdots, \mathbf{M}_{16}) \tag{32}$$

2.4 动力学方程

选择多体系统动力学中指标-3 的 DAEs 描述动力学方程,基于拉格朗日乘子法构成的 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学方程为

$$\begin{cases} \mathbf{M}_\Sigma \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_\Sigma - \mathbf{F}_\Sigma \\ \Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{O} \end{cases} \tag{33}$$

式中 Φ_q ——约束方程 $\Phi(\mathbf{q}, t)$ 关于广义坐标的导数
 $\ddot{\mathbf{q}}$ ——系统广义加速度
 $\boldsymbol{\lambda}$ ——拉格朗日乘子
 $\mathbf{Q}_\Sigma$ ——系统的广义外力
 $\mathbf{F}_\Sigma$ ——式(12)组装的广义弹性力

由于式(33) DAEs 不能直接进行求解,需要经过广义 α 方法进行差分直接离散成代数方程的形式求解,具体方法见文献[28],将式(33)构建成矩阵的形式为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\Sigma \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} - (\mathbf{Q}_\Sigma - \mathbf{F}_\Sigma) \\ \Phi(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} \tag{34}$$

对式(34)进行求导可得其对应的 Jacobian 矩阵为

$$B = \frac{\partial A}{\partial [\mathbf{q} \quad \boldsymbol{\lambda}]^T} =$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s \hat{\beta}_\alpha + (\boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda})_q - (\mathbf{Q}_s - \mathbf{F}_s)_q & \boldsymbol{\Phi}_q^T \\ \boldsymbol{\Phi}_q & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (35)$$

3 数值仿真与分析

3.1 仿真参数

利用三维软件建立 3-RRPaR 空间并联机构模型,经测量可得构件材料相关参数如表 1~4 所示。

表 1 3-RRPaR 空间并联机构主动臂的转动惯量
Tab.1 Moment of inertia of active arm of 3-RRPaR

spatial parallel mechanism				kg·m ²
支链主动臂序号	<i>I_x</i>	<i>I_y</i>	<i>I_z</i>	
1	1.94 × 10 ⁻³	5.05 × 10 ⁻⁵	1.98 × 10 ⁻³	
2	1.10 × 10 ⁻³	4.18 × 10 ⁻⁵	1.07 × 10 ⁻³	
3	1.94 × 10 ⁻³	5.05 × 10 ⁻⁵	1.98 × 10 ⁻³	

表 2 构件结构参数

Tab.2 Structural parameters of components

刚性构件序号	质量/kg	长度/m
1、11	0.274 8	0.230
6	0.237 4	0.180
2、5、7、10、12、15	0.045 6	0.080
16	0.188 1	

表 3 定、动平台坐标参数

Tab.3 Coordinate parameters of fixed and moving platforms

参数	数值	参数	数值
<i>a</i> ₁ 、 <i>c</i> ₁ 、 <i>b</i> ₂ 、 <i>a</i> ₃ 、 <i>c</i> ₃	0	<i>b</i> ₃	0.150
<i>b</i> ₁	-0.150	<i>w</i> ₁	0.050
<i>a</i> ₂	0.435	<i>w</i> ₂	0.044
<i>c</i> ₂	0.448		

表 4 柔性杆件材料参数

Tab.4 Material parameters of flexible rod

参数	柔性构件序号	
	3、4、13、14	8、9
变形前长度/m	0.50	0.39
横截面长度、宽度/m	0.016	
密度 ρ /(kg·m ⁻³)	1 700	

3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学方程的求解流程如图 7 所示。具体求解步骤如下:①输入系统参数及初值。系统参数主要包括各个构件质量、转动惯量、长度和横截面参数,初值为在仿真的第一步时即 $t=0$ 时刻对应的 $\mathbf{q}_0$ 、 $\dot{\mathbf{q}}_0$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}_0$ 、 $\boldsymbol{\lambda}_0$ 。②求解下一时刻广义位置和速度 $\mathbf{q}(t=i)$ 、 $\dot{\mathbf{q}}(t=i)$ 近似值。根据广义 α 方法离散的形式求出下一时刻广义位置和速度的近似值,进入步骤③。③误差要求判断。

