doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.11.049

稀疏求解的动力学显隐混合异步长交错计算方法

马志强[1,2]　孔令爽[1,2]　楼云锋[1,2]　金先龙[1,2]

(1. 上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200240; 2. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

摘要: 显隐混合方法是分析复杂精细结构动力学问题的经典方法。此类方法处理不同分区边界数据时常涉及插值过程,易造成计算不稳定,同时单一的时间步长会造成计算资源的浪费。基于多重边界网格,提出一种改进的显隐混合异步长计算方法。该方法采用节点分割将有限元模型划分为显式与隐式分区,不同分区采用兼容格式的预测校正 Newmark 积分格式。多重网格使得显式分区预测波形在边界重叠网格完整传递,显式分区节点数据直接求解。隐式分区采用稀疏存储行压缩 CRS 格式,节点数据由稀疏直接求解器求出。显式与隐式分区串行交替高效求解。数值算例表明,相比于显隐混合固定界面边界数据插值方法,本文方法精度较高,且进一步降低了动力学分析的计算时间。

关键词: 显隐混合; 异步长; 稀疏求解; 串行交替; 结构动力学

中图分类号: TU311.3; TU352.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2018)11-0403-06

Explicit – Implicit Multi-time-step Computational Method for Structural Dynamics with Sparse Direct Solution

MA Zhiqiang[1,2]　KONG Lingshuang[1,2]　LOU Yunfeng[1,2]　JIN Xianlong[1,2]

(1. *School of Mechanical Engineering*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200240, *China*

2. *State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

Abstract: Dynamic analysis of complex and fine structure often involves external load with different time scales. Meanwhile, a local refined mesh is needed at the analysis zone. The classical explicit – implicit mixed method was used to deal with such problems with the interpolation process of boundary data which was likely to cause computational instability. At the same time, a single time step would cause waste of computing resources. An improved explicit – implicit mixed asynchronous time step computing method was proposed with multiple boundary mesh. Node segmentation was used to divide the finite element model into explicit and implicit partitions. A compatible format predictive correction Newmark integration scheme was adopted in different partitions. A larger time step was used for implicit partition and a smaller time step for explicit region. The prediction waveform for explicit partition can be transmitted completely in the boundary mesh without truncation. Sparse storage row compression CRS format was used in the implicit partition and node data can be obtained by sparse direct solver. The node acceleration data for explicit and implicit partition were solved sequentially and efficiently. Numerical examples showed that the accuracy of the proposed method was higher than that of the traditional explicit-implicit mixed method and the computation time for dynamics analysis was further reduced.

Key words: explicit – implicit mixed; multi-time-step; sparse solution; sequential format; structural dynamics

0　引言

直接积分法是求解有限元结构动力学问题的常用方法,可分为显式与隐式两大类。显式方法适合求解冲击载荷引起的波传播问题,隐式方法适合求解结构低频振动问题[1]。复杂结构动力学分析中

收稿日期: 2018-06-26　修回日期: 2018-08-18

基金项目: 国家重点研发计划项目(2017YFB0202701)和国家自然科学基金项目(51475287、11772192)

作者简介: 马志强(1990—),男,博士生,主要从事结构大规模并行计算研究,E-mail: welmzq@126.com

通信作者: 金先龙(1961—),男,教授,博士生导师,主要从事动力学并行计算及其工程应用研究,E-mail: jxlong@sjtu.edu.cn

常涉及不同时间与网格尺度,结合显式与隐式方法优点的显隐混合算法是求解此类问题的经典方法[2]。这类显隐混合方法可以追溯到 BELYTSCHKO 等[3]的研究。在近 40 年的研究历程中,大致可以分为 2 个阶段。早期的研究以显隐同步长为起点,结合显式、隐式在求解动力学问题上的优势处理复杂结构动力学问题[3-5]。国内外学者尝试将显隐混合积分方法运用到分布式发电系统、流固耦合等领域[6-8]。节点分割和单元分割是两种有限元模型的分区方法,显隐分区边界多采用共享节点形式[9-11]。显式方法多采用中心差分法,隐式积分方法常采用 Newmark 方法。不同的显隐混合方法多集中保证不同分区边界数据连续性上,尤其对显隐异步长而言,显式分区计算时常需要对隐式分区边界节点数据作插值处理[12],这在一定程度上增加了算法对边界数据的连续性要求[13],也降低了显隐最大步长比的选择。

