doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.09.021

蝗虫切片图像 Shannon - Cosine 小波精细积分混合降噪

李　丽　朱磊平　梅树立

（中国农业大学信息与电气工程学院，北京 100083）

摘要：在显微镜下采集到的蝗虫切片图像通常同时具有高斯噪声和椒盐噪声。利用同时具有插值性、光滑性、紧支撑性及归一化特性的 Shannon - Cosine 小波，构造了多尺度插值小波算子，进而构造了去除图像中混合噪声的小波精细积分法。该方法在稀疏描述切片图像时，通过设置稀疏表示阈值，直接消除图像中的椒盐噪声；将图像的 Shannon - Cosine 小波稀疏表达式直接代入图像降噪 P - M 模型，将该模型变形为非线性常微分方程组，采用精细积分法求解，可实现图像的保边降噪，消除图像中的高斯噪声。实验结果表明，在满足降噪要求的情况下，本文方法可以较好地保持蝗虫切片图像中的各种纹理结构；随着高斯噪声方差由 0.02 增加到 0.10，降噪图像的 PSNR 下降了 11.67%，远低于其他方法。说明本文方法在处理蝗虫切片图像时具有较强的鲁棒性。采用本文方法描述蝗虫切片图像时，特征像素点只占图像像素总数的 10% 左右，有效降低了问题规模，提高了求解效率。

关键词：蝗虫切片图像；Shannon - Cosine 小波；稀疏小波精细积分法；混合噪声

中图分类号：TP391.41　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2020)09-0186-07　　**OSID**：

Shannon - Cosine Wavelet Precise Integration Denoising Method for Locust Slice Image

LI Li　ZHU Leiping　MEI Shuli

(*College of Information and Electrical Engineering*, *China Agricultural University*, *Beijing* 100083, *China*)

Abstract: Micro-slice images collected under a microscope usually have both Gaussian noise and pepper and salt noise. Shannon - Cosine wavelet with interpolation, smoothness, compact support and normalization characteristics was used to construct multi-scale interpolation wavelet operators, and then a wavelet precise integration method for removing mixed noise in images was constructed. And the pepper and salt noise in the micro-slice image was directly eliminated by setting the sparse representation threshold; Shannon - Cosine wavelet sparse expressions of images were brought directly into the image noise reduction P - M model, and then this model was transformed into a system of nonlinear ordinary differential equations and solved it directly by using the precise integration method, which can achieve edge preservation and noise reduction, and eliminate Gaussian noise in the image. The experimental results showed that the proposed method can preserve various texture structures in locust slice images under the condition of satisfying the requirements of noise reduction. As the variance of Gaussian noise was increased from 0.02 to 0.10, the PSNR value of the denoised image was decreased by 11.67%, which was much lower than that of the other methods. This showed that the method proposed had strong robustness when processing locust slice images. When the image Shannon - Cosine wavelet sparse representation method proposed was used to describe the locust slice image, the number of characteristic pixels only accounted for about 10% of the total number of image pixels, which effectively reduced the scale of the problem and improved the solution efficiency.

Key words: locust slice image; Shannon - Cosine wavelet; sparse wavelet precise integration method; mixed noises

收稿日期：2019 - 12 - 26　修回日期：2020 - 02 - 07

基金项目：北京市自然科学基金项目(4172034)和国家自然科学基金面上项目(61871380)

作者简介：李丽(1963—)，女，教授，博士，主要从事小波分析与图像处理研究，E-mail：lili_cau@yeah.net

通信作者：梅树立(1968—)，男，教授，博士，主要从事小波分析与图像处理研究，E-mail：meishuli@cau.edu.cn

0　引言

蝗虫切片图像是研究蝗虫生理结构的有效工具。与普通生物切片图像相同，蝗虫切片图像中的纹理结构呈现为具有多尺度特性的光滑曲线，且边界轮廓不清晰[1-2]。蝗虫切片图像是在显微镜下拍摄得到的，空气中的尘埃及由此带来的光线反射会形成图像中的椒盐和高斯混合噪声。因此，采用常见的典型图像降噪方法很难获得蝗虫切片图像高质量的降噪效果。非线性偏微分方程[3]方法是生物图像处理的常用方法，可实现图像的保边降噪，但该方法缺少多尺度特性，因此对细小纹理保护较差。

小波精细积分法是一种求解偏微分方程的有效方法[4]。该方法可实现偏微分方程空间[5]和时间[6]的多尺度自适应性离散，有效提高了数值算法的效率和精度。近年来，随着同伦技术的引入[7-8]和区间小波[9-10]的提出，小波精细积分法得到不断完善和发展，已在随机振动[11]、土壤侵蚀分析[12]、图像处理[13]、期权定价[14]等领域得到广泛应用。

采用差分法或者单尺度小波数值方法求解二维偏微分方程，离散点总量大，很难满足工程中大数据量问题(如图像处理)求解的要求。因此，将小波精细积分法推广应用于二维偏微分方程的求解具有非常重要的意义。构造二维偏微分方程小波精细积分算法的关键是二维多尺度插值小波算子的构造。利用多尺度小波插值算子对偏微分方程进行自适应离散，得到的常微分方程组可使用基于外推技术的自适应精细积分法[4]直接求解。