求出该时刻对应的约束方程、质量矩阵、广义力和弹性力以及其相对应的雅可比矩阵,根据式(34)和式(35)等计算出该时刻对应的 $\mathbf{q}(t=i)$ 、 $\dot{\mathbf{q}}(t=i)$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}(t=i)$ 、 $\boldsymbol{\lambda}(t=i)$,并计算此时 $\mathbf{r}_{n+1}$ 是否满足误差要求,如果不满足则返回步骤③,如果满足误差要求则进入步骤④。④仿真时间判断。判断此时刻的时间 $T(t=i)$ 是否达到设定的最终时间,如果没有达到最终时间则返回步骤②,如果达到最终时间则将每一时刻的 $\mathbf{q}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{q}}(t)$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ 、 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 输出并保存,整个求解方程的环节结束。

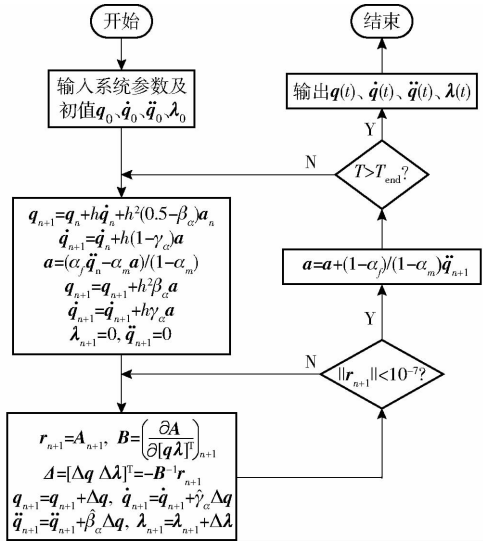


图 7 3-RRPaR 空间并联机构刚柔耦合动力学方程求解流程图

Fig.7 Flow chart for solving rigid flexible coupling dynamic equation of 3-RRPaR spatial parallel mechanism

3.2 仿真结果与分析

并联机构拥有 3 个平移方向的自由度,为了便于分析,规划动平台为一个圆形轨迹,其轨迹函数表达式为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0.16 - 0.01 \cos(8\pi t) \quad (0 < t < 0.5 \text{ s}) \\ z = 0.08 - 0.01 \sin(8\pi t) \end{cases} \quad (36)$$

利用 Matlab 对其进行多体系统刚柔耦合动力学建模,并通过广义 α 方法进行数值求解,其中求解步长为 0.002 s,谱半径是 0.7,为了避免泊松闭锁其泊松比取值 0^[28]。

不同弹性模量 E 下动平台的位移响应曲线如图 8 所示。由 8a、8c 可知,3 种不同弹性模量与刚体机构的位移曲线基本重合。从图 8b、8d 可以发现,弹性模量为 116 GPa 时与理想情况下的位移误差曲线最为接近,由图 8d 可得,最大位移误差仅为 -2.2×10^{-7} m,在弹性模量为 10 GPa 时,最大误差为 -6.615×10^{-6} m,弹性模量为 1 GPa 时最大误差