随后,以 FETI(Finite element tearing and interconnect method)方法为基础,采用拉格朗日乘子耦合分区边界的 GC 方法与 PH 方法被先后提出[14-15]。不同分区异步长插值处理由节点变量(位移、加速度等)变成拉格朗日乘子[16],同样存在上述边界数据连续性问题。作为共享边界节点的一种替换方案,重叠网格形式的 Arlequin 模型体现了在求解结构动力系问题上的稳定性优势[17]。

本文参考 Arlequin 结构动力学模型,以重叠网格为基础,提出一种改进的显隐混合异步长计算方法。采用节点分割有限元模型,分区边界节点与外部节点构成耦合区域。

1 结构动力学显式与隐式计算方法

结构经有限元离散,含阻尼的线弹性体结构动力学方程可以写为[1]

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$——结构质量、阻尼与刚度矩阵

$\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}$——节点外力向量

$\ddot{\boldsymbol{u}}$、$\dot{\boldsymbol{u}}$、$\boldsymbol{u}$——节点加速度、速度与位移向量

阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 常用 Rayleigh 阻尼形式。为了统一显式与隐式求解格式,采用基于预测校正格式的 Newmark 格式。预测校正格式求解过程分为预测步、加速度求解以及校正步 3 个求解过程。预测步中,第 $n+1$ 时间步节点速度以及位移的预测值可以由第 n 时间步节点的位移、速度以及加速度表示为

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}=\boldsymbol{u}^{n}+\Delta t\dot{\boldsymbol{u}}^{n}+\dfrac{\Delta t^{2}}{2}(1-2\beta)\ddot{\boldsymbol{u}}^{n}\\ \tilde{\dot{\boldsymbol{u}}}^{n+1}=\dot{\boldsymbol{u}}^{n}+(1-\gamma)\Delta t\ddot{\boldsymbol{u}}^{n}\end{cases} \tag{2}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}$、$\tilde{\dot{\boldsymbol{u}}}^{n+1}$——第 $n+1$ 时间步时节点位移与速度预测值

β、γ——Newmark 时间积分参数

Δt——积分时间步长

计算得第 $n+1$ 时间步节点加速度 $\ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1}$,代入 Newmark 时间积分的校正步可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}^{n+1}=\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}+\beta\Delta t^{2}\ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1}\\ \dot{\boldsymbol{u}}^{n+1}=\tilde{\dot{\boldsymbol{u}}}^{n+1}+\gamma\Delta t\ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1}\end{cases} \tag{3}$$

由此计算得第 $n+1$ 时间步节点速度 $\dot{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ 以及位移校正值 $\boldsymbol{u}^{n+1}$。根据加速度求解方法不同,可以将预测校正方法分为显式与隐式两大类。

1.1 显式求解格式

显式求解过程是将时间离散后的位移与速度的预测值式(2)直接代入方程(1)中,此时节点加速度求解公式为[1]

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}^{n+1}-\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\boldsymbol{C}\tilde{\dot{\boldsymbol{u}}}^{n+1} \tag{4}$$

质量矩阵采用集中质量矩阵形式,加速度求解过程无需进行矩阵求逆。

1.2 隐式求解格式

与显式求解格式相兼容的隐式方法是将速度与位移的校正式(3)代入方程(1)中,隐式方法中的加速度求解写成

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{eff}}\ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}^{n+1}-\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}-\boldsymbol{C}\tilde{\dot{\boldsymbol{u}}}^{n+1} \tag{5}$$

其中 $$\boldsymbol{K}_{\mathrm{eff}}=\boldsymbol{M}+\gamma\Delta t\boldsymbol{C}+\beta\Delta t^{2}\boldsymbol{K}$$

式中 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{eff}}$——求解节点加速度的等效刚度矩阵

由于刚度矩阵为稀疏非对角矩阵,节点加速度求解过程涉及等效刚度矩阵的求逆过程。式(4)与式(5)为格式兼容的显式与隐式预测校正 Newmark 加速度求解格式,此格式用于显隐混合求解的优势在于显式与隐式求解可以融合在统一的程序中。

