doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.02.043

低耦合度且部分解耦的3T1R并联机构设计与分析

沈惠平 许正骁 许 可 邓嘉鸣 杨廷力
(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要: 三平移一转动(3T1R)并联机构具有拓扑结构复杂、耦合度高、输入-输出运动不解耦,且易出现奇异位置等问题。根据基于方位特征(Position and orientation characteristic,POC)方程的并联机构拓扑设计理论和和冗余支链消除奇异位置原理,首先,提出了一种含冗余支链的低耦合度、运动解耦、大转动能力的3T1R并联操作手新机构;其次,对其进行拓扑结构分析,主要包括POC集、自由度、耦合度以及运动解耦性分析;再次,建立了基于序单开链法运动学建模原理的位置正解求解模型,并应用一维搜索方法求解了该并联机构的位置正解;基于导出的机构位置逆解,分析了机构的工作空间、转动能力及奇异性条件;阐明了冗余支链可避免奇异位置,并能增加机构刚度;最后,给出了机构动平台的速度、加速度变化规律。本文为该操作手的机械设计、动力学分析、样机研制奠定了理论基础。

关键词: 并联机构; 低耦合度; 运动解耦; 拓扑设计; 工作空间; 奇异位置

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2019)02-0373-11

Design and Analysis for Partially Decoupled 3T1R Parallel Mechanism with Low Coupling Degree

SHEN Huiping XU Zhengxiao XU Ke DENG Jiaming YANG Tingli
(*Research Center for Advanced Mechanism Theory*, *Changzhou University*, *Changzhou* 213016, *China*)

Abstract: The four degrees of freedom (DOF) SCARA parallel mechanism (PM) is widely used in industrial manufacturing since it has three translations and one rotation (3T1R) pose positioning function. In general, this kind of PM features complex structures, high coupling degree, no input-output motion decoupling and singularity etc. Firstly, according to the topological design theory of PM based on the position and orientation characteristic (POC) equations and principle of avoiding singularity by using redundant actuation limb, a new and symmetrical 3T1R partially decoupled PM with low coupling degree κ and a redundant actuation was proposed. Then the topological characteristic analysis of the PM was performed, including POC set, DOF, coupling degree and motion decoupling performance. Afterward, according to the kinematics modeling principle based on ordered single opened chain (SOC), the solution model of direct kinematics was established, and the position solutions of the PM were solved by using one-dimensional search method. Then, the workspace and rotational ability of the PM were analyzed based on the inverse position solutions derived. At the same time, the geometric conditions of three kinds of singular positions were also derived and the principle of avoiding the singular position using redundant driving chain was explained. Meanwhile, the velocity and acceleration curve of the base point of moving platform of PM was simulated based on the derived formula. The research result laid a theoretical foundation for the mechanical design, prototype implement and application of the manipulator.

Key words: parallel mechanism; low coupling degree; motion decoupling; topology design; workspace; singularity position

0 引言

具有空间三平移一转动(3T1R)功能的并联机器人操作手因其具有工作空间大、易实现高速、成本低等优点,越来越多地应用于电子产品、塑料和食品工业等制造领域。这类少自由度并联机构,一般结

收稿日期: 2018-08-16 修回日期: 2018-09-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(51375062、51475050)、江苏省重点研发计划项目(BE2015043)和江苏省绿色过程装备重点实验室项目

作者简介: 沈惠平(1965—),男,教授,博士生导师,主要从事机器人机构学研究,E-mail: shp65@126.com

构复杂、耦合度高、运动输入-输出不解耦,且易出现奇异位置,因此,四自由度 3T1R 并联机构新机型的设计和性能研究,一直受到国内外学者的关注和研究[1-14]。已有的 3T1R 机构中,大部分耦合度(κ = 2)大且运动不解耦,给运动控制及轨迹规划带来了困难。本课题组提出了一种非对称结构的低耦合度、运动解耦的 3T1R 并联操作手,但易发生奇异位置[15-16]。

本文提出一种低耦合度且输入-输出运动解耦、可用冗余支链避免奇异位置的大转动能力 4 自由度 3T1R 并联机器人新机构,结构上为部分对称;对此机构进行拓扑特性(POC 集、自由度、耦合度、运动耦合性)以及运动学分析(机构位置正逆解求解、工作空间与转动能力、奇异位置,以及速度、加速度),以揭示该并联机构的拓扑结构与运动学特性。

1 3T1R 并联机构设计及拓扑分析

1.1 机构设计

根据基于 POC 方程的并联机构拓扑结构设计理论,为设计低耦合度、输入-输出运动解耦、冗余支链消除奇异位置的并联机构,必须满足以下条件:①支链回路约束度低,以实现低耦合度(κ = 0 或 1)。②要求包含 2 个以上的基本运动链(BKC),以实现运动部分解耦性。③根据 POC 集分析、自由度分析,对支链在动静平台之间作特殊布置,以实现冗余支链消除奇异位置。据此,提出一种含冗余支链的、低耦合度(κ = 1)、输入-输出具有部分运动解耦的 4-DOF 3T1R 并联机器人新机构,如图 1 所示。

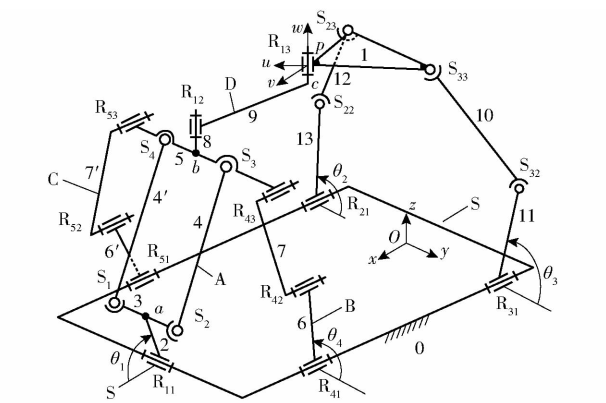


图 1 低耦合度且部分运动解耦的 3T1R 并联机构

Fig. 1 3T1R parallel mechanism with low coupling and partial motion decoupling

具体设计过程如下:

(1)本机构由 1 条混合支链、2 条无约束支链 $SOC_2\{R_{21}-S_{22}-S_{23}\}$ 和 $SOC_3\{R_{31}-S_{32}-S_{33}\}$ 组成。

(2)混合支链(Hybrid single-open-chain, $HSOC_1$)为对称结构,它包含 4 个分支链 A、B、C、D。一个由 4 个球副组成平行四边形($\diamond S_1S_2S_3S_4$),其一短边杆 3 与驱动杆 2 固接后用转动副 R_{11} 与静平台 0 连接,为支链 A,记作 $RPa^{(4S)}$;其对边的短边杆 5 的右侧延伸端,与两杆(7、6)三平行轴线转动副组($R_{41}\parallel R_{42}\parallel R_{43}$)(记支链 B)并联连接;短边杆 5 的左侧延伸端,与另一两杆(7′、6′)三平行轴线转动副($R_{51}\parallel R_{52}\parallel R_{53}$)(记支链 C)也并联连接,这样,支链 A 与 B(或 A 与 C)构成一个子并联机构,记作:$RPa^{(4S)}3R$;同时,短边杆 5 的上侧通过与其固接的杆 8,与一杆(9)两平行轴线的转动副组($R_{12}\parallel R_{13}$)(记支链 D)串联连接,但 $R_{12}\perp R_{43}$。整个混合支链记为($RPa^{(4S)}3R$)$\perp$2R。

(3)静平台 0 上的各转动副轴线的布置关系为:$R_{11}\perp R_{41}$,$R_{11}\perp R_{51}$;而 R_{41} 与 R_{31} 的轴线、R_{51} 与 R_{21} 的轴线均重合,其布置整体上对称于 x 轴(S - S 连线)。

1.2 节将说明:混合支链子并联机构($RPa^{(4S)}3R$)的子平台输出杆 5 将产生两平移的输出(即等效于 P - P);而整个混合支链($RPa^{(4S)}3R$)$\perp$2R 的末端(即动平台 1 的一部分)将产生三平移一转动(绕 R_{13})的输出。