为 -9.579×10^{-6} m。综合分析发现弹性模量与理想时的位移误差基本在数量级 10^{-5} m 以内,其弹性模

量对动平台位移的影响很小,体现出该具有结构冗余的并联机构有着较高的精度。

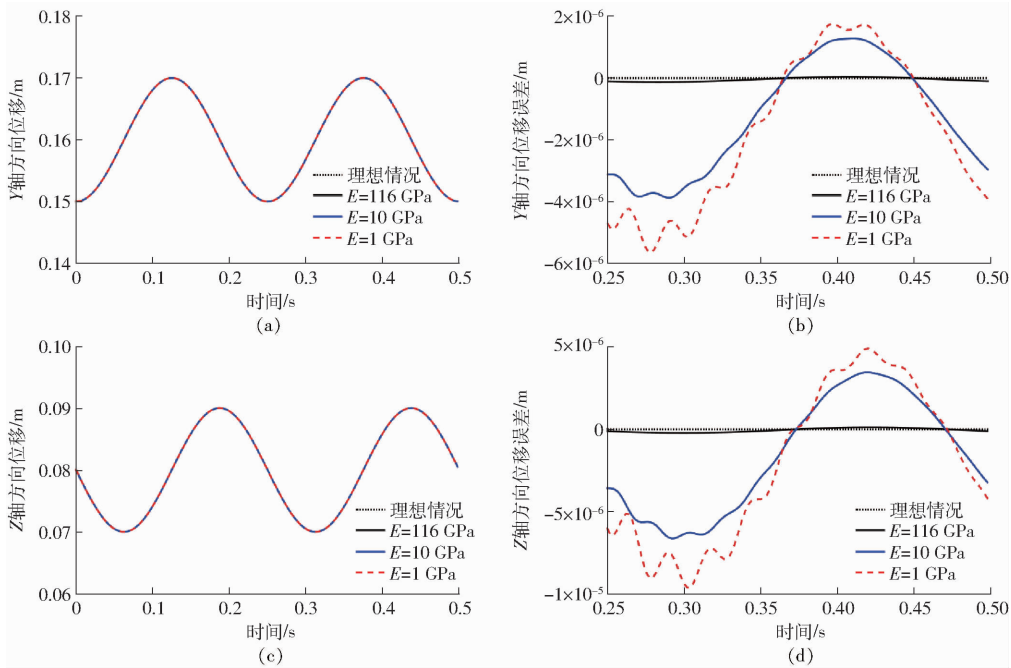


图 8 不同弹性模量下动平台的位移响应曲线
Fig. 8 Displacement response curves of moving platform under different elastic modulus

图 9 为 3 种弹性模量下的速度响应曲线。由图 9a、9c 可以看出,速度曲线一开始有微小波动,但后面的曲线基本重合,其波动原因可能是柔性杆件突然变形导致的数值解不收敛,并且 Z 轴方向与 Y 轴方向相比波动较大。从图 9b、9d 发现,随着弹性模量的减小速度误差变大;由图 9d 可知,在弹性模量为 1 GPa 时幅值的跨距最大,且最大误差达到 -6.098×10^{-4} m/s,弹性模量为 10 GPa 时最大误

差为 3.92×10^{-4} m/s,弹性模量为 116 GPa 时最大误差为 2.158×10^{-4} m/s,但是 3 种误差基本在数量级 10^{-3} m/s 以内,可得弹性模量对动平台速度的影响大于位移的影响。

图 10 为 3 种弹性模量下的加速度响应曲线。由图 10a、10c 可得,其曲线一开始有着较大波动,Y 轴和 Z 轴两方向的最大波动分别达到了 -34.78 m/s² 和 -248.3 m/s²,但是在经历 0.1 s 后曲线基本重合;

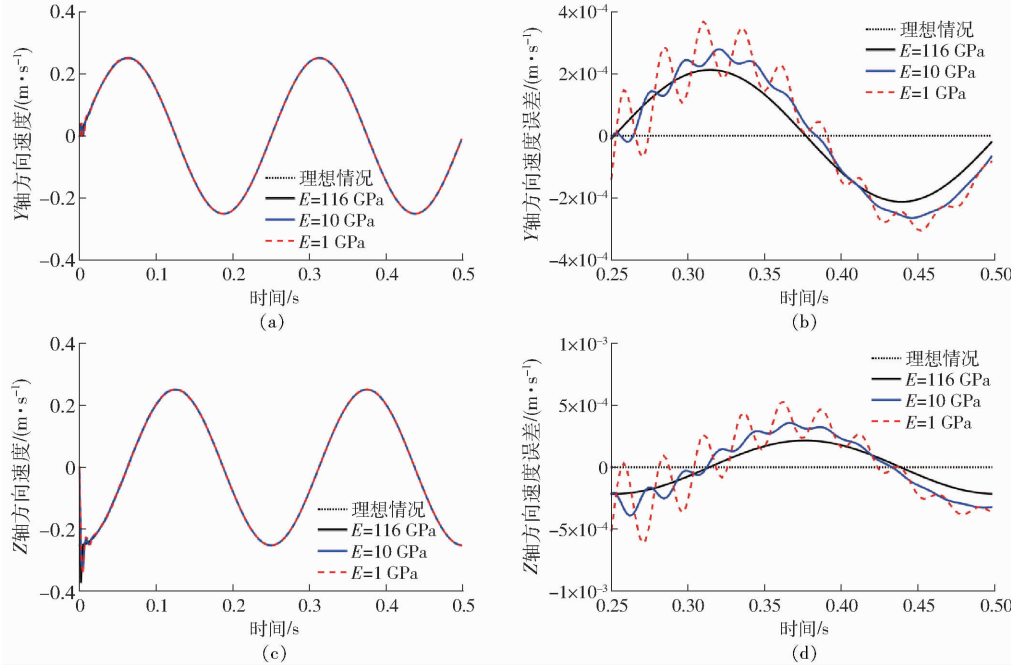


图 9 不同弹性模量下动平台的速度响应曲线
Fig. 9 Velocity response curves of moving platform under different elastic modulus