2 交替格式的混合异步长耦合计算方法

交替格式的显隐式适用于多个分区的求解过程,为了方便描述,本节以两个分区为例。有限元网格采用节点分割分成显式与隐式两个分区。与经典的显隐混合计算方法不同,交替格式的方法采用边界重叠多重网格的方法实现异步长显隐边界数据的交换。

2.1 节点划分的重叠网格

隐式分区采用大时间步长 Δt_1,显式分区采用较小的子循环步长 Δt_2。假定隐式分区步长是显式分区步长的整数 m 倍,即 $\Delta t_1=m\Delta t_2$。图 1 是以 2 倍步长比为例的重叠网格分区示意图。隐式与显式分区均包含内部节点、边界节点与外部节点,其中边

界节点与外部节点构成重合区域。一个完整的系统时间步包含一个隐式时间步和多个显式子循环时间步。内部节点、边界节点与外部节点用符号 I、B、E 表示。隐式分区的边界节点即为显式分区的外部节点，显式分区的边界节点为隐式分区的外部节点。

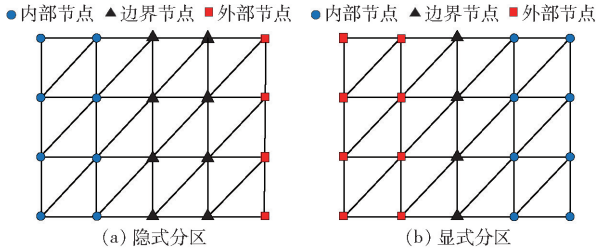

图 1　多重边界网格显隐分区示意图

Fig. 1　Explicit-implicit partitioned schematics with multiple boundary mesh

2.2　显式小步长分区计算

显式计算过程中，求解某节点下一时刻数据只与当前时刻该节点的相邻节点信息有关。在显式子循环过程中，可正确求得的外部节点数据逐层递减。子循环结束后显式分区内部与边界节点数据可以正确求出。边界节点加速度求解公式可以写成

$$\boldsymbol{M}_B\ddot{\boldsymbol{u}}_B^{n+j/m}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{eff},B}^{n+j/m}\quad(j=1,2,\cdots,m)\tag{6}$$

式中　$\boldsymbol{M}_B$——与边界节点相对应的质量矩阵

$\boldsymbol{f}_{\mathrm{eff},B}^{n+j/m}$——显式分区加速度求解式(4)中与边界节点对应的等效载荷

$\ddot{\boldsymbol{u}}_B^{n+j/m}$——系统时间步为 n、子循环时间步为 j 时显式分区边界节点加速度

m——隐式分区与显式分区的步长比

2.3　隐式大步长分区计算

隐式分区的节点加速度求解公式可以写成

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_E & \boldsymbol{K}_{E(B+I)}\\ \boldsymbol{K}_{(B+I)E} & \boldsymbol{K}_{B+I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{u}}_E^{n+1}\\ \ddot{\boldsymbol{u}}_{B+I}^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_E^{n+1}\\ \boldsymbol{f}_{B+I}^{n+1}\end{bmatrix}\tag{7}$$

式中　$\boldsymbol{K}_E$——隐式分区等效刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{eff}$ 按照外部节点的分块矩阵

$\boldsymbol{K}_{E(B+I)}$、$\boldsymbol{K}_{(B+I)E}$——隐式分区等效刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{eff}}$ 按照边界节点的分块矩阵

$\boldsymbol{K}_{B+I}$——等效刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{eff}}$ 与内部节点对应的分块矩阵

加速度 $\ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1}$ 与载荷项 $\boldsymbol{f}^{n+1}$ 具有相同的分块项。由 2.2 节分析可知，显式分区子循环时间步过后边界与内部节点加速度数据可正确求出。对于边界重叠的显隐分区网格划分，隐式分区外部节点即为显式分区的边界节点。因而隐式分区方程(7)中 $\ddot{\boldsymbol{u}}_E^{n+1}$ 可由显式分区数据 $\ddot{\boldsymbol{u}}_B^{n+1}$ 传递而来。