1.2 机构拓扑分析

1.2.1 POC 集分析

由文献[17 - 18]可知,串联、并联机构的 POC 集方程分别为

$$M_{bi}=\bigcup_{i=1}^{m}M_{Ji} \tag{1}$$

$$M_{Pa}=\bigcap_{i=1}^{n}M_{bi} \tag{2}$$

式中 M_{Ji}——第 i 个运动副的 POC 集

M_{bi}——第 i 条支链末端的 POC 集

M_{Pa}——机构动平台的 POC 集

取本机构动平台上任意一点 O' 为基点,下面依次确定 3 条支链末端构件、定动平台的 POC 集。

由 1.1 节可知,$HSOC_1$ 包含 A、B、C、D 4 个支链,它们的构成分别为 $RPa^{(4S)}$(支链 A)、$R_{41}\parallel R_{42}\parallel R_{43}$(支链 B)、$R_{51}\parallel R_{52}\parallel R_{53}$(支链 C),以及 $R_{12}\parallel R_{13}$(支链 D)。因此,由式(1)、(2)可得

$$M_{HSOC_1}=(M_A\cap M_B\cap M_C)\cup M_D$$

其中

$$M_A=\begin{bmatrix} t^1(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel R_{11}) \end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond S_1S_2S_3S_4)\cup t^1(\perp S_1S_2) \\ r^1(\parallel S_1S_2)\cup r^1(\parallel S_2S_4) \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond S_1S_2S_3S_4) \end{bmatrix}$$

$$M_B=\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{41}) \\ r^1(\parallel R_{41}) \end{bmatrix}\qquad M_C=\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{51}) \\ r^1(\parallel R_{51}) \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathrm{D}}=\begin{bmatrix} t^{1}(\perp \mathrm{R}_{13})\cup\{t^{1}(\perp \mathrm{R}_{12})\} \\ r^{1}(\parallel \mathrm{R}_{13}) \end{bmatrix}$$

由式(2)可得

$$M_{(\mathrm{A-B})}=M_{\mathrm{A}}\cap M_{\mathrm{B}}=\begin{bmatrix} t^{2}(\perp \mathrm{R}_{41}) \\ r^{0} \end{bmatrix} \tag{3}$$

由式(3)可知,因支链 A、B 构成一子并联机构,其输出杆 5 已得到两平移零转动(2T0R)的输出,且支链 C 与支链 B 的拓扑结构完全相同,因此,支链 C 已属于冗余支链。因此,可取其转动副 R_{51} 为冗余驱动副。机构正常工作时,支链 C 处于被动的随动状态;当机构出现奇异时,该冗余驱动副 R_{51} 产生动作,以消除机构的奇异位置,其理论证明详见 4.3 节。

由式(1)可得

$$M_{b1}=M_{\mathrm{HSOC}_1}=M_{(\mathrm{A-B})}\cup M_{\mathrm{D}}=$$

$$\begin{bmatrix} t^{2}(\perp \mathrm{R}_{41}) \\ r^{0} \end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix} t^{2}(\perp \mathrm{R}_{13}) \\ r^{1}(\parallel \mathrm{R}_{13}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{1}(\parallel \mathrm{R}_{13}) \end{bmatrix}$$

易知 SOC_2、SOC_3 为无约束支链,为

$$M_{b2}=M_{b3}=\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{3} \end{bmatrix}$$

由式(2)可得

$$M_{Pa}=M_{\mathrm{HSOC}_1}\cap M_{b3}=$$

$$\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{1}(\parallel \mathrm{R}_{13}) \end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{1}(\parallel \mathrm{R}_{13}) \end{bmatrix}$$

因此,当静平台 0 上的 4 个转动副 R_{11}、R_{21}、R_{31} 和 R_{41} 为主动副时,动平台 1 即产生 3 个移动和 1 个转动(绕转动副 R_{13} 的轴线)输出。

1.2.2 自由度计算

并联机构全周 DOF 一般公式[15]为

$$F=\sum_{i=1}^{m} f_i-\sum_{j=1}^{v}\xi_{Lj} \tag{4}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{v}\xi_{Lj}=\dim.\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{j}M_{b_i}\right)\cup M_{b_{(j+1)}}\right\} \tag{5}$$

$$v=m-n+1$$

式中　F——机构自由度

f_i——第 i 个运动副自由度

m——运动副数　　n——构件数

v——独立回路数

ξ_{Lj}——第 j 个独立回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^{j}M_{b_i}$——前 j 条支链组成的子并联机构 POC 集

$M_{b_{(j+1)}}$——$j+1$ 条支链末端构件的 POC 集

由支链 A、B 组成的第 1 个回路,记作$\{\mathrm{R}_{11}-\mathrm{P}^*-\mathrm{P}^*-\mathrm{R}^*-\mathrm{R}^*-\mathrm{R}_{43}/\!/\mathrm{R}_{42}/\!/\mathrm{R}_{41}\}$(其中,4S 平行四边形等效于 $\mathrm{P}^*-\mathrm{P}^*-\mathrm{R}^*-\mathrm{R}^*$),由式(5)得

$$\xi_{L1}=\dim.\{M_{\mathrm{A}}\cup M_{\mathrm{B}}\}=\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{3} \end{bmatrix}\right\}=6$$

由第 1 回路组成的第 1 个子并联机构的 DOF 和 POC 集,由式(4)得

$$F_{(\mathrm{A-B})}=\sum f-\xi_{L1}=(5+3)-6=2$$

由式(3)可得

$$M_{(\mathrm{A-B})}=\begin{bmatrix} t^{2}(\perp \mathrm{R}_{41}) \\ r^{0} \end{bmatrix}$$

由第 1 个子并联机构与支链 D、左侧无约束支链 SOC_2 构成第 2 个回路,记作$\{\mathrm{R}_{12}-\mathrm{R}_{13}-\mathrm{S}_{23}-\mathrm{S}_{22}-\mathrm{R}_{21}\}$,由式(5)得

$$\xi_{L2}=\dim.\{M_{(\mathrm{A-B})}\cup M_{\mathrm{D}}\cup M_{\mathrm{SOC}_2}\}=$$

$$\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^{2}(\perp \mathrm{R}_{41}) \\ r^{0} \end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix} t^{2} \\ r^{1} \end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{3} \end{bmatrix}\right\}=\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{3} \end{bmatrix}\right\}=6$$

因此,由第 2 回路组成的第 2 个子并联机构的 DOF、POC 集,由式(4)得

$$F_{(\mathrm{A-B-D-SOC_2})}=\sum f-(\xi_{L1}+\xi_{L2})=$$

$$(8+8)-(6+6)=4$$

由式(1)、(2)得

$$M_{(\mathrm{A-B-D-SOC_2})}=$$

$$\left\{\begin{bmatrix} t^{2} \\ r^{0} \end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix} t^{2} \\ r^{1} \end{bmatrix}\right\}\cap\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{1}(\parallel \mathrm{R}_{13}) \end{bmatrix}$$

由第 2 个子并联机构与右侧无约束支链 SOC_3 构成第 3 个回路,记作$\{\mathrm{S}_{33}-\mathrm{S}_{32}-\mathrm{R}_{31}\}$,由式(5)得

$$\xi_{L3}=\dim.\{M_{(\mathrm{A-B-D-SOC_2})}\cup M_{\mathrm{SOC}_3}\}=\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{3} \end{bmatrix}\right\}=6$$

因此,由式(4)得机构自由度

$$F=\sum_{i=1}^{m} f_i-\sum_{j=1}^{v}\xi_{Lj}=(8+8+6)-(6+6+6)=4$$

1.2.3 耦合度计算

由基于单开链(SOC)单元的机构组成原理[15,17-18]知,任一机构可分解为一系列单开链,第 j 个单开链(SOC)的约束度为

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m_j} f_i-I_j-\xi_{Lj}\Rightarrow\begin{cases}\Delta_j^{-}=-5,-4,-3,-2,-1\\ \Delta_j^{0}=0\\ \Delta_j^{+}=+1,+2,+3\end{cases} \tag{6}$$

式中　m_j——第 j 个 SOC 的运动副数

I_j——第 j 个 SOC 的驱动副数

进一步,一组有序的 v 个 SOC 可构成一个独立回路数为 v 的基本运动链(Basic kinematics chain, BKC),对一个 BKC 而言,须

$$\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|=0$$

因此,耦合度为

$$\kappa=\Delta_j^+=|\Delta_j^-|=\frac{1}{2}\min\left\{\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|\right\} \tag{7}$$

BKC 分解为 v 个 SOC(Δ_j),可有多种分配方案,取($\sum|\Delta_j|$)为最小者。κ 揭示了机构基本回路变量之间的关联、依赖程度;κ 越大,机构的运动学、动力学分析越复杂。

1.2.2 节自由度计算中,已计算出上述 3 个回路的独立位移方程数分别为 $\xi_{L1}=\xi_{L2}=\xi_{L3}=6$,因此,第 1 个回路的约束度 Δ_1,由式(6)得 $\Delta_1=8-2-6=0$,表明:第 1 回路已构成 BKC_1,其耦合度 $\kappa_1=0$,其运动位置正解可直接求出。