由图 10b、10d 可知,随着弹性模量的减小其加速度误差变大;由图 10d 可得,弹性模量为 1 GPa 时误差最大可达到 0.1091 m/s^2 ,弹性模量为 10 GPa 时最大误差为 0.03567 m/s^2 ,弹性模量为 116 GPa 时最大误差为 0.01472 m/s^2 。综合对动平台的位移、速

度、加速度曲线分析可发现,考虑柔性构件的运动特性曲线与刚体机构的动力学特性曲线基本一致,通过误差发现随着弹性模量的减小其位移、速度和加速度曲线偏离理想状态的程度越大,且弹性模量对加速度的影响最大,速度次之,位移最小。

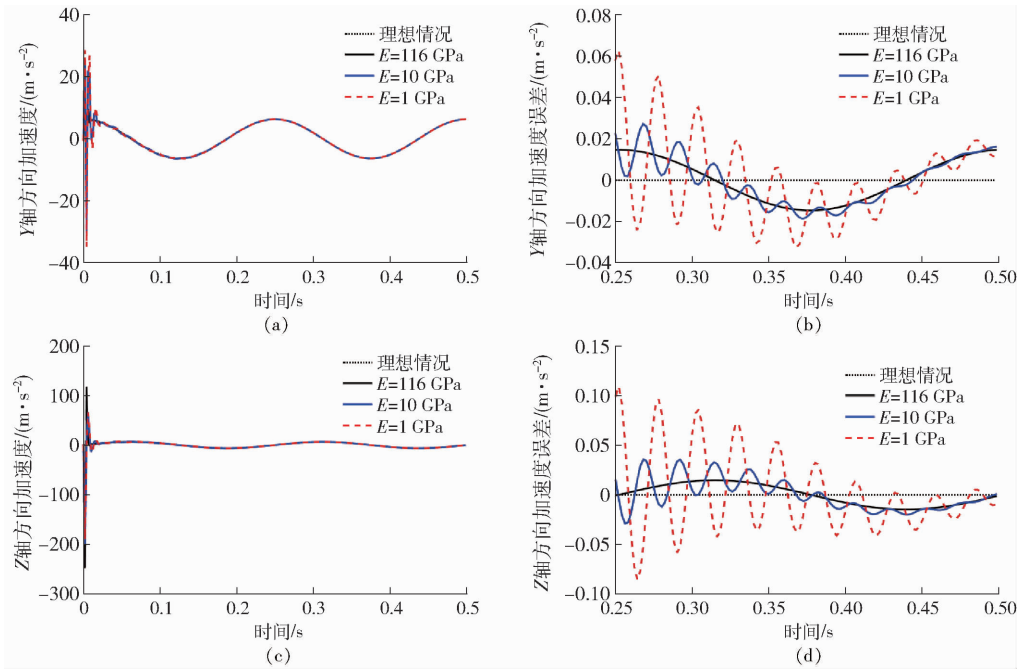


图 10 不同弹性模量下动平台的加速度响应曲线

Fig. 10 Acceleration response curves of moving platform under different elastic modulus

采用第四强度理论的等效应力进行分析,其中在不同弹性模量的影响下该机构各支链处杆件的等效应力如图 11 所示。第 1 支链开始时, $E = 116\text{ GPa}$ 的等效应力达到 8.926 MPa ,但之后随着弹性模量减少其等效应力曲线波动范围增大,并且不同曲线之间的差距随着时间的增大逐渐变小。由图 11b 可知,第 2 支链在 $E = 1\text{ GPa}$ 时等效应力最大达到了 2.446 MPa ,并且弹性模量越小,对应杆件的等效应力