对于隐式分区而言，隐式内部与边界节点加速度求解是域分解方法中回代求解过程[18]

$$\boldsymbol{K}_{B+I}\ddot{\boldsymbol{u}}_{B+I}^{n+1}=\boldsymbol{f}_{B+I}^{n+1}-\boldsymbol{K}_{(B+I)E}\ddot{\boldsymbol{u}}_E^{n+1}\tag{8}$$

采用稀疏直接求解器计算出隐式分区内部节点与边界节点加速度，赋值给显式分区外部节点，完成一个系统时间步的显式与隐式分区节点数据的求解。交替格式的混合异步长耦合计算方法求解顺序为显式子循环时间步、隐式分区回代求解以及显式分区外部节点赋值 3 个串行交替步骤。显隐异步长串行交替求解流程如图 2 所示。虚线框内是显式分区节点与隐式分区节点加速度数据赋值过程。

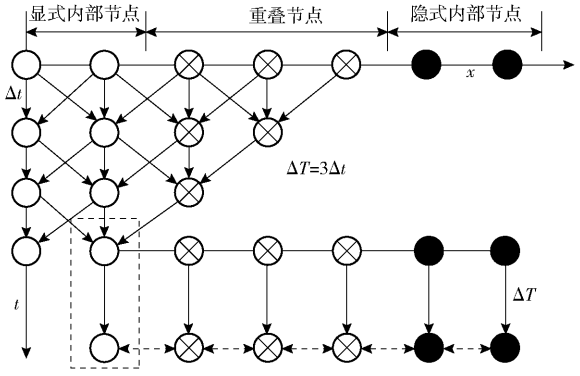

图 2　显隐异步长串行交替求解流程

Fig. 2　Sequential format process for explicit-implicit mixed multi-time step

2.4　隐式分区的稀疏行压缩存储格式的实现

显式分区求解中质量矩阵为对角矩阵，节点加速度直接根据节点自由度编号形成方程。方程(4)右端载荷项也是在单元层级计算按照节点自由度累加形成。采用坐标存储对应节点自由度质量项与载荷项即可。

而对于隐式分区而言等效刚度矩阵为稀疏对称矩阵，求解内部与边界节点加速度过程涉及矩阵求逆。采用稀疏矩阵的行压缩 CRS 存储格式有较好的存储和求解效率[19]。隐式分区节点按照先外部节点后边界与内部节点的顺序编号，将分区等效刚度矩阵与右端载荷项分块。

边界与内部节点加速度求解过程采用稀疏直接求解器，直接求解。具体流程为：①等效刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{eff}}$ 分块，矩阵赋值操作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K}_{B+I}$。②右端载荷项分块，形成等效载荷项 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}_{B+I}^{n+1}-\boldsymbol{K}_{(B+I)E}\ddot{\boldsymbol{u}}_E^{n+1}$。③稀疏直接求解器求解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$。

3　精度验证

采用弹簧质量系统验证算法的计算精度与收敛性。5 节点弹簧质量系统如图 3 所示。采用的弹簧质量参数为 $k_i=1\ \mathrm{N/m}(i=1,2,\cdots,6)$，$m_j=50\ \mathrm{kg}(j=1,2,\cdots,5)$。初始位移条件为 $\boldsymbol{u}_0=(0,0,1,0,0)$，各个节点初始速度均为 0。显式与隐式分区参数均为

$\beta=0.5$,$\gamma=0.25$。分区同步长计算时节点 3、4 与弹簧 k_4 为重叠区域。为了比较显隐分区步长比对精度的影响,异步长计算时选择步长比 $m=3$。此时节点 2 ~ 5,弹簧 3 ~ 5 为重叠区域,节点 m_1 为显式分区内部节点。集中参数的弹簧质量系统的解析解作为计算结果的参考对象。图中 u_i 表示第 i 个节点的位移。

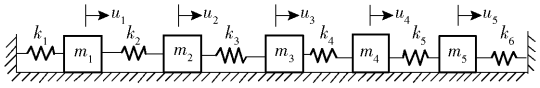

图 3 5 节点弹簧质量系统

Fig. 3 Five-node spring mass system

显式分区时间步长为 0.001 s,分别采用显隐同步长、3 倍步长比以及 GC 3 倍步长比方法[14]计算节点 3 的位移与理论计算结果相比较。图 4 为使用不同方法的位移计算结果。其中图 4a 为节点 3 位移计算结果,因为节点 5 弹簧质量系统初始条件为节点 3 的位移,节点 2 与节点 4 的理论位移应该重叠,u_2-u_4 可以直观地反映不同方法下的位移计算误差,如图 4b 所示。