而第 2、3 回路的约束度 Δ_2、Δ_3 分别为 $\Delta_2=8-1-6=1$、$\Delta_3=6-1-6=-1$。由式(7)得 $\kappa_2=\frac{1}{2}(|+1|+|-1|)=1$。

因此,由第 2、3 回路构成 BKC_2,表明该 BKC 的位置正解须由第 2、3 回路联立求解才能求得,且只须设定一个虚拟变量。

总之,该机构包含 BKC_1、BKC_2,其耦合度分别为 $\kappa_1=0$,$\kappa_2=1$,且主动副分别分布在这两个不同的 BKC 内,因此,该机构具有运动部分解耦性,且机构的位置正解,可通过 BKC_1、BKC_2 依次逐一求得。

2 位置分析

2.1 基于序单开链的机构位置正解求解原理

由文献[15,18-19]可知,因任一机构可分解为若干个 BKC,而每个 BKC 又可分解出约束度为正值、零、负值 3 种形式的单开链,因此,机构位置正解的求解,可转换为 3 种单开链的位置求解,而这 3 种单开链的约束特性及其建模方法为:

(1)约束度为正值的 SOC(Δ_j^+),会使机构自由度增加 Δ_j^+;为确定其运动,需在约束度为正值的 SOC(Δ_j^+)上设定 Δ_j^+ 个虚拟变量($\Delta_j^+=\kappa$)。

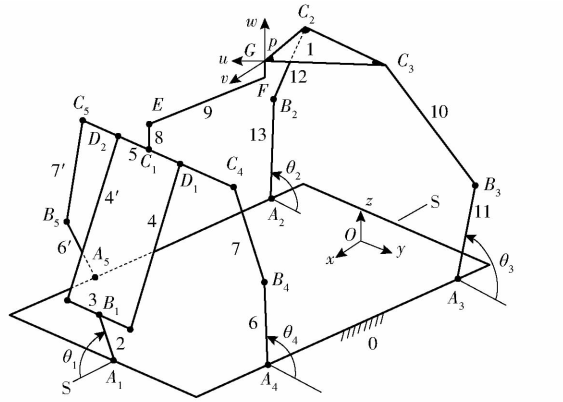
(2)约束度为零的 SOC(Δ_j^0),不影响机构自由度,其运动具有确定性,即其位置正解能独立求解。

(3)约束度为负值的 SOC(Δ_j^-),使机构自由度减少 $|\Delta_j^-|$,即对机构施加了 $|\Delta_j^-|$ 个约束方程($|\Delta_j^-|=\kappa$)。

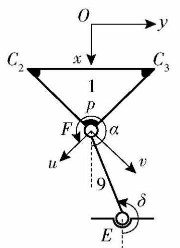
这样,因 SOC(Δ_j^+)中的虚拟变量数目 Δ_j^+,恰等于约束方程数目 $|\Delta_j^-|$,因此,易建立含 Δ_j^+ 个变量的位置方程;对本机构而言,$\kappa=1$,因此,可得到含一个变量的高次方程求得其封闭解,或用一维搜索法直接求得数值解。

2.2 参数标注

为方便理解,建立图 1 机构运动学模型,如图 2a 所示,因冗余支链正常情况下处于随动状态,对机构的正常工作不起作用,因此,机构运动学分析时,可不考虑图 2a 中的冗余支链(即 $A_5-B_5-C_5$)。



(a) 3T1R并联机构运动学模型



(b) 动平台姿态角α、虚拟输入角δ的定义

图 2 3T1R 并联机构运动学建模

Fig. 2 Kinematic modeling of 3T1R parallel mechanism

该机构静平台 0 为矩形,A_1、A_2、A_3、A_4 分别表示位于静平台 0 上的 4 个转动副 R_{11}、R_{21}、R_{31} 和 R_{41} 的位置。在静平台上建立 $Oxyz$ 坐标系,坐标系原点 O 位于 A_2 和 A_3 连线的中点,且 x 轴与 R_{11} 的轴线相互垂直,y 轴与 R_{11} 的轴线相互平行,z 轴由右手法则确定;而动平台 1 为等腰直角三角形,在动平台 1 上建立 $puvw$ 坐标系,原点 p 位于直角边的交点上,u 轴平行于 C_3 点所在的直角边,v 轴平行于 C_2 点所在的直角边,w 轴由右手法则确定。

设 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 分别为转动副 R_{11}、R_{21}、R_{31}、R_{41} 的输入角,其定义如图 1 所示;动平台姿态角 α 为 u 轴与 x 轴正向的夹角,而在位置正解求解时设定的虚拟输入变量 δ(见 2.3.2 节)为杆 9 与 x 轴正向的夹角,如图 2b 所示。

该机构的结构参数为:动平台 1 直角边长为 l_3,主动杆 $A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3=A_4B_4=l_4$($l_4<l_1$);从动杆 $B_1C_1=B_2C_2=B_3C_3=B_4C_4=l_5$;其他尺寸 $C_1D_1=D_1C_4=l_6$,$EF=l_7$,$C_1E=FG=l_8$。易知,在静坐标系 $Oxyz$ 下,点 A_1、A_2、A_3、A_4 的坐标分别为($2l_1$,0,0)、(0,$-l_2$,0)、(0,l_2,0)、(l_1,l_2,0)。

2.3 位置正解求解

正解问题可描述为：已知主动输入角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4，求动平台 1 上 p 点的位置(x,y,z)及姿态角 α。

2.3.1 BKC_1的位置求解

易求得点 B_1、B_2、B_3、B_4 的绝对坐标分别为：$(2l_1+l_4\cos\theta_1, 0, l_4\sin\theta_1)$、$(0, -l_2+l_4\cos\theta_2, l_4\sin\theta_2)$、$(0, l_2+l_4\cos\theta_3, l_4\sin\theta_3)$、$(l_1, l_2+l_4\cos\theta_4, l_4\sin\theta_4)$。

因 BKC_1的 $\kappa_1=0$，因此，输出杆 5 的位置$(x_{C_1}, y_{C_1}, z_{C_1})$计算如下：

由式(3)可知，输出杆 5 的输出运动为 2T，其运动始终位于 yOz 平面内，因此 $x_{C_1}=l_1$，即点 C_4 的坐标为$(l_1, y_{C_1}+2l_6, z_{C_1})$。

由杆长约束 $B_1C_1=B_4C_4=l_5$，有位置约束方程

$$\begin{cases}(x_{B_1}-l_1)^2+y_{C_1}^2+(z_{B_1}-z_{C_1})^2=l_5^2\\(y_{B_4}-y_{C_1}-2l_6)^2+(z_{B_4}-z_{C_1})^2=l_5^2\end{cases}\tag{8}$$

两式相减得

$$Hy_{C_1}+Mz_{C_1}=N$$

若 $H=M=0$，则 $N=-(x_{B_1}-l_1)^2=0$，但由于 $l_4<l_1$，即 $x_{B_1}>l_1$，因此，H、M 不能同时为零。

当 $H=0$ 时

$$\begin{cases}z_{C_1}=\dfrac{N}{M}\\y_{C_1}=\pm\sqrt{l_5^2-(x_{B_1}-l_1)^2-(z_{B_1}-z_{C_1})^2}\end{cases}\tag{9}$$

当 $H\neq0$ 时

$$\begin{cases}z_{C_1}=\dfrac{J\pm\sqrt{J^2-4PQ}}{2P}\\y_{C_1}=\dfrac{N-Mz_{C_1}}{H}\end{cases}\tag{10}$$

其中 $H=2(y_{B_4}-2l_6)$　　$M=2(z_{B_4}-z_{B_1})$

$$N=(y_{B_4}-2l_6)^2+z_{B_4}^2-z_{B_1}^2-(x_{B_1}-l_1)^2$$

$$P=H^2+M^2\qquad J=2(MN+z_{B_1}H^2)$$

$$Q=H^2[(x_{B_1}-l_1)^2+z_{B_1}^2-l_5^2]+N^2$$

2.3.2 BKC_2的位置求解

因 BKC_2的 $\kappa_2=1$，且包含 2 个回路，须联立求解如下：

(1)在 $\Delta_2=1$ 的回路$\{R_{12}-R_{13}-S_{23}-S_{22}-R_{21}\}$上设定虚拟输入角 δ(图 2b)，则动平台 p 点的坐标为

$$\begin{cases}x'=l_1+l_7\cos\delta\\y'=y_{C_1}+l_7\sin\delta\\z'=z_{C_1}+2l_8\end{cases}\tag{11}$$