本文基于 Shannon - Cosine 小波[15]构造多尺度小波插值算子，以实现图像的稀疏表达、去除椒盐噪声，基于该算子构造小波精细积分法，以消除图像的高斯噪声和椒盐噪声。

1　Shannon - Cosine 多尺度小波变换

1.1　Shannon - Cosine 小波及其性质

Shannon - Cosine 小波母函数[15]定义为

$$\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\sum_{n=0}^{m}a_n\cos\frac{2n\pi x}{N}\cdot\left(\chi\left(x+\frac{N}{2}\right)-\chi\left(x-\frac{N}{2}\right)\right) \tag{1}$$

其中　$\chi(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$

式中　N——与支撑区间相关的常数

a_n——线性组合系数，表示光滑度

$\chi(x)$——Heaviside 函数

n、m——函数光滑度参数

显然，函数的支撑区间为[$-N/2$，$N/2$]。参数 a_n 用来定义函数边界处的光滑度，可通过如下偏微分方程组求得。

$$\frac{\mathrm{d}^n\phi\left(\frac{N}{2}\right)}{\mathrm{d}x^n}=0\quad(n=0,1,\cdots,m) \tag{2}$$

不难验证，Shannon - Cosine 小波母函数具有插值特性，即 $\phi(0)=1$。将 $x=N/2$（或者 $x=-N/2$）和 $x=0$ 代入到式(1)、(2)，可以得到关于参数 a_n 的线性代数方程组。

相对于 Shannon 小波母函数[16-17]，Shannon - Cosine 小波母函数具有更好的紧支撑性，如图 1 所示。

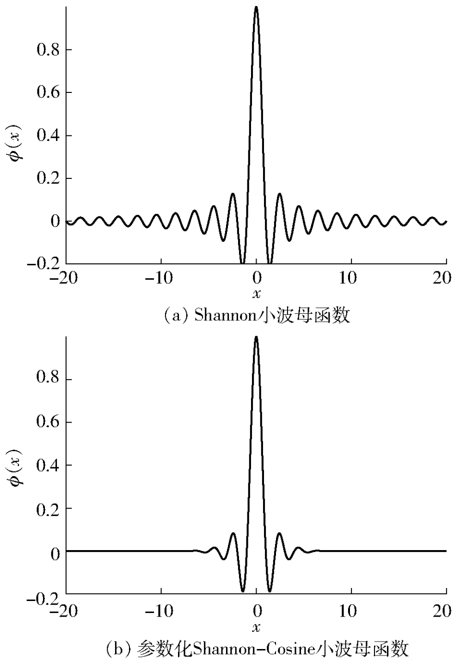


图 1　Shannon 函数与参数化 Shannon - Cosine 小波母函数对比

Fig. 1　Comparison between Shannon function and parametric Shannon - Cosine mother wavelet function

支撑区间参数 N 可由小波母函数的归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\mathrm{d}x=1$ 求得，参数 N 的选择与 Shannon - Cosine 小波的波形有关，可找到 Shannon 函数在某一区间内的积分大于 1，在另一区间内的积分小于 1。这表明，合理选择支持区间可以确保参数化 Shannon - Cosine 多项式函数满足统一条件的划分，从而找到合理的参数 N。同 Shannon - Gabor 小波相比，Shannon - Cosine 小波是一种真正的紧支撑小波，符合小波的所有定义，有助于提高算法效率和数值精度。

1.2　多尺度插值小波算子

设 $\phi(x)$ 为具有插值特性的小波母函数，通过平移和伸缩得到的函数序列定义为

$$\phi_{j,k}=\phi(2^jx-k)$$
$$(k=0,1,\cdots,2^j;j\in\mathbf{Z}) \tag{3}$$

式中 j——伸缩系数 k——平移系数

$\phi_{j,k}$——尺度基函数

对应的小波函数定义为

$$\psi_{j,k}(x)=\phi_{j+1,2k+1}(x) \tag{4}$$

对于函数 $f(x)\in L^2(0,1)$,$x\in[x_{\min},x_{\max}]$,L 表示平方可积的可测函数组成的空间,插值小波变换系数定义为

$$\alpha_{j,k}=f(x_{j,k})-\sum_{k_0=0}^{2^{j_0}}f(x_{j_0,k_0})\phi_{j_0,k_0}(x_{j,k})-\sum_{j_1=j_0}^{j-1}\sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1}\alpha_{j_1,k_1}\psi_{j_1,k_1}(x_{j,k})$$
$$(k\in\{0,1,\cdots,2^j\},0\leqslant j_0\leqslant J-1) \tag{5}$$

其中 $x_{j,k}=x_{\min}+k\Delta x_j \quad \Delta x_j=\dfrac{x_{\max}-x_{\min}}{2^j}$

式中 $\alpha_{j,k}$——小波变换系数

根据以上定义,可以给出多尺度插值小波变换矩阵 $\boldsymbol{C}_{k,n}^{j,J}$ 的定义。根据多尺度小波变换的定义,对离散信号 $f(x_{J,n})$ 做小波变换,对应的小波系数为

$$\alpha_{j,k}=\sum_{n=0}^{2^J}\boldsymbol{C}_{k,n}^{j,J}f(x_{J,n})$$
$$(n=0,1,\cdots,2^J) \tag{6}$$