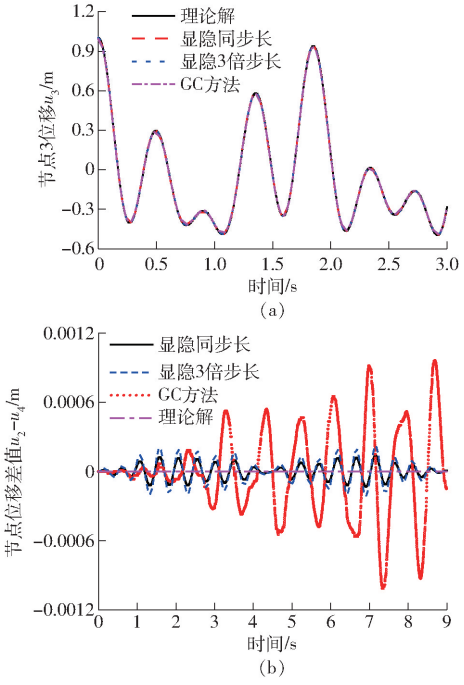

图 4 不同方法弹簧质量系统位移节点结果

Fig. 4 Nodal displacement results of spring mass system with different methods

从图 4a 可以看出,3 种方法均可以计算出弹簧质量系统的节点位移。由图 4b 可知,显式分区采用相同步长,隐式分区由同步长到 3 倍步长条件下,位移误差有所增加,但是误差在一个有限的区间内波动。GC 方法在计算节点位移时,涉及拉格朗日乘子处理,同时随着仿真时间步的进行,位移误差逐步增大。相同步长比条件下,本文所述方法具有较高的求解精度。

位移收敛特性采用相对位移计算结果[20]

$$u_{\mathrm{err}}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\boldsymbol{u}^i-\boldsymbol{u}^i_{\mathrm{analytic}}}{\boldsymbol{u}^i_{\mathrm{analytic}}}\right| \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{u}^i$——i 时刻 5 个节点位移向量

$\boldsymbol{u}^i_{\mathrm{analytic}}$——对应时刻 5 个节点理论位移向量

统计显式分区步长从 0.001、0.002、0.006、0.01 s 的位移误差曲线,采用双对数坐标系,统计时间为 9 s,n 取 900,结果如图 5 所示。

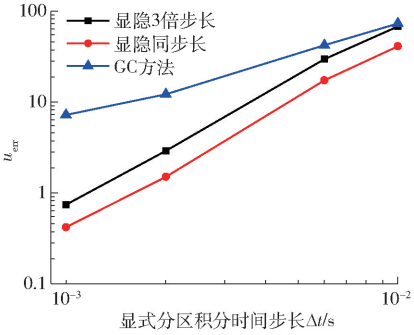

图 5 位移误差收敛曲线

Fig. 5 Displacement error convergence rate curves for different methods

计算曲线结果表明,在显隐分区积分参数均为 $\beta=0.5$,$\gamma=0.25$ 的条件下,显隐混合异步长计算方法具有 2 阶的位移收敛精度。同显式分区步长条件下,步长比 m 越大所得的计算误差越大。

4 数值算例

为了进一步验证算法在精度和效率方面的特性,本节采用 U 型管承受局部冲击载荷 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}$ 作为数值算例。图 6 为结构有限元模型与外载荷时间历程曲线。

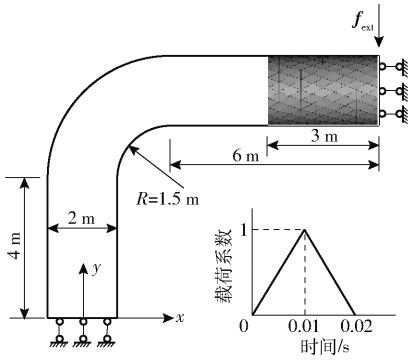

图 6 U 型管有限元模型及载荷时间曲线

Fig. 6 Finite element model and load time curve for U-type tube

模型左右对称,计算时采用整体模型的一半。采用各向同性材料,材料弹性模型 E 为 210 GPa,材料密度 ρ 为 7 800 kg/m^3,泊松比 υ 为 0.28。U 型管半径为 1 m,管壁厚度为 8 mm。管中间部位承受弯