在动坐标系 $puvw$ 下，${}^pC_2$、${}^pC_3$的坐标分别为$(0, -l_3, 0)$、$(-l_3, 0, 0)$。设动坐标系相对于静坐标系的旋转矩阵为

$$\boldsymbol{R}(z,\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

则可得到 C_2、C_3在静坐标系中的坐标为

$$C_2=\boldsymbol{R}(z,\alpha)^pC_2+p=(l_3\sin\alpha+x', -l_3\cos\alpha+y', z')^{\mathrm T}\tag{12}$$

$$C_3=\boldsymbol{R}(z,\alpha)^pC_3+p=(-l_3\cos\alpha+x', -l_3\sin\alpha+y', z')^{\mathrm T}\tag{13}$$

由杆长约束 $B_2C_2=l_5$，建立约束方程

$$(x_{B_2}-x_{C_2})^2+(y_{B_2}-y_{C_2})^2+(z_{B_2}-z_{C_2})^2=l_5^2\tag{14}$$

整理可得

$$J_1\sin\alpha+P_1\cos\alpha+Q_1=0$$

其中 $J_1=2l_3x'P_1=2l_3(y_{B_2}-y')$

$$Q_1=l_3^2+(y_{B_2}-y')^2+(z_{B_2}-z')^2+(x')^2-l_5^2$$

$$\alpha=2\arctan\frac{J_1\pm\sqrt{J_1^2+P_1^2-Q_1^2}}{P_1-Q_1}\quad(P_1\neq Q_1)\tag{15}$$

(2)在 $\Delta_3=-1<0$ 的 SOC_3 回路上建立约束方程

由$\{S_{33}-S_{32}-R_{31}\}$上的杆长约束 $B_3C_3=l_5$，得

$$f(\delta)=(x_{B_3}-x_{C_3})^2+(y_{B_3}-y_{C_3})^2+(z_{B_3}-z_{C_3})^2-l_5^2\tag{16}$$

通过不断改变 δ 的值，可以使 $f(\delta)\to0$，从而求得真实 δ；再将 δ 的真实值代回式(11)、(15)，即可得到动平台 1 的 p 点坐标及其姿态角 α。

由式(11)知，$x=\varphi(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$、$y=f(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$、$z=\phi(\theta_1,\theta_4)$、$\alpha=\eta(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$，因此，该机构具有输入-输出(I-O)部分运动解耦性。

2.4 位置逆解求解

逆解问题为：已知动平台 p 的坐标(x,y,z)和姿态角 α，求输入角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4。

由杆长约束 $EF=l_7$，整理可得

$$(l_1-x_F)^2+(y_E-y)^2=l_7^2$$

$$\begin{cases}x_E=l_1\\y_E=y\pm\sqrt{l_7^2-(l_1-x)^2}\\z_E=z-l_8\end{cases}\tag{17}$$

所以，C_1点坐标为$(l_1, y\pm\sqrt{l_7^2-(l_1-x)^2}, z-2l_8)$。

因式(12)、(13)已求得点 C_2、C_3的坐标，由杆长约束 $B_1C_1=B_2C_2=B_3C_3=B_4C_4=l_5$，有

$$\begin{cases}(x_{B_1}-x_{C_1})^2+(y_{B_1}-y_{C_1})^2+(z_{B_1}-z_{C_1})^2=l_5^2\\(x_{B_2}-x_{C_2})^2+(y_{B_2}-y_{C_2})^2+(z_{B_2}-z_{C_2})^2=l_5^2\\(x_{B_3}-x_{C_3})^2+(y_{B_3}-y_{C_3})^2+(z_{B_3}-z_{C_3})^2=l_5^2\\(x_{B_4}-x_{C_4})^2+(y_{B_4}-y_{C_4})^2+(z_{B_4}-z_{C_4})^2=l_5^2\end{cases} \tag{18}$$

由此可得

$$\theta_i=2\arctan\frac{2z_il_4\pm\sqrt{4z_i^2l_4^2-a_ic_i}}{a_i}\quad(i=1,2,3,4) \tag{19}$$

其中 $z_1=z_4=z_{C_1}\quad z_2=z_3=z$

$$a_1=l_1^2-2l_1l_4+l_4^2-l_5^2+y_{C_1}^2+z_{C_1}^2$$

$$c_1=l_1^2+2l_1l_4+l_4^2-l_5^2+y_{C_1}^2+z_{C_1}^2$$

$$a_2=x_{C_2}^2+l_4^2+2l_2l_4+l_2^2+2l_2y_{C_2}+y_{C_2}^2+z_{C_2}^2-l_5^2+2l_4y_{C_2}$$

$$c_2=x_{C_2}^2+l_4^2+l_2^2+2l_2y_{C_2}+y_{C_2}^2+z_{C_2}^2-l_5^2-2l_2l_4-2l_4y_{C_2}$$

$$a_3=x_{C_3}^2+l_4^2-2l_2l_4+l_2^2-2l_2y_{C_3}+y_{C_3}^2+z_{C_3}^2-l_5^2+2l_4y_{C_3}$$

$$c_3=x_{C_3}^2+l_4^2+l_2^2-2l_2y_{C_3}+y_{C_3}^2+z_{C_3}^2-l_5^2+2l_2l_4-2l_4y_{C_3}$$

$$a_4=l_4^2+l_2^2-2l_2y_{C_4}+y_{C_4}^2+z_{C_4}^2-l_5^2-2l_2l_4+2l_4y_{C_4}$$

$$c_4=l_4^2+l_2^2-2l_2y_{C_4}+y_{C_4}^2+z_{C_4}^2-l_5^2+2l_2l_4-2l_4y_{C_4}$$

由式(19)可知,输入角 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 均有两组解,通过排列组合,一共可以得到 $2^4=16$ 组解,同时,C_1点的坐标也存在两组解,所以,该机构一共有 $2\times2^4=32$ 组逆解。

2.5 位置正逆解的实例验算

2.5.1 正解算例

设并联机构结构参数为 $l_1=300$ mm、$l_2=300$ mm、$l_3=150$ mm、$l_4=250$ mm、$l_5=800$ mm、$l_6=100$ mm、$l_7=200$ mm、$l_8=25$ mm。

设4个输入角分别为 $\theta_1=37.23°$、$\theta_2=156.22°$、$\theta_3=57.18°$、$\theta_4=21.43°$;$\theta_1=62.83°$、$\theta_2=121.77°$、$\theta_3=72.43°$、$\theta_4=46.78°$。

设虚拟输入角 δ 的范围为(0°,360°),采用一维搜索方法,分别求得两组实数正解,如表1所示。

表1 位置正解数值

Tab.1 Numerical values of direct kinematics

组数	序号	x/mm	y/mm	z/mm	α/(°)
Ⅰ	1	135.147 1	−204.373 8	819.833 5	−100.02
	2	103.320 2	−54.841 3	819.833 5	9.84
Ⅱ	1	105.112 7	−121.689 9	952.547 3	−86.50
	2	116.809 4	3.500 0	952.547 3	−4.98

2.5.2 逆解算例

将表1中第Ⅰ组正解中序号1的数据,代入逆解(19),求得4个输入角分别为 $\theta_1'=37.230\,8°$、$\theta_2'=156.222\,7°$、$\theta_3'=57.181\,2°$、$\theta_4'=21.428\,6°$。

所得数值与求解正解中给定的第Ⅰ组4个输入角一致;用表1中其余3组正解的数据,同样可得相同的输入角,因此,正解、逆解公式推导正确。

3 工作空间和转动能力分析

3.1 工作空间分析

并联机构的可达工作空间,是指在考虑运动副转角范围(球副转角为±30°)、杆长不干涉情况下,末端执行器的工作区域,它是衡量并联机器人性能的一个重要指标。本文采用极限边界搜索法对该并联机构的工作空间进行分析,首先,根据杆长来设定工作空间的搜索范围,然后,基于位置逆解式(19),搜索所有满足约束条件的点,由这些点组成的三维图即为该并联机构的工作空间。

确定空间三维搜索范围为:600 mm ≤ z ≤ 1 000 mm,$-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$,$0\leqslant\rho\leqslant800$ mm,该搜索范围只需要略大于杆件的活动范围即可,通过 Matlab 软件编程,得到该并联机构的三维工作空间如图3所示;取不同 z 值时的 $x-y$ 截面图,如图4所示。

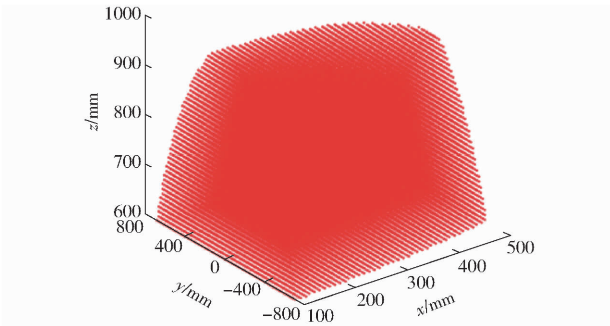


图3 工作空间三维图

Fig.3 Three dimensional workspace

由图4可得:

(1)在 $z\in[600$ mm,1 000 mm$]$ 范围内,工作空间截面连续,且随着 z 增加,截面面积在逐渐缩小。

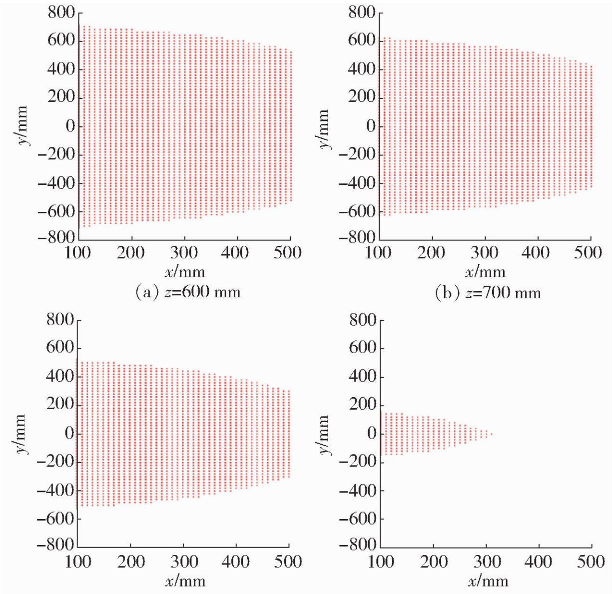
(2)工作空间对称于 x 轴,且对称性好,这与其整体结构关于S−S线对称一致。

(3)由于杆5的运动始终位于 yOz 平面内,故动平台坐标原点 p 在 x 方向上的极限位置,只与杆9的杆长 l_7 有关,故工作空间仅在 $x\in[100$ mm,500 mm$]$ 上存在。

3.2 转动能力分析

动平台转动能力指的是末端执行器在工作区域

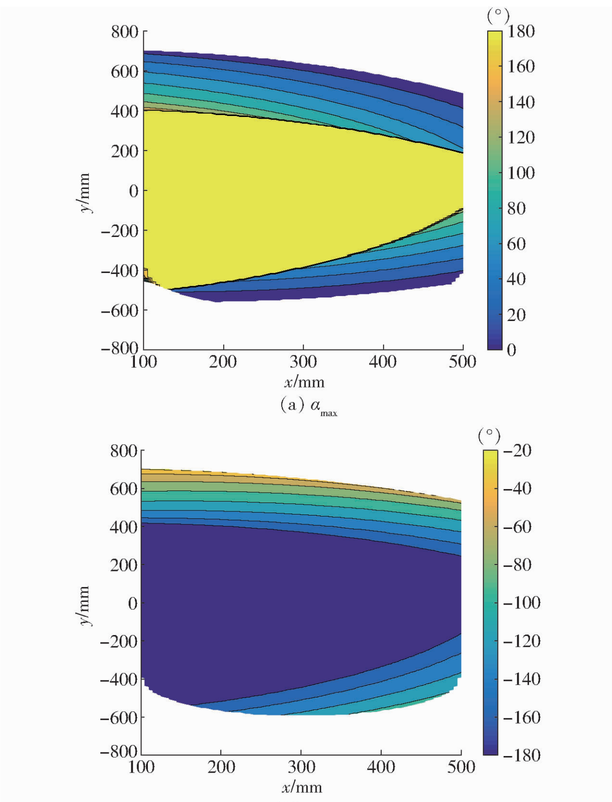
内的转角范围，是衡量并联机构输出转动灵活性的重要指标。本文仍采用与求解工作空间一样的极限边界搜索法，基于逆解式(19)分析某一固定 z 处该并联机构的转动能力。现取 $z=600$ mm，通过 Matlab 软件求得该高度 $x-y$ 截面内的转角 α 的范围，如图 5 所示。由图 5 可知，动平台在 $z=600$ mm 时，转角 α 的范围很大，能达到$[-180°,180°]$的



(a) z=600 mm　(b) z=700 mm　(c) z=800 mm　(d) z=1000 mm

图 4　工作空间的 $x-y$ 截面图

Fig. 4　$x-y$ section of workspace



(a) α_{max}　(b) α_{min}

图 5　$z=600$ mm 时并联机构各点转角的分布

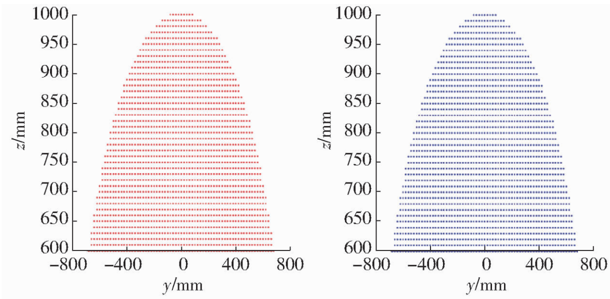
Fig. 5　Distribution of rotation angles of PM at $z=600$ mm

区域面积为 0.28 m^2，约占总区域面积(0.41 m^2)的 68%，表明在该平面内，动平台具有较大的转动能力；其余不同 z 时各截面的转动能力求解与此相同，同样表明具有良好的转动能力，不再一一赘述。

3.3　冗余支链对工作空间和转动能力的影响

由图 1 可知，支链 A、B 和冗余支链 C 组成了一个子并联结构，其末端点 C_1 的输出运动为 2T 且始终位于 yOz 平面内，所以只需分析支链 C 是否对点 C_1 的运动范围存在约束，即可判定其是否对机构的工作空间和转动能力产生影响。

分别求解含/不含冗余支链时点 C_1 的运动范围，如图 6 所示。



(a) 不含冗余支链　(b) 含冗余支链

图 6　含/不含冗余支链时点 C_1 的运动范围

Fig. 6　Motion range of C_1 point with/without redundant chain

由图 6 可知，在加入冗余支链后，C_1点的运动范围没有发生变化，所以该冗余支链对机构的工作空间和转动能力没有影响。

4　奇异位置分析

当机构处于奇异位置时，运动会出现分岔现象，此时机构的运动不具有确定性。因此，在并联机构的设计时，有必要对其可能存在的奇异位置进行分析。本文通过对位置逆解公式的求导得出雅可比矩阵，进一步分析矩阵来得到该并联机构可能存在的奇异位置。

4.1　雅可比矩阵求解

设该机构动平台的输出速度为 $\boldsymbol{V}=[\dot{x}\quad \dot{y}\quad \dot{z}\quad \dot{\alpha}]^{\mathrm{T}}$，主动输入角速度为 $\boldsymbol{\omega}=[\theta_1\quad \theta_2\quad \theta_3\quad \theta_4]^{\mathrm{T}}$。将式(18)两边同时对时间 t 求导，可得

$$\boldsymbol{J}_p\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}_q\boldsymbol{\omega} \tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_p=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{J}_q = -\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & u_{33} & \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} \tag{21}
$$

而

$$u_{11} = (z_{B_1} - z_{C_1}) l_4 \cos\theta_1 - (x_{B_1} - x_{C_1}) l_4 \sin\theta_1$$

$$u_{22} = (z_{B_2} - z_{C_2}) l_4 \cos\theta_2 - (y_{B_2} - y_{C_2}) l_4 \sin\theta_2$$

$$u_{33} = (z_{B_3} - z_{C_3}) l_4 \cos\theta_3 - (y_{B_3} - y_{C_3}) l_4 \sin\theta_3$$

$$u_{44} = (z_{B_4} - z_{C_4}) l_4 \cos\theta_4 - (y_{B_4} - y_{C_4}) l_4 \sin\theta_4$$

$$v_{11} = \pm \frac{y_{C_1}(l_1 - x)}{\sqrt{l_7^2 - (l_1 - x)^2}}$$

$$v_{12} = y_{C_1} - y_{B_1} \quad v_{13} = z_{C_1} - z_{B_1} \quad v_{14} = 0$$

$$v_{21} = x_{C_2} - x_{B_2} \quad v_{22} = y_{C_2} - y_{B_2} \quad v_{23} = z_{C_2} - z_{B_2}$$

$$v_{24} = (y_{C_2} - y_{B_2}) l_3 \sin\alpha + x_{C_2} l_3 \cos\alpha$$

$$v_{31} = x_{C_3} - x_{B_3} \quad v_{32} = y_{C_3} - y_{B_3}$$

$$v_{33} = z_{C_3} - z_{B_3}$$

$$v_{34} = (y_{C_3} - y_{B_3}) l_3 \cos\alpha + x_{C_3} l_3 \sin\alpha$$

$$v_{41} = \pm \frac{(y_{B_4} - y_{C_4})(l_1 - x)}{\sqrt{l_7^2 - (l_1 - x)^2}} \quad v_{42} = y_{C_4} - y_{B_4}$$

$$v_{43} = z_{C_4} - z_{B_4} \quad v_{44} = 0$$

4.2 奇异位置求解

当雅可比矩阵的 $\boldsymbol{J}_p$ 和 $\boldsymbol{J}_q$ 中只要有一个矩阵的行列式为零,该机构就会出现奇异位置。据此,可将并联机构的奇异位置分为 3 类:输入奇异、输出奇异、综合奇异。