其中 $x_{J,n}=x_{\min}+n\Delta x_J \quad \Delta x_J=\dfrac{x_{\max}-x_{\min}}{2^J}$

根据插值小波变换系数的定义,有

$$\alpha_{j,k}=f(x_{j,k})-\sum_{k_0=0}^{2^{j_0}}f(x_{j_0,k_0})-\sum_{j_1=j_0}^{j-1}\sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1}\alpha_{j_1,k_1}\psi_{j_1,k_1}(x_{j,k}) \tag{7}$$

其中 $\psi_{j,k}=\phi_{j+1,2k+1}$,利用限制算子的定义得到

$$\begin{cases}f(x_{j,k})=\displaystyle\sum_{n=0}^{2^J}\boldsymbol{R}_{2k+1,n}^{j+1,J}f(x_{J,n})\\ f(x_{j_0,k_0})=\displaystyle\sum_{n=0}^{2^J}\boldsymbol{R}_{k_0,n}^{j_0,J}f(x_{J,n})\end{cases} \tag{8}$$

其中
$$\boldsymbol{R}_{k,n}^{j,J}=\begin{cases}1 & (x_{j,k}=x_{J,n})\\ 0 & (x_{j,k}\neq x_{J,n})\end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{R}_{k,n}^{j,J}$——限制算子

将式(8)代入式(7),得

$$\alpha_{j,k}=\sum_{n=0}^{2^J}\left(\boldsymbol{R}_{2k+1,n}^{j+1,J}-\sum_{k_0=0}^{2^{j_0}}\boldsymbol{R}_{k_0,n}^{j_0,J}\phi(x_{j+1,2k+1})\right)f(x_{J,n})-\sum_{j_1=j_0}^{j-1}\sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1}\alpha_{j_1,k_1}\psi_{j_1,k_1}(x_{j+1,2k+1}) \tag{9}$$

将式(6)代入式(9),得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{2^J}\boldsymbol{C}_{k,n}^{j,J}f(x_{J,n})=\sum_{n=0}^{2^J}\left(\boldsymbol{R}_{2k+1,n}^{j+1,J}-\sum_{k_0=0}^{2^{j_0}}\boldsymbol{R}_{k_0,n}^{j_0,J}\phi_{j_0,k_0}(x_{j+1,2k+1})\right)f(x_{J,n})-\\&\sum_{n=0}^{2^J}\sum_{j_1=j_0}^{j-1}\sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1}\boldsymbol{C}_{k_1,n}^{j_1,J}f(x_{J,n})\psi_{j_1,k_1}(x_{j+1,2k+1})=\\&\sum_{n=0}^{2^J}\left(\boldsymbol{R}_{2k+1,n}^{j+1,J}-\sum_{k_0=0}^{2^{j_0}}\boldsymbol{R}_{k_0,n}^{j_0,J}\phi_{j_0,k_0}(x_{j+1,2k+1})\right)f(x_{J,n})-\\&\sum_{n=0}^{2^J}\left(\sum_{j_1=j_0}^{j-1}\sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1}\boldsymbol{C}_{k_1,n}^{j_1,J}\psi_{j_1,k_1}(x_{j+1,2k+1})\right)f(x_{J,n})=\\&\sum_{n=0}^{2^J}\left(\boldsymbol{R}_{2k+1,n}^{j+1,J}-\sum_{k_0=0}^{2^{j_0}}\boldsymbol{R}_{k_0,n}^{j_0,J}\phi_{j_0,k_0}(x_{j+1,2k+1})-\right.\\&\left.\sum_{j_1=j_0}^{j-1}\sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1}\boldsymbol{C}_{k_1,n}^{j_1,J}\psi_{j_1,k_1}(x_{j+1,2k+1})\right)f(x_{J,n})\end{aligned} \tag{10}$$

由式(10)等号两侧对比得到基于 Shannon－Cosine 小波的多尺度插值小波变换矩阵为

$$\boldsymbol{C}_{k,n}^{j,J}=\boldsymbol{R}_{2k+1,n}^{j+1,J}-\sum_{k_0=0}^{2^{j_0}}\boldsymbol{R}_{k_0,n}^{j_0,n}(x_{j+1,2k+1})-\sum_{j_1=j_0}^{j-1}\sum_{k_1=0}^{2^{j_1}-1}\boldsymbol{C}_{k_1,n}^{j_1,J}\psi_{j_1,k_1}(x_{j+1,2k+1}) \tag{11}$$

当 $j=j_0$ 时,得

$$\boldsymbol{C}_{k,n}^{j_0,J}=\boldsymbol{R}_{2k+1,n}^{j_0+1,J}-\sum_{k_0=0}^{2^{j_0}}\boldsymbol{R}_{k_0,n}^{j_0,J}\phi_{j_0,k_0}(x_{j_0+1,2k+1}) \tag{12}$$