曲载荷 $\boldsymbol{f}_{\text{ext}}$，载荷最大为 1.5×10^5 N。结构采用三角形壳单元离散，冲击部位与管弯曲部分网格尺度较小。显式计算部分如图 6 中所画网格部位，重叠部分单元为管壁若干圈单元。模型含有 13 574 个节点，26 992 个单元。

采用显式积分方法时受限于稳定性条件，采用积分时间步长 $\Delta t=2\times10^{-6}$ s。仿真时间 0.1 s。隐式分区分别采用时间积分步长为 $m\Delta t$。图 7 为在步长比 m 为 3、12 这两种情况下冲击点竖向位移曲线。参考曲线为商业软件 LS－DYNA 显式计算结果。从图 7 可以看出，随着步长比的增加，算法计算结果符合位移计算规律，精度稳定性较好。

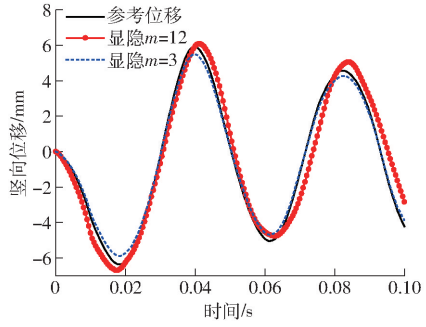

图 7　不同方法计算节点竖向位移结果

Fig. 7　Vertical displacement results for impact node by different methods

为了研究算法计算效率，将本文方法与经典显式中心差分方法用于 U 型管的冲击计算。模型在共享内存模式计算机上计算，CPU 主频 4.2 GHz，内存 16 GB。统计的有限元模型计算时间见表 1。表中 m 表示隐式分区积分时间步长是显式分区的倍数。

从表 1 可以看出，随着步长比的增加，模型求解时间得以降低。由于采用串行计算格式，一个系统时间步内显式分区先计算，隐式分区后计算，提高显隐分区步长比意味着在显式分区步长不变的情况下，隐式分区采用了更大的时间步长。考虑重叠单元的边界处理，在不同步长比下，隐式分区单元保持一致，显式分区单元规模需增加部分分区边界单元。计算时间的减少主要来自隐式分区计算步数的降低。也需要看到随着显隐步长比增加，时间比率减少幅度减少，此时隐式分区计算时间减少有限，计算时间占比中显式计算所占比重逐渐增大。

表 1　显隐分区不同步长比计算时间

Tab. 1　Computational times for proposed explicit-implicit method with different time step ratios

方法	求解时间/s	时间比率/%
显式	4 485	100
$m=3$	2 453	54.7
$m=6$	1 848	41.2
$m=12$	1 592	35.5

5　结论

（1）分区边界数据传递不涉及插值过程，这一改进提高了计算精度，积分参数 $\beta=0.5$，$\gamma=0.25$，方法具有二阶收敛精度。

（2）显隐分区根据单元属性选择时间积分步长，降低计算时间。一定程度上，步长比越大，计算所需时间越小。

（3）显隐分区采用兼容的 Newmark 格式，基于稀疏存储 CRS 格式，显隐计算程序可以具有统一的计算格式，这为显隐式混合积分扩展至并行化提供了便利。

参　考　文　献

1　HUGHES T J R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis[M]. Courier Corporation, 2012.

2　张伟伟，金先龙. 统一格式的显式与隐式任意混合异步算法[J]. 力学学报，2014，46(3)：436－446.
ZHANG Weiwei, JIN Xianlong. An arbitrarily mixed explicit-implicit asynchronous integration algorithm based on uniform discretization format[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, 46(3): 436－446. (in Chinese)

3　BELYTSCHKO T, MULLEN R. Stability of explicit-implicit mesh partitions in time integration[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1978, 12(10): 1575－1586.