4.2.1 输入奇异

此时,由 $\det(\boldsymbol{J}_q) = 0$,得 $\boldsymbol{J}_q$ 矩阵行列式的解的集合为

$$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \tag{22}$$

式(22)包含以下 4 种情况:

(1) $W_1 = (z_{B_1} - z_{C_1}) l_4 \cos\theta_1 - (x_{B_1} - x_{C_1}) l_4 \sin\theta_1 = 0$,即杆 2 和平行四边形短边中点连线在 Oxz 面上的投影共线,如图 7a 所示。

(2) $W_2 = (z_{B_2} - z_{C_2}) l_4 \cos\theta_2 - (y_{B_2} - y_{C_2}) l_4 \sin\theta_2 = 0$,即杆 13 和杆 12 在 Oyz 面上投影共线,如图 7b 所示。

(3) $W_3 = (z_{B_3} - z_{C_3}) l_4 \cos\theta_3 - (y_{B_3} - y_{C_3}) l_4 \sin\theta_3 = 0$,即杆 11 和杆 10 在 Oyz 面上的投影共线,如图 7c 所示。

(4) $W_4 = (z_{B_4} - z_{C_4}) l_4 \cos\theta_4 - (y_{B_4} - y_{C_4}) l_4 \sin\theta_4 = 0$,即杆 6 和杆 7 在 Oyz 面上的投影共线,在当前的杆长条件下不会出现这种情况,因此,这一种奇异位置不存在。

4.2.2 输出奇异

此时 $\det(\boldsymbol{J}_p) = 0$,将矩阵 $\boldsymbol{J}_p$ 看作 4 个行向量,即 $\boldsymbol{J}_p = [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3 \quad \boldsymbol{e}_4]$。

为使 $\det(\boldsymbol{J}_p) = 0$,有以下 3 种情况:

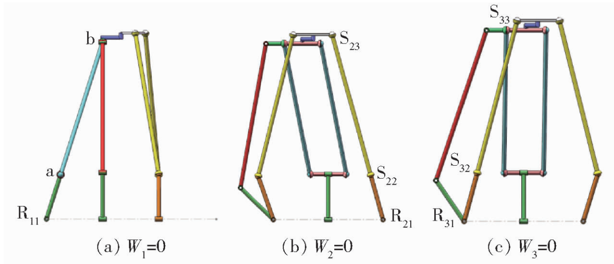


图 7 输入奇异位置

Fig. 7 Input singularity

(1)两个向量线性相关

设 $k\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$(即 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 线性相关),此情形可导出 3 种奇异条件,由式(21)可得:

①$k[v_{12} \quad v_{13}] = [v_{22} \quad v_{23}]$,即

$$\frac{y_{C_1} - y_{B_1}}{z_{C_1} - z_{B_1}} = \frac{y_{C_2} - y_{B_2}}{z_{C_2} - z_{B_2}}$$

即平行四边形短边中点连线和杆 12 在 Oyz 平面上的投影平行,如图 8a 所示。

②$kv_{11} = v_{21}$,即

$$\frac{y_{C_1} - y_F}{x_{C_1} - x_F} = \frac{y_{C_2} - y_{B_2}}{x_{C_2} - x_{B_2}}$$

即杆 12 和杆 9 在 Oxy 平面上的投影平行,如图 8b所示。

③$kv_{14} = v_{24}$,即

$$\frac{y_{C_2} - y_{B_2}}{x_{C_2} - x_{B_2}} \tan\alpha = -1$$

即杆 12 和动平台上球副 S_{33} 所处的直角边在 Oxy 平面上的投影垂直,如图 8b 所示。

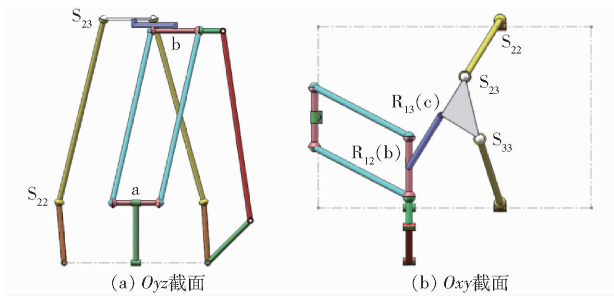


图 8 输出奇异位置(1)

Fig. 8 Output singularity (1)

设 $k\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2$(即 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 线性相关),此情形可导出两种奇异条件:

①$k[v_{31} \quad v_{32} \quad v_{33}] = [v_{21} \quad v_{22} \quad v_{23}]$,即

$$\frac{x_{C_2} - x_{B_2}}{x_{C_3} - x_{B_3}} = \frac{y_{C_2} - y_{B_2}}{y_{C_3} - y_{B_3}} = \frac{z_{C_2} - z_{B_2}}{z_{C_3} - z_{B_3}}$$

即杆 12 和杆 10 平行,如图 9a 所示。

②$kv_{34} = v_{24}$,即

$$v_{21}(\sin\alpha - \cos\alpha) = v_{22}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

即动平台的转角为 $-45°$且动平台斜边与 x 轴重合,如图 9b 所示。

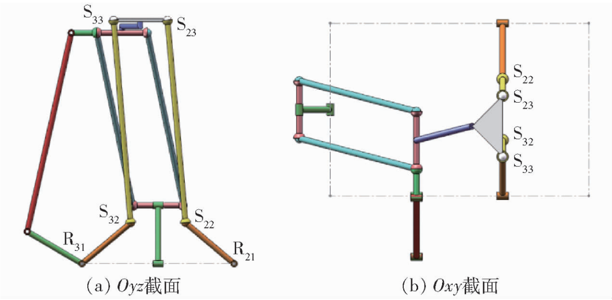


图 9　输出奇异位置(2)

Fig. 9　Output singularity(2)

两向量线性相关的其他组合分析与此类似，不再一一赘述。

(2)3 个向量线性相关

设 $\boldsymbol{e}_2 = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_4 (k_1k_2 \neq 0)$，则有

①$\begin{bmatrix} v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} v_{42} \\ v_{43} \end{bmatrix}$，即

$$\frac{y_{C_2} - y_{B_2}}{z_{C_2} - z_{B_2}} = \frac{k_1(y_{C_1} - y_{B_1}) + k_2(y_{C_4} - y_{B_4})}{k_1(z_{C_1} - z_{B_1}) + k_2(z_{C_4} - z_{B_4})}$$

即平行四边形短边中点连线、杆 12 和杆 6 在 Oyz 平面上的投影不平行，如图 10a 所示。

②$k_1v_{11} + k_2v_{41} = v_{21}$，即

$$\frac{y_{C_1} - y_F}{x_{C_1} - x_F} = \frac{y_{C_2} - y_{B_2}}{x_{C_2} - x_{B_2}}$$

即杆 12 和杆 9 在 Oxy 平面上投影平行，如图 10b 所示。

③$k_1v_{14} + k_2v_{44} = v_{24}$，即

$$\frac{y_{C_2} - y_{B_2}}{x_{C_2} - x_{B_2}}\tan\alpha = -1$$

即杆 12 和动平台上球副 S_{33} 所处的直角边在 Oxy 平面上的投影垂直，如图 10b 所示。

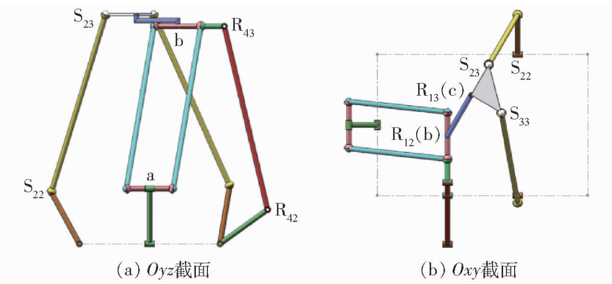


图 10　输出奇异位置(3)

Fig. 10　Output singularity (3)