利用式(6),可以方便地计算图像中每个像素点处的插值小波变换系数 $\alpha_{j,k}$。生物医学图像通常可视为分块光滑函数,因此,椒盐噪声点属于光滑图像函数中的不连续点,这便导致椒盐噪声点处的多尺度插值小波变换系数较大。基于该原理,很容易识别图像中的椒盐噪声点,即预先设定阈值为 h,对应的软阈值函数定义为

$$s_{oft}(\alpha_{j,k},h)=\begin{cases}\alpha_{j,k}+h & (\alpha_{j,k}\leqslant -h)\\ 0 & (|\alpha_{j,k}|<h)\\ \alpha_{j,k}-h & (\alpha_{j,k}\geqslant h)\end{cases} \tag{13}$$

当图像中某点处的小波系数大于该点处的软阈值时,该点处的图像信息用图像中的其他像素点逼近表达,从而消除了该椒盐噪声。换句话说,稀疏表达本身可消除图像中的椒盐噪声。

2 多尺度 Shannon－Cosine 小波精细积分法

用 P－M 模型对图像进行展开,使用小波插值算子实现图像纹理的自适应识别。用 Shannon－Cosine 小波配置法将偏微分方程离散成常微分方程,在此过程中,小波配置法对纹理实现自动捕捉,即根据图像灰度的变化特点自适应离散,以自适应选取图像的特征点。在纹理处密集选取点集,在平

滑处稀疏选点。最后，利用小波精细积分法求解常微分方程得到高精度解，方程组的解即为降噪后图像在该点处的像素值。

2.1 图像处理变分模型

令 $g(x)$ 是一个正的、有紧支撑集且 3 次连续可微的实函数，即 $g \in \boldsymbol{C}_0^3(\mathbf{R}^N)$。则对于 $\forall\, t>0$ 和任意实数列 h 以及整数 n，当 $t=nh^2$ 且 $n\to\infty$ 时，有

$$(gh(x))^{n*} \to \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|2}{4t}} \tag{14}$$

这个收敛性在 $L^2(\mathbf{R}^N)$ 空间逐点适用。其中，$(g)^{n*}$ 表示 g 的 n 次卷积。所以对于每个原始有界图像 $u_0(x)$，定义为

$$L_h u_0 = g_h * u_0 \tag{15}$$

由此可进一步得到 $(L_h)^n u_0 \to T_t u_0$，这里，$T_t u_0 = u(t,x)$，且 $u(t,x)$ 是一个非线性热传导方程初值问题，P - M 模型表示为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \operatorname{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) & ((x,y)\in\Omega) \\ u(x,y,t)=0 & ((x,y)\in\partial\Omega) \end{cases} \tag{16}$$

其中
$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\nabla u}{k}\right)^2} \tag{17}$$

式中　(x,y)——像素点坐标

t——时间

$u(x,y,t)$——处理后的图像，简称为 u

div——散度算子　　∇——梯度算子

$c(|\nabla u|)$——扩散函数

Ω——图像所在区域

$\partial\Omega$——图像边界

k——常数，梯度阈值

其中 $c(|\nabla u|)$ 为扩散函数，是图像不同方向梯度模的非负递减函数，可选择为式(17)。

2.2 变分模型的小波精细积分法求解

函数 $u(x,y)$ 表示像素点 (x,y) 处的灰度，引入记号

$$\phi(x,y) = \phi(x)\phi(y) \tag{18}$$

则 $\phi_{j,k,l}(x,y) = \phi(2^j x - k)\phi(2^j x - l)$，$k$、$l\in\mathbf{Z}$。由配置法思想，偏微分方程的解可近似表示为

$$\tilde{u}_j(x,y) = \sum_{n_1=0}^{2^j}\sum_{n_2=0}^{2^j} \tilde{u}_j(x_{n_1},y_{n_2})\phi_{j;n_1,n_2}(x,y) \tag{19}$$

将式(19)代入式(16)可得其小波离散格式为

$$\sum_{n_1=0}^{2^j}\sum_{n_2=0}^{2^j} c(|\nabla u|)\tilde{u}_j(x_{n_1},y_{n_2})\left(\frac{\partial^2\phi_{j;n_1,n_2}(x_{k_1},y_{k_2})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_{j;n_1,n_2}(x_{k_1},y_{k_2})}{\partial y^2}\right) = \frac{\mathrm{d}u_j(x_{k_1},y_{k_2})}{\mathrm{d}t} \tag{20}$$

其中 $k_1=0,1,\cdots,2^j$；$k_2=0,1,\cdots,2^j$，$j\in\mathbf{Z}$。记

$$\boldsymbol{V}_j = \begin{bmatrix} u_j(x_0,y_0,t) & u_j(x_1,y_0,t) & \cdots & u_j(x_{2^j},y_0,t) \\ u_j(x_0,y_1,t) & u_j(x_1,y_1,t) & \cdots & u_j(x_{2^j},y_1,t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_j(x_0,y_{2^j},t) & u_j(x_1,y_{2^j},t) & \cdots & u_j(x_{2^j},y_{2^j},t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{W} = c\begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \cdots & w_{0,2^j} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,2^j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{2^j,0} & w_{2^j,1} & \cdots & w_{2^j,2^j} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_{n_1,n_2} = \begin{bmatrix} m_{n_1,n_2}^{0,0} & m_{n_1,n_2}^{0,1} & \cdots & m_{n_1,n_2}^{0,2^j} \\ m_{n_1,n_2}^{1,0} & m_{n_1,n_2}^{1,1} & \cdots & m_{n_1,n_2}^{1,2^j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n_1,n_2}^{2^j,0} & m_{n_1,n_2}^{2^j,1} & \cdots & m_{n_1,n_2}^{2^j,2^j} \end{bmatrix} \tag{22}$$