曲线波动范围也就越大。由图 11c 可知,第 3 支链在 $E = 116\text{ GPa}$ 时等效应力最大达到了 15.01 MPa ,其 3 种弹性模量对应的曲线规律与图 11a 类似,发现由于第 1 支链与第 3 支链的对称性,其两支链的等效应力曲线具有明显的相似性。综上分析发现其柔性杆件的弹性模量越小,对应等效应力曲线的波动范围也就越大,同时在曲线稳定时支链处 3 种弹性模量对应的等效应力基本在数量级 1 MPa 以内。

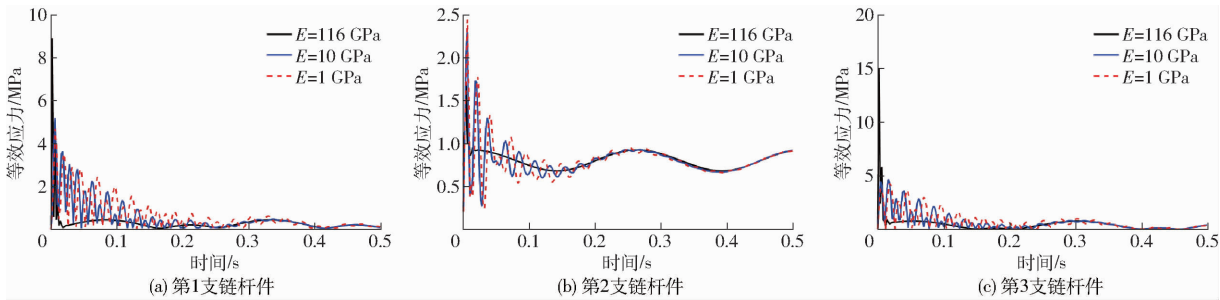


图 11 不同弹性模量下各支链杆件的等效应力曲线

Fig. 11 Equivalent stress curves of each chain rod under different elastic modulus

4 结论

(1) 基于绝对节点坐标法描述了三维二节点柔性梁单元空间模型,并根据功能关系推导了梁单元的质量矩阵,根据连续介质力学推导了弹性力矩阵,

最后利用虚功原理推导得出重力方向上单元广义外力的表达式。

(2) 分析了 3-RRPaR 空间并联机构的结构特征,采用自然坐标法和绝对节点坐标法建立了机构约束方程和具有常数的质量矩阵,最后基于拉格朗

日乘法推导得出机构的刚柔耦合动力学方程,并在 Matlab 中对方程进行数值求解。

(3)得到不同弹性模量下的动力学响应曲线,3种模量下的运动曲线与理想轨迹基本重合,验证了所建模型的正确性,结果表明,柔性构件的弹性模量越小,对机构运动精度的影响越大,且弹性模量对

机构动平台加速度的影响最大,对位移的影响最小,体现出具有结构冗余的空间并联机构精度高、稳定性好的特点。给出了机构在高速运动过程中等效应力的变化情况,并对比分析了3种不同弹性模量对等效应力的影响。