4　LIU W K, BELYTSCHKO T. Mixed-time implicit-explicit finite elements for transient analysis[J]. Computers & Structures, 1982, 15(4): 445－450.

5　DANIEL W J T. Explicit/implicit partitioning and a new explicit form of the generalized alpha method[J]. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 2003, 19(11): 909－920.

6　陈健云，李建波，林皋，等. 结构-地基动力相互作用时域数值分析的显-隐式分区异步长递归算法[J]. 岩石力学与工程学报，2007，26(12)：2481－2487.
CHEN Jianyun, LI Jianbo, LIN Gao, et al. A sub-regional explicit-implicit recursive method with mixed step-size strategy in time domain for dynamic structure-foundation interaction analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(12): 2481－2487. (in Chinese)

7　寇哲君，程建钢，黄文彬，等. 结构动力分析显隐式混合积分并行算法及实现[J]. 清华大学学报(自然科学版)，1999，39(4)：22－25.

KOU Zhejun, CHENG Jian'gang, HUANG Wenbin, et al. Mixed explicit-implicit parallel algorithm for structural dynamic integration and its implementation[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 1999, 39(4): 22 - 25. (in Chinese)

8 陈少林,王俊泉,刘启方,等. 基于显-隐式格式的三维时域土-结相互作用分析的异步并行算法[J]. 中国科学:技术科学, 2017, 47(12): 1321 - 1330.
CHEN Shaolin, WANG Junquan, LIU Qifang, et al. Asynchronous parallel algorithm for three-dimensional soil-structure interaction analysis based on explicit-implicit integration scheme[J]. Scientia Sinica Technologica, 2017, 47(12): 1321 - 1330. (in Chinese)

9 王成山,彭克,李琰,等. 一种适用于分布式发电系统的显式—隐式混合积分算法[J]. 电力系统自动化, 2011, 35(19): 28 - 32.
WANG Chengshan, PENG Ke, LI Yan, et al. An explicit-implicit hybrid integration algorithm for distributed generation systems [J]. Automation of Electric Power Systems, 2011, 35(19): 28 - 32. (in Chinese)

10 杜修力,宋佳,李亮. $u-p$ 格式饱和两相介质动力问题的显-隐式交替算法[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(3): 395 - 403.
DU Xiuli, SONG Jia, LI Liang. Explicit-implicit staggered algorithm of $u-p$ formulation for dynamic problems of fluid-saturated porous media[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(3): 395 - 403. (in Chinese)

11 SEIFI S, PARK K C, PARK H S. A staggered explicit - implicit finite element formulation for electroactive polymers[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 337: 150 - 164.

12 SUBBER W, MATOUŠ K. Asynchronous space-time domain decomposition method with localized uncertainty quantification [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 325: 369 - 394.

13 KARIMI S, NAKSHATRALA K B. On multi-time-step monolithic coupling algorithms for elastodynamics[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 273: 671 - 705.

14 COMBESCURE A, GRAVOUIL A. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(11 - 12): 1129 - 1157.

15 PRAKASH A, HJELMSTAD K D. A FETI-based multi-time-step coupling method for Newmark schemes in structural dynamics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(13): 2183 - 2204.

16 GRAVOUIL A, COMBESCURE A, BRUN M. Heterogeneous asynchronous time integrators for computational structural dynamics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2015, 102(3 - 4): 202 - 232.

17 GHANEM A, TORKHANI M, MAHJOUBI N, et al. Arlequin framework for multi-model, multi-time scale and heterogeneous time integrators for structural transient dynamics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 254: 292 - 308.

18 TOSELLI A, WIDLUND O B. Domain decomposition methods: algorithms and theory[M]. Berlin: Springer, 2005.

19 苗新强,金先龙,丁峻宏. 基于稀疏存储的有限元结构分析高效缩聚并行计算方[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(4): 338 - 343. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no=20150450&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.04.050.
MIAO Xinqiang, JIN Xianlong, DING Junhong. Efficient condensation parallel computing method for finite element structural analysis based on sparse storage scheme[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(4): 338 - 343. (in Chinese)

20 MAHJOUBI N, GRAVOUIL A, COMBESCURE A, et al. A monolithic energy conserving method to couple heterogeneous time integrators with incompatible time steps in structural dynamics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(9 - 12): 1069 - 1086.