于是方程组(20)可简记为矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}_j = \boldsymbol{W}\boldsymbol{V}_j \tag{23}$$

以上方程组的解可表示为

$$\boldsymbol{V}_j^{k+1} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{V}_j^k \tag{24}$$

其中
$$\boldsymbol{T} = \exp(\boldsymbol{W}\tau)$$

式中　τ——时间步长　　$\boldsymbol{W}$——常数矩阵

$\boldsymbol{T}$——指数函数　　$\boldsymbol{w}_{n_1,n_2}$——常数矩阵

由此，问题可归结为矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的计算，而矩阵 $\boldsymbol{T}$ 可通过精细积分方法[4]精确求得。

3 蝗虫切片图像降噪实验

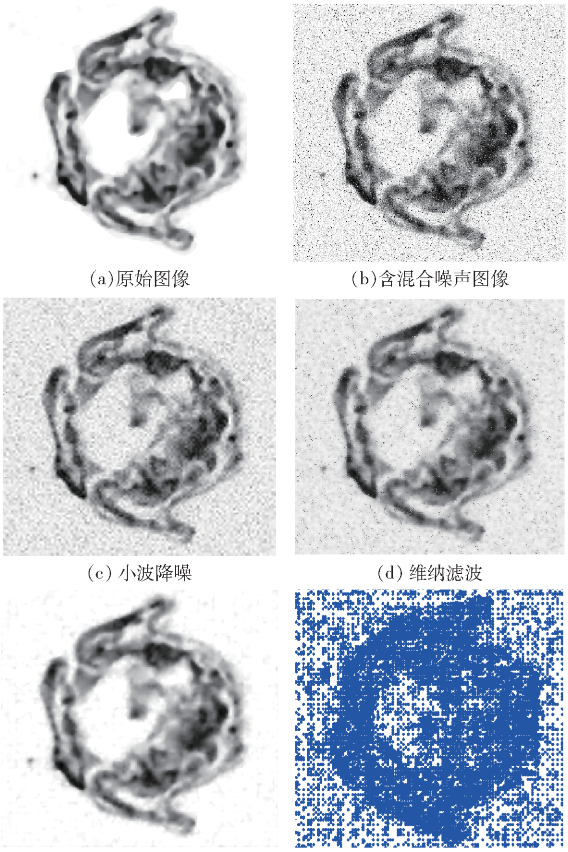
3.1 蝗虫切片显微图像的获取

根据项目任务和目标要求，筛选满足条件的蝗虫直接作超薄连续切片，以获取蝗虫与微生物农药在组织水平上相互作用的图像，为在组织水平上的三维重建提供数据。显微镜下观察到的原始图像稍显模糊。在显微镜上观察得到的图像噪声属于混合噪声，成分复杂且含量不明确。为了便于量化对比各种方法，借助于 PS 软件采用人工方法对原始图像进行降噪和增强，结果如图 2a 所示。定量添加人工噪声（如高斯噪声、椒盐噪声等）后，如图 2b 所示。不同方法对图像的降噪效果如图 2c ~ 2e 所示。

3.2 蝗虫切片显微图像降噪效果对比

3.2.1 降噪方法对比

可用于生物图像降噪的典型方法包括维纳滤



(a)原始图像 (b)含混合噪声图像 (c)小波降噪 (d)维纳滤波 (e)本文方法 (f)稀疏点阵图像

图2 含人工混合噪声图像的降噪效果对比

Fig. 2 Comparison of different denoising methods on slice image of locust with mixed noises

波、小波降噪、偏微分方程方法(变分法)、剪切波变换等。均值算子和中值算子也是图像降噪的常见方法,但适用范围较窄,不适合多种类型噪声混杂的情况。变分法[18-19]通过迭代求解偏微分方程实现图像降噪,且容易将细小纹理当作噪声处理[20],尽管提高偏微分方程的阶数可以改善降噪效果,但迭代求解效率较低,精度也相应下降。因此,本节重点对比维纳滤波方法和小波降噪方法。维纳滤波是一种自适应滤波器,具有较广的适用范围和较好的降噪效果[21-22]。在众多的小波中,Daubechies 小波是唯一同时具有正交性、光滑连续性、紧支撑性的小波;Symlets 小波是在 Daubechies 小波的基础改进得到的[23],保留了 Daubechies 小波的优点,且具有近似对称的特性,相对于 Daubechies 小波,具有更好的图像处理效果[24]。