参 考 文 献

- [1] 沈惠平,邓嘉鸣,孟庆梅,等. 少输入-多输出并联机构的设计方法及其应用[J]. 机械工程学报, 2018, 54(1): 223-232. SHEN Huiping, DENG Jiaming, MENG Qingmei, et al. Design methods and applications for the fewer input-more output parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(1): 223-232. (in Chinese)
- [2] CHEN M, ZHANG Q, GE Y, et al. 2UPR-RRU parallel mechanism and its kinematic analysis[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2019, 45(6): 1145-1152.
- [3] 朱伟,汪源,沈惠平,等. 仿腕关节柔顺并联打磨机器人设计与试验[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(2): 402-407,348. ZHU Wei, WANG Yuan, SHEN Huiping, et al. Design and experiment of compliant parallel humanoid wrist joint polishing robot[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(2): 402-407,348. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20160254&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.02.054. (in Chinese)
- [4] SMITS J, REYNAERTS D, POORTEN E. Synthesis and methodology for optimal design of a parallel remote center of motion mechanism: application to robotic eye surgery[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 151: 1-20.
- [5] 汪满新,谏秋生,刘方,等. 3-R-RS 并联机构轻量化设计[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(11): 411-419,403. WANG Manxin, CHEN Qiusheng, LIU Fang, et al. Lightweight design of 3-R-RS parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(11): 411-419,403. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20191147&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2019.11.047. (in Chinese)
- [6] 王书森,梅瑛,李瑞琴. 新型过约束 2-UPS+2-RPU 并联机构的刚度分析[J]. 机械传动, 2016, 40(8): 33-37,77. WANG Shusen, MEI Ying, LI Ruiqin. Stiffness analysis of a novel over-constraint 2-UPS+2-RPU parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2016, 40(8): 33-37,77. (in Chinese)
- [7] DEWALQUE F, SCHWARTZ C, DENOL V, et al. Experimental and numerical investigation of the nonlinear dynamics of compliant mechanisms for deployable structures[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 101: 1-25.
- [8] LI Y, QUAN Q, LI H, et al. Air rudder mechanism dynamics considering two elements: joint clearance and link flexibility[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2017, 31(7): 3189-3197.
- [9] LI X, WANG Z, WANG X, et al. Research on static friction coefficient of joint surfaces considering elastic-plastic deformation based on fractal model[J]. International Journal of Industrial and Systems Engineering, 2019, 32(1): 32-55.
- [10] 赵磊,赵新华,李彬,等. 大范围转动弹性梁柔性动力学建模与扰动解耦[J/OL]. 农业机械学报, 2020, 51(1): 391-397. ZHAO Lei, ZHAO Xinhua, LI Bin, et al. Flexible dynamics modeling and perturbation decoupling of elastic beam in large overall rotation[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(1): 391-397. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20200143&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2020.01.043. (in Chinese)
- [11] ZHAO Yanzhi, LIANG Bowen, YANG Wei, et al. The constant balancing 6UPS/(3PRRR)+S parallel mechanism and its balancing performance analysis[J]. Mechanism & Machine Theory, 2018, 126: 79-91.
- [12] LI W, LIANG J, LIU J, et al. Simulation of EHD lubrication for heavy-duty journal bearing based on flexible multi-body dynamics[J]. IOP Conference Series Materials Science and Engineering, 2019, 542: 12-23.
- [13] 刘凉,赵新华,周海波,等. 空间刚柔耦合并联机器人动力学求解策略[J/OL]. 农业机械学报, 2018, 49(2): 376-384. LIU Liang, ZHAO Xinhua, ZHOU Haibo, et al. Dynamic solution for spatial rigid-flexible parallel robot[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(2): 376-384. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20180249&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2018.02.049. (in Chinese)
- [14] 张洪,李盼盼,王通德. 3T 各向同性并联机构的弹性动力学建模与特性分析[J]. 机械传动, 2019, 43(5): 134-140. ZHANG Hong, LI Panpan, WANG Tongde. Elastic dynamics modeling and characteristic analysis of a 3T isotropy parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(5): 134-140. (in Chinese)
- [15] 王宗平,赵登峰,曾国英. 一种六自由度并联机构的动力学模型[J]. 机械设计与制造, 2018(1): 71-74,77. WANG Zongping, ZHAO Dengfeng, ZENG Guoying. The dynamic model of a 6-DOF parallel mechanism[J]. Machinery Design & Manufacture, 2018(1): 71-74,77. (in Chinese)
- [16] 陈修龙,董芳杞,王清. 基于牛顿-欧拉法的 4-UPS-UPU 并联机构动力学方程[J]. 光学精密工程, 2015, 23(11): 3129-3137. CHEN Xiulong, DONG Fangqi, WANG Qing. Dynamic equation of 4-UPS-UPU parallel mechanism based on Newton-Euler approach[J]. Optics and Precision Engineering, 2015, 23(11): 3129-3137. (in Chinese)