其余情况分析过程类似，不再一一赘述。

(3)4 个向量线性相关

设 $\boldsymbol{e}_2 = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_3 + k_3\boldsymbol{e}_4 (k_1k_2k_3 \neq 0)$，结合前面两种情况的分析，此时，$k_1$、$k_2$、$k_3$ 的值无法解出，此种情况不存在。

4.2.3　综合奇异

此时，$\det(\boldsymbol{J}_p) = \det(\boldsymbol{J}_q) = 0$，即输入奇异和输出奇异同时发生。例如，取输入奇异中的 $A_2 = 0$ 和输出奇异中的情况(2)，就可以同时满足两个矩阵的行列式均为 0，出现综合奇异，三维模型如图 11 所示。

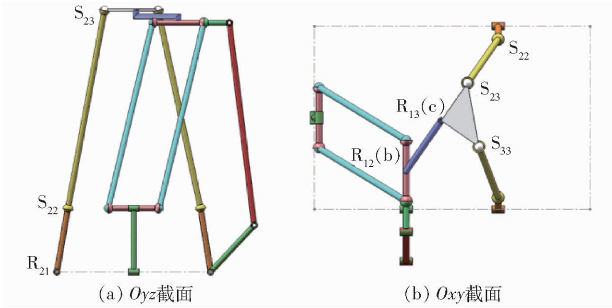


图 11　综合奇异位置

Fig. 11　Comprehensive singularity

4.3　冗余驱动支链消除奇异位置的说明

从上述奇异位置的分析来看，并联机构的奇异位置，本质上表现为输入-输出关系的雅可比矩阵降秩，使末端执行器的自由度发生了变化。假设雅可比矩阵为一个 $n \times n$ 的方阵，那么当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}_p) < n$ 时就意味着机构发生了奇异；为消除奇异，就应使 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}_p) = n$，为此，可通过冗余驱动支链来实现[20-21]。

设一个非冗余机构的雅可比矩阵为 $\boldsymbol{J}$，当该机构出现奇异时，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}) = n - \xi < n$，其中，$\xi$ 为矩阵中每一项均为 0 的行数，由于矩阵的消法不改变矩阵的秩，故对此矩阵进行消法变换，可得式(23)中虚线部分所示的 $n \times n$ 矩阵。

此时，若增加 ξ 个驱动支链，得到一个新的矩阵

$$\boldsymbol{J}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n+\xi)\times n} \tag{23}$$

它为一个 $(n+\xi) \times n$ 的矩阵。该矩阵增加了 ξ 行非零行，此时，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}^*) = n$，即消除了机构的奇异位置。

一般来讲，增加冗余支链驱动的方法有两种，第 1 种方法是保持自由度不变，直接在并联机构上增

加驱动单元，这种方法简单，但会使机构变得不对称，不利于机构整体的运动；第2种方法是在原并联机构的基础上，增加一条相同的支链，它并不影响自由度变化，这种方法不仅使并联机构对称、刚度和稳定性好，而且可避免奇异位置。本文采用第2种方法，增设一条冗余驱动支链$\{-R_{51}-R_{52}-R_{53}-\}$，其结构与其右边的$\{-R_{41}-R_{42}-R_{43}-\}$完全一致，如图1、图4所示。

该机构原本的雅可比矩阵为一个4×4的方阵，通过上述奇异位置分析可知，当有两向量线性相关时，会发生奇异，使得$\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}_p)=3<4$。但当加入这样一条冗余支链后，其雅可比矩阵变为$5\times4$的矩阵，此时$\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}_p)=4$，即该矩阵满秩，机构的奇异位置被消除了。因此，该并联机构增设左边的冗余驱动支链，可使机构的奇异位置消除，同时，提高了机构的刚度和稳定性。

5 速度与加速度分析

5.1 速度公式推导

式(18)的4个方程，可表示成唯一形式：$f(x,y,z,\alpha)=0$，全微分后可得

$$\boldsymbol{J}_p\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}y\\\mathrm{d}z\\\mathrm{d}\alpha\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}_q\begin{bmatrix}\mathrm{d}\theta_1\\\mathrm{d}\theta_2\\\mathrm{d}\theta_3\\\mathrm{d}\theta_4\end{bmatrix}\tag{24}$$

对式(24)两边同时除以$\mathrm{d}t$得

$$\boldsymbol{J}_p\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}_q\dot{\boldsymbol{q}}$$

其中 $$\dot{\boldsymbol{X}}=[\dot{x}\quad\dot{y}\quad\dot{z}\quad\dot{\alpha}]$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}=[\dot{\theta}_1\quad\dot{\theta}_2\quad\dot{\theta}_3\quad\dot{\theta}_4]$$

当机构不存在奇异位置时，$\boldsymbol{J}_p$可逆，则

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{J}_q\dot{\boldsymbol{q}}\tag{25}$$

式(25)即为动平台原点p的速度正解公式。

5.2 加速度公式推导

取式(24)对时间t求导，可得

$$\boldsymbol{J}_p\begin{bmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\\\ddot{z}\\\ddot{\alpha}\end{bmatrix}+\boldsymbol{J}_q\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\\ddot{\theta}_2\\\ddot{\theta}_3\\\ddot{\theta}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K_1\\K_2\\K_3\\K_4\end{bmatrix}=0\tag{26}$$

令 $$\boldsymbol{K}_0=[K_1\quad K_2\quad K_3\quad K_4]$$

表示式(24)中$\boldsymbol{J}_p$和$\boldsymbol{J}_q$内各项元素对时间t的导数。

当机构不存在奇异位置时，$\boldsymbol{J}_p$可逆，则

$$\ddot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{J}_q\ddot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{K}_0\tag{27}$$

式(27)即为动平台原点p的加速度求解公式。

5.3 算例与仿真

取4个主动臂的输入角运动规律分别为$\theta_1=10°\cos t$、$\theta_2=-10°\cos t$、$\theta_3=10°\cos t$、$\theta_4=15°\cos t$。

则其输入角速度、加速度变化规律分别为$\dot{q}=[-10°\sin t,10°\sin t,-10°\sin t,-15°\sin t]$、$\ddot{q}=[-10°\cos t,10°\cos t,-10°\cos t,-15°\cos t]$。

通过Matlab软件编程计算，得到动平台1的速度与加速度，分别如表2、3所示。

表2 动平台速度

Tab.2 Velocity of moving platform

时间 t/s	$\dot{x}$/(mm·s^{-1})	$\dot{y}$/(mm·s^{-1})	$\dot{z}$/(mm·s^{-1})	$\dot{\alpha}$/(rad·s^{-1})
1	-4.995	21.031	-38.896	0.201
2	-1.694	17.877	-49.315	0.186
3	-0.102	2.141	-8.017	0.024
4	1.000	-13.420	41.999	-0.143
5	4.099	-23.824	46.841	-0.231

表3 动平台加速度

Tab.3 Acceleration of moving platform

时间 t/s	$\ddot{x}$/(mm·s^{-2})	$\ddot{y}$/(mm·s^{-2})	$\ddot{z}$/(mm·s^{-2})	$\ddot{\alpha}$/(rad·s^{-2})
1	2.894	17.294	-32.709	0.172
2	2.840	-14.996	17.688	-0.137
3	0.742	-15.165	56.179	-0.168
4	2.049	-16.139	33.569	-0.160
5	3.372	2.877	-22.618	0.044

同时，将该并联机构的三维模型，通过Solid－Works导入到ADAMS软件中进行仿真，得到动平台的速度与加速度曲线，分别如图12、13所示。

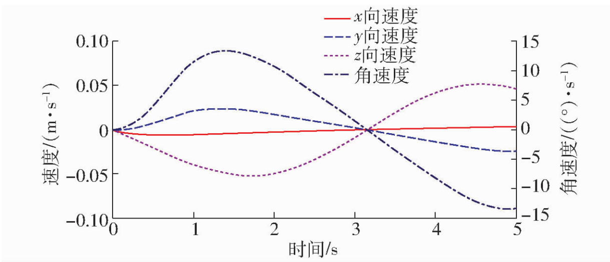


图12 动平台速度

Fig.12 Velocity curves of moving platform

通过分别对比表2和图12，以及表3和图13可以发现：

(1)运用Matlab对式(24)～(27)进行编程计算得到的数值，与运用ADAMS仿真得到的曲线基本一致，从而验证了所推导的速度与加速度公式的正确性。

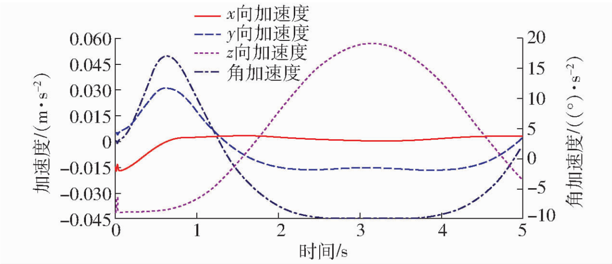


图 13　动平台加速度

Fig. 13　Acceleration curves of moving platform

(2)该机构动平台的速度、加速度曲线,变化连续平稳、无突变峰值,具有较好的运动稳定性。

6　结论

(1)揭示了 4 自由度 3T1R 并联机构的 POC、自由度、耦合度、运动耦合性等主要拓扑特征,简化了其运动学分析过程,建立了该机构基于序单开链的仅含一个虚拟变量的位置正解求解方程,并用一维搜索方法求解了机构的位置正解。

(2)基于导出的逆解公式,得到了该机构的工作空间和转动能力,得知其工作空间连续且具有良好的对称性,且动平台具有较大的转动能力。

(3)得到了该机构可能存在的 3 种奇异位置及其出现的几何条件。

参　考　文　献

[1] PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4-dof parallel robots[C]// IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics,Atlanta,GA,1999:508 – 513.