本节用于对比实验的小波为 sym4 小波,采用 Matlab 内嵌函数 wdencmp 进行图像降噪,对应的阈值、逼近系数等参数由 Matlab 内嵌函数 ddencmp 根据被处理图像自适应获取。维纳滤波方法则采用 Matlab 内嵌函数 wiener2 来实现。图2d 是序列切片图像的维纳滤波结果,估算局部图像噪声均值和方差的邻域图块的尺寸为 6 像素 ×6 像素;图2c 是通过小波变换实现图像降噪的结果。本文方法则采用 Shannon - Cosine 小波构造多尺度插值算子,N 取 23.123 447 719 961 405,此时精度具有更好的数值性能,Shannon - Cosine 小波具有紧凑的支持域,提高了数值精度和效率[25]。输入图像后,对图像用 P - M 模型展开,用 Shannon - Cosine 小波配置法将偏微分方程离散成常微分方程,在此过程中,小波配置法对纹理实现自动捕捉,即根据图像灰度的变化特点自适应离散,以自适应选取图像的特征点。而后,小波精细积分法求解常微分方程得到高精度解,方程组的解即为降噪后图像在该点处的像素值。对切片图像进行降噪的效果如图2e 所示,对应的稀疏点阵图像如图2f 所示。

由稀疏点阵图可见,在图像纹理丰富区域,小波插值算子在纹理密集处特征点自动加密,特征点在平滑区域则自动减少。由此可见小波插值算子对图像中的纹理和轮廓具有较强的敏感性。其中,总像素点数为 198 338,特征像素点为 16 357 个。稀疏点的个数只占图像像素总数的 10% 左右,利用稀疏点阵重构图像时,可有效消除噪声,同时保持较为清晰的纹理。单纯从视觉效果来看,本文方法优于小波降噪和维纳滤波,维纳滤波又优于 symlets 小波降噪。

3.2.2 噪声种类对降噪效果的影响

为便于量化对比,对不含噪声的图像增加人工混合噪声(强度为 0.05 的椒盐噪声和均值与方差分别为 0、0.02 的高斯噪声),结果如图2b 所示。表1 给出了采用不同方法得到的降噪图像的峰值信噪比(Peak signal-to-noise ratio, PSNR)和结构相似度(Structural similarity index, SSIM)。这两个参数是评价图像降噪方法的常用指标,此处直接采用 Matlab 中的内嵌函数 psnr 和 ssim 计算得到。

中值滤波对椒盐噪声具有非常强的敏感性,表1 所示数值也反映了该点。而对混合噪声和高斯噪声来说,本文方法的降噪效果最好,明显优于其他方法。

3.2.3 噪声含量对降噪效果的影响

通常,随着高斯噪声基本偏差的增大,噪声含量也相应增加。表2 给出了在噪声含量增加时,不同滤波方法的去噪效果。可以看出,各种降噪方法中,峰值信噪比(PSNR)和结构相似度(SSIM)两个参数都随着噪声含量的增加而衰减,但本文方法始终具有最好的降噪效果。图3 为不同降噪方法的降噪效果指标(PSNR 和 SSIM)随高斯噪声方差的变化曲线。随着高斯噪声方差由 0.02 增加到 0.10,本文

表 1　噪声种类对降噪效果的影响

Tab. 1　Influence of noises type on denoising effect

降噪方法	椒盐噪声（噪声强度 $d=0.05$）和高斯噪声（均值 $m=0$，方差 $v=0.02$）的混合噪声		椒盐噪声（噪声强度 $d=0.05$）		高斯噪声（均值 $m=0$，方差 $v=0.02$）	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
均值滤波	22.979 422 996 731	0.657 133 318 092 7	27.577 094 026 025	0.788 244 014 208 7	25.433 925 095 429 4	0.766 674 531 819 69
中值滤波	28.691 237 536 796	0.808 285 654 127 6	32.760 035 168 903	0.948 214 910 233 5	29.160 662 936 254 3	0.827 368 648 859 71
小波降噪	22.350 459 423 491	0.615 747 593 108 3	16.674 136 496 617	0.309 879 842 060 4	25.484 778 117 372 2	0.794 844 556 687 94
维纳滤波	21.570 681 373 746	0.617 668 478 247 8	23.309 811 699 199	0.637 620 328 027 4	25.037 060 765 307 5	0.824 042 964 239 89
本文方法	29.563 825 317 930	0.900 914 148 888 8	31.585 803 271 639	0.938 582 136 762 6	29.827 899 652 586 0	0.907 480 512 244 31

表 2　高斯噪声方差对降噪效果的影响（均值 $m=0$）

Tab. 2　Influence of Gaussian noise variance on denoising effect（mean $m=0$）

方差		均值滤波	中值滤波	小波降噪	维纳滤波	本文方法
0.10	PSNR	19.137 423 461 595	24.232 465 930 770	18.647 916 962 720	18.175 053 166 258	26.164 281 433 164
	SSIM	0.569 325 620 447	0.496 769 166 562	0.522 650 914 076	0.550 917 054 216	0.785 048 198 173
0.08	PSNR	19.957 038 357 838	25.110 480 656 592	19.710 154 060 520	19.115 340 110 798	27.172 239 445 105
	SSIM	0.707 419 742 559	0.650 504 061 113	0.579 003 223 242	0.600 625 025 791	0.826 313 575 207
0.06	PSNR	21.328 068 665 862	26.183 767 133 836	20.897 212 792 006	20.353 624 065 08	27.804 068 871 737
	SSIM	0.762 710 110 529	0.639 392 950 002	0.635 453 688 341	0.624 342 577 230	0.842 493 984 607
0.04	PSNR	22.763 936 255 563	27.316 408 042 101	22.478 414 529 063	21.844 209 910 275	28.718 284 881 941
	SSIM	0.803 408 677 822	0.746 329 860 048	0.691 925 558 481	0.714 204 168 447	0.877 023 913 837