- [17] ZHANG Qinghua, LU Qinghua. Analysis on rigid-elastic coupling characteristics of planar 3-RRR flexible parallel mechanisms [J]. *Intelligent Robotics and Applications*, 2017, 10463: 394 – 404.
- [18] WANG Lijuan, LÜ Liping, ZHANG Yuhong. Dynamic analysis of 3-RRR planar flexible parallel mechanism[J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2019(6): 197 – 200.
- [19] YU Tao, ZHANG Yujiao, WANG Yueliang, et al. Rigid-flexible coupling dynamics analysis of eight-links mechanical press based on ANSYS Workbench[J]. *Forging & Stamping Technology*, 2017, 42(4): 143 – 148.
- [20] LIU N, ZHANG X, ZHANG L, et al. Study on the rigid-flexible coupling dynamics of welding robot[J]. *Wireless Personal Communications*, 2018, 102: 1683 – 1694.
- [21] YAN Shijun, LIU Yunsi, PENG Jian. Rigid-flexible dynamic modeling and analysis of super long and flexible boom system in case of slewing motion[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2018, 35(6): 1288 – 1294, 1421.
- [22] CHEN C, LIU E Y, CHEN Z W, et al. Rigid and flexible dynamics simulation of 2-PRR parallel mechanism[J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2015, 757: 109 – 114.
- [23] 姜振海, 杨帅, 陈丽霞, 等. 基于绝对节点坐标法的平面 3-RRR 并联机构动态特性研究[J]. *机械设计*, 2019, 36(11): 114 – 118.
JIANG Zhenhai, YANG Shuai, CHEN Lixia, et al. Study on the dynamic characteristics of the planar 3-RRR parallel mechanism based on the absolute nodal coordinate framework[J]. *Journal of Machine Design*, 2019, 36(11): 114 – 118. (in Chinese)
- [24] XING Dixiong, REN Zhiqi, ZHAO Lujia. Rigid-flexible coupling dynamic modeling and simulation of a 6-PSS parallel mechanism[J]. *Machine Tool & Hydraulics*, 2018, 46(17): 48 – 52.
- [25] SHABANA A A. *Computational continuum mechanics*[M]. Cambridge University Press, 2008: 521 – 978.
- [26] LIU Rongshuai, LI Qing, DU Yudong, et al. Kinematics analysis and simulation of 3-CUR parallel sorting robot[J]. *Packaging Engineering*, 2019, 40(21): 179 – 186.
- [27] SUGIYAMA H, ESCALONA J L, SHABANA A A. Formulation of three-dimensional joint constraints using the absolute nodal coordinates[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31(2): 167 – 195.
- [28] HU W, TIAN Q, HU H Y. Simulating coupled dynamics of a rigid-flexible multibody system and compressible fluid[J]. *Science China Physics Mechanics & Astronomy*, 2018, 61(4): 58 – 72.
-

(上接第 383 页)

- [16] DEGHANI M, MOOSAVIAN S A A. Dynamics modeling of a continuum robotic arm with a contact point in planar grasp[J]. *Journal of Robotics*, 2014, 2014: 308283.
- [17] 席万强, 陈柏, 丁力, 等. 考虑非线性摩擦模型的机器人动力学参数辨识[J/OL]. *农业机械学报*, 2017, 48(2): 393 – 399.
XI Wanqiang, CHEN Bai, DING Li, et al. Dynamic parameter identification for robot manipulators with nonlinear friction model [J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2017, 48(2): 393 – 399. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20170253&flag=1. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2017.02.053. (in Chinese)
- [18] RUCKER D C, WEBSTER III R J. Statics and dynamics of continuum robots with general tendon routing and external loading [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2011, 27(6): 1033 – 1044.
- [19] RONE W S, BEN-TZVI P. Mechanics modeling of multisegment rod-driven continuum robots[J]. *Journal of Mechanisms & Robotics*, 2014, 6(4): 041006.
- [20] QI F, JU F, BAI D M, et al. Kinematics optimization and static analysis of a modular continuum robot used for minimally invasive surgery[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part H Journal of Engineering in Medicine*, 2018, 232(2): 135 – 148.
- [21] QI F, JU F, BAI D, et al. Motion modelling and error compensation of a cable-driven continuum robot for applications to minimally invasive surgery[J]. *The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*, 2018: e1932.
- [22] XUE R, REN B, YAN Z, et al. A cable-pulley system modeling based position compensation control for a laparoscope surgical robot[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2017, 118: 283 – 299.
- [23] WANG J, QI Z, WANG G. Hybrid modeling for dynamic analysis of cable-pulley systems with time-varying length cable and its application[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2017, 406: 277 – 294.
- [24] GAO X, WANG L, HAO X. An improved Capstan equation including power-law friction and bending rigidity for high performance yarn[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2015, 90: 84 – 94.
- [25] ALQUMSAN A A, KHOO S, NORTON M. Robust control of continuum robots using Cosserat rod theory[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2019, 131: 48 – 61.