[2] KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4: a new parallel mechanism for Scara motions[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation,2003:1875 – 1880.

[3] LUC R. The Manta and the Kanuk:novel 4-DOF parallel mechanisms for industrial handling[C]// ASME Dynamic Systems and Control Division,IMECE'99 Conference,1999:831 – 844.

[4] 金琼, 杨廷力, 刘安心, 等. 基于单开链单元的三平移一转动并联机器人机构型综合及机构分类[J]. 中国机械工程,2001,12(9):1038 – 1043.
JIN Qiong, YANG Tingli, LIU Anxin, et al. Structural synthesis and classification of the four-dof parallel robot mechanisms based on the units of single-opened-chain[J]. China Mechanical Engineering,2001,12(9):1038 – 1043. (in Chinese)

[5] BRIOT S, BONEV I A. Pantopteron – 4: a new 3T1R decoupled parallel manipulator for pick-and-place applications[J]. Mechanism and Machine Theory,2010,45(5):707 – 721.

[6] CORBEL D, GOUTTEFARDE M, COMPANY O, et. al. Actuation redundancy as a way to improve the acceleration capabilities of 3T and 3T1R pick-and-place parallel manipulators[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics,2010,2(4): 041002 – 041002 – 13.

[7] AMINE S, MASOULEH M T, CARO S, et al. Singularity conditions of 3T1R parallel manipulators with identical limb structure[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics,2012,4(1):49 – 75.

[8] 黄田, 赵学满, 梅江平, 等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构:中国,202528189U[P]. 2012 – 11 – 14.

[9] 刘辛军, 谢福贵, 王立平, 等. 一种可实现 SCARA 运动的四自由度单动平台并联机构:中国,201210435375.1[P]. 2013 – 02 – 13.

[10] LI Zhibin, LOU Yunjiang, LI Zexiang, et al. Type synthesis, kinematic analysis, and optimal design of a novel class of Schönflies-motion parallel manipulators[J]. IEEE Transactions on Automation Science & Engineering, 2013, 10(3):674 – 686.

[11] XIE Fugui, LIU Xinjun. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform[J]. Journal of Mechanisms & Robotics, 2015,7(4): 041015 – 3.

[12] 朱小蓉, 宋月月, 孙晨, 等. 2RRUR – 2RSS 并联机构结构特性与运动学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(12): 408 – 415.
ZHU Xiaorong, SONG Yueyue, SUN Chen, et al. Structural characteristics and kinematic analysis for novel 2RRUR – 2RSS parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(12):408 – 415. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view-abstract.aspx? flag = 1&file-no = 20161252&journal-id = jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.12.052. (in Chinese)

[13] 杨桂林, 吴存存, 陈庆盈, 等. 3T1R 并联机构运动学分析与优化设计[J/OL]. 农业机械学报,2017,48(12):386 – 394,420.
YANG Guilin, WU Cuncun, CHEN Chinyin, et al. Kinematics analysis and design optimization of novel 3T1R parallel manipulator[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2017,48(12):386 – 394,420. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20171248&journal_id = jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.12.048. (in Chinese)

[14] 石志新, 叶梅燕, 罗玉峰, 等. 四自由度两模式并联机构结构综合与位置分析[J/OL]. 农业机械学报,2017,48(4): 383 – 389.
SHI Zhixin, YE Meiyan, LUO Yufeng, et al. Type synthesis and position analysis of 4-DOF parallel mechanisms with two operation modes[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2017,48(4):383 – 389. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20170451&journal_id = jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.04.051. (in Chinese)

(下转第 419 页)

CAI Yonglin, MA Yemeng. Motion decomposition for NC machining path based on redundant degree of freedom [J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2017, 41(4): 111 - 114, 122. (in Chinese)

[12] YANG J, ALTINTAS Y. A generalized on-line estimation and control of five-axis contouring errors of CNC machine tools [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2015, 88: 9 - 23.

[13] MUDCHAROEN A, MAKHANOV S S. Optimization of rotations for six-axis machining [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2011, 53(5 - 8): 435 - 451.

[14] DING S, HUANG X D, YU C J. Post processing for five-axis machine tools with pose error compensation [J]. Advanced Materials Research, 2014, 1037: 283 - 287.

[15] 杨旭静，周元生，陈泽忠，等．五轴数控加工中旋转轴运动引起的非线性误差分析与控制 [J]．机械工程学报，2012，48(3): 140 - 146.

YANG Xujing, ZHOU Yuansheng, CHEN Zezhong, et al. Analysis and control of tool path interpolation error in rotary axes motions of five-axis CNC milling [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(3): 140 - 146. (in Chinese)

[16] ZHANG K, ZHANG L, YAN Y. Single spherical angle linear interpolation for the control of non-linearity errors in five-axis flank milling [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 87(9 - 12): 1 - 11.

[17] LI H Y, LI X K, TIAN C C, et al. The simulation and experimental study of glossiness formation in belt sanding and polishing processes [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 90(1 - 4): 199 - 209.

[18] 吴昌林，丁和艳，陈义．材料去除深度与磨粒的关系建模方法研究 [J]．中国机械工程，2011，22(3): 300 - 304.

WU Changlin, DING Heyan, CHEN Yi. Research on modeling method of relation between abrasive grain and material removal depth [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(3): 300 - 304. (in Chinese)

[19] 聂蒙，李建勇，沈海阔．基于容腔调节的钢轨打磨压力控制系统 [J]．西南交通大学学报，2015，50(5): 798 - 802.

NIE Meng, LI Jianyong, SHEN Haikuo. Pressure control system for rail grinding based on chamber adjustment [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2015, 50(5): 798 - 802. (in Chinese)

[20] WANG R Q, LI J Y, LIU Y M, et al. Modeling material removal rate of heavy belt-grinding in manufacturing of U71Mn material [J]. Key Engineering Materials, 2016, 693: 1082 - 1089.

(上接第 383 页)

[15] YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topology design of robot mechanisms[M]. Springer,2018.

[16] 沈惠平，许可，杨廷力．运动解耦和低耦合度选择顺应性装配机器手臂并联机构的设计及其运动分析[J]．中国机械工程,2018,29(8):883 - 892.

SHEN Huiping, XU Ke, YANG Tingli. Design and kinematics of a SCARA parallel mechanism with motion decoupling and low coupling degree[J]. China Mechanical Engineering, 2018,29(8):883 - 892. (in Chinese)

[17] 杨廷力．机器人机构拓扑结构学[M]．北京:机械工业出版社,2004.

[18] 杨廷力，刘安心，罗玉峰，等．机器人机构拓扑结构设计[M]．北京:科学出版社,2012.

[19] 沈惠平，尹洪波，王振，等．基于拓扑结构分析的求解 6 - SPS 并联机构位置正解的研究[J]．机械工程学报，2013，49(21):70 - 80.

SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6 - SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering,2013,49(21):70 - 80. (in Chinese)

[20] 白志富，韩先国，陈五一．冗余驱动消除并联机构奇异研究[J]．航空学报,2006,27(4):733 - 736.

BAI Zhifu, HAN Xianguo, CHEN Wuyi. Study on elimination singularities of parallel mechanism by actuation redundancy[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2006,27(4):733 - 736. (in Chinese)

[21] 张彦斐，宫金良，高峰．冗余驱动消除并联机构位形奇异原理[J]．中国机械工程,2006,17(5):445 - 448.

ZHANG Yanfei, GONG Jinliang, GAO Feng. Theory of singularity elimination by redundant actuation for parallel mechanism [J]. China Mechanical Engineering,2006,17(5):445 - 448. (in Chinese)