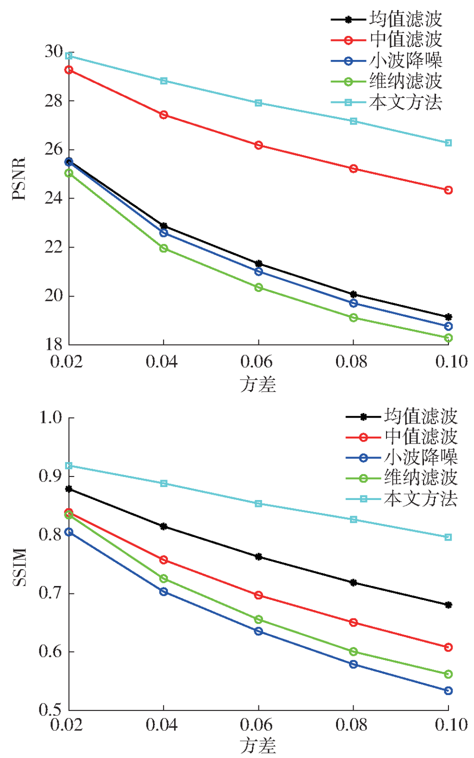


图 3　峰值信噪比和结构相似度随高斯噪声方差的变化曲线

Fig. 3　Changes of PSNR and SSIM with increase of Gaussian noises variance

方法得到的降噪图像的 PSNR 下降了 11.67%；而维纳滤波、小波方法、中值滤波和均值滤波方法得到的降噪图像的 PSNR 分别下降了 25.36%、25.74%、17.96%、24.55%；上述 5 种方法的 SSIM 分别下降了 13.67%、31.26%、33.85%、27.66%、22.78%。显然，本文方法随着噪声含量的增加，降噪效果参数衰减率最低，表明本文方法具有较好的鲁棒性和对不同图像较强的适应能力。

4　结论

（1）基于 Shannon - Cosine 小波构造的多尺度插值算子对蝗虫切片图像中的纹理和轮廓具有较强的敏感性，由此得到图像的稀疏特征点，为图像保纹理降噪奠定了基础。

（2）多尺度插值算子适合对包含混合噪声的蝗虫切片显微图像进行降噪，且对噪声含量不敏感，实验表明，本文方法随着高斯噪声方差由 0.02 增加到 0.10，降噪图像的 PSNR 下降了 11.67%，远低于其他方法。

（3）基于差分求解的变分法是生物图像领域的经典方法，基于该方法，本文采用了多尺度稀疏表示方法，从而具有较高的求解效率。

参　考　文　献

[1]　李丽，郭双双，梅树立，等. 基于单元最邻近匹配的蝗虫切片图像修复方法[J/OL]. 农业机械学报，2015，46(8)：15－19. LI Li，GUO Shuangshuang，MEI Shuli，et al. Image restoration of locust slices based on nearest unit matching[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2015，46(8)：15－19. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag=1&file_no=20150803&journal_id=jcsam. DOI：10.6041/j.issn.1000-1298.2015.08.003. (in Chinese)

[2] 梅树立. 基于变分法和剪切波耦合算法的蝗虫切片保纹理图像降噪[J]. 农业工程学报, 2016,32(17):152-159.
MEI Shuli. Denoising for locust slice image with texture preserving based on coupling technology of variational method and shearlet transform[J]. Transactions of the CSAE,2016,32(17):152-159. (in Chinese)

[3] 吴登辉,周先春,陈铭. 基于四阶非线性偏微分方程的图像去噪算法[J]. 电子测量与仪器学报,2017,31(6):839-843.
WU Denghui, ZHOU Xianchun, CHEN Ming. Image denoising algorithm based on nonlinear fourth-order PDE[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrument, 2017,31(6):839-843. (in Chinese)

[4] MEI Shuli, LU Qishao, ZHANG Senwen, et al. Adaptive interval wavelet precise integration method for partial differential equations[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005,26(3):364-371.

[5] 许文宁,梅树立,王鹏新,等. 遥感影像的自适应小波精细积分降噪方法[J]. 农业机械学报, 2011, 42(4): 148-152.
XU Wenning, MEI Shuli, WANG Pengxin, et al. Adaptive wavelet precise integration method on remote sensing image denoising [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(4): 148-152. (in Chinese)

[6] 张兰霞,杨勇,梅树立. 图像降噪的小波精细积分方法[J]. 农业机械学报,2006, 37(7):109-112.
ZHANG Lanxia, YANG Yong, MEI Shuli. Wavelet precise integration method on image denoising[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2006, 37(7):109-112. (in Chinese)

[7] MEI Shuli. Construction of target controllable image segmentation model based on homotopy perturbation technology[J]. Abstract and Applied Analysis,2013:131207.

[8] 廖世俊,刘曾. 同伦分析方法进展综述[J]. 力学进展,2019,49(2):237-273.
LIAO Shijun, LIU Zeng. A brief review of the homotopy analysis method[J]. Advances in Mechanics,2019,49(2):237-273. (in Chinese)

[9] 张彦娥, 魏颖慧, 梅树立,等. 基于多尺度区间插值小波法的牛肉图像中大理石花纹分割[J]. 农业工程学报, 2016, 32(21):296-304.
ZHANG Yane, WEI Yinghui, MEI Shuli, et al. Application of multi-scale interval interpolation wavelet in beef image of marbling segmentation[J]. Transactions of the CSAE, 2016,32(21):296-304. (in Chinese)

[10] ALI T, MARYAM E. Construction of dual multiple knot B - Spline wavelets on interval[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society,2019,45(3):843-864.

[11] 庞守林. 用于随机振动分析的小波数值方法[J]. 农业机械学报,2007,38(3):168-170.
PANG Shoulin. Wavelet numerical method for nonlinear random system [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2007,38(3):168-170. (in Chinese)

[12] 庞守林,梅树立. 水土侵蚀过程分析的小波精细积分法[J]. 农业机械学报,2006,37(10):124-126.
PANG Shoulin, MEI Shuli. Wavelet precise integration method on rill erosion model[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2006,37(10):124-126. (in Chinese)

[13] 魏颖慧,张彦娥,梅树立,等. 基于基于暗通道先验和区间插值小波变换的图像去雾霾方法[J]. 农业工程学报, 2017, 33(增刊):281-297.
WEI Yinghui, ZHANG Yane, MEI Shuli, et al. Image dehazing method based on dark channel prior and interval interpolation wavelet transform[J]. Transactions of the CSAE, 2017,33(Supp.):281-297. (in Chinese)

[14] 梅树立,索皎莉. 求解非线性期权定价模型的自适应小波同伦摄动技术[J]. 动力学与控制学报, 2012,10(4):360-365.
MEI Shuli, SUO Jiaoli. Adaptive wavelet homotopy perturbation method on nonlinear option pricing model[J]. Journal of Dynamics and Control, 2012,10(4):360-365. (in Chinese)

[15] MEI Shuli, GAO Wanlin. Shannon - Cosine wavelet spectral method for solving fractional Fokker - Planck equations[J]. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing,2018,16(2):1850021.

[16] 库福立,吴克奇,周雪莹,等. 二维四向小波子空间的 Shannon 采样定理[J]. 湖北大学学报(自然科学版),2019,41(3): 251-257,269.
KU Fuli, WU Keqi, ZHOU Xueying, et al. Sampling theorems of Shannon's type on two-dimensional four-direction wavelet subspaces[J]. Journal of Hubei University(Natural Science),2019,41(3):251-257,269. (in Chinese)

[17] 钟鸣宇,朱宗玖. 基于拟 Shannon 区间小波的分步小波方法[J]. 安徽理工大学学报(自然科学版),2016,36(5):59-62,77.
ZHONG Mingyu, ZHU Zongjiu. Split-step wavelet method based on Quasi - Shannon interval wavelet[J]. Journal of Anhui University of Science and Technology (Natural Science),2016,36(5):59-62,77. (in Chinese)

[18] RENE S, AlEXANDER R. Noise reduction in FLAIR2 images using total generalized variation[J]. Gaussian and Wiener Filtering, 2018,28(4):286-292.

[19] LEE I H, KANG D U, SHIN S W. Development of a total variation noise reduction algorithm for chest digital tomosynthesis [J]. Optik,2019,176:384-393.

[20] 马晓月. 基于变分法的图像去噪算法研究[D]. 苏州:苏州大学,2019.
MA Xiaoyue. The research on the image denoising algorithm based on the variational method[D]. Suzhou: Suzhou University, 2019. (in Chinese)

[21] JORDI V V, DAMIEN V, ERIC C, et al. Recursive linearly constrained wiener filter for robust multi-channel signal processing [J]. Signal Processing, 2020, 167:107291.

[22] KANG S H, YOON M S, HAN D K. Total variation noise reduction algorithm in computed tomography image with custom-built phantom using 3D-printer[J]. Radiation Physics and Chemistry, 2020,170: 108631.

[23] 张林,张志杰,张华. 小波变换在压力传感器输出信号去噪中的应用[J]. 仪表技术与传感器, 2018(4):10-13.
ZHANG Lin, ZHANG Zhijie, ZHANG Hua. Application of output signal denoising for pressure sensor based on wavelet transform[J]. Instrument Technique and Sensor,2018(4):10-13. (in Chinese)

[24] 刘栋,梅雪松,冯斌,等. 基于 Symlets 小波滤波的滚珠丝杠伺服进给系统频响特性辨识[J]. 机械工程学报,2011, 47(13):153-159.
LIU Dong, MEI Xuesong, FENG Bin, et al. Frequency response identification for ballscrew servo driven system based on Symlets wavelet[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011,47(13):153-159. (in Chinese)

[25] 高若婉,梅树立,李丽,等. 基于小波精细积分与暗通道的农田图像去雾算法[J/OL]. 农业机械学报,2019,50(增刊): 167-174.
GAO Ruowan, MEI Shuli, LI Li, et al. Farmland image dehazing method based on wavelet precise integration and dark channel prior[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019,50(Supp.):167-174. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag=1&file_no=2019s026&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.S0.026. (in Chinese)