doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.04.051

# 四自由度两模式并联机构结构综合与位置分析

石志新<sup>1</sup> 叶梅燕<sup>2</sup> 罗玉峰<sup>1</sup> 杨廷力<sup>3</sup> (1.南昌大学机电工程学院,南昌 330031; 2.南昌大学理学院,南昌 330031; 3.中国金陵石化公司,南京 210037)

摘要:为设计可实现一机多用的并联机构,提出了多模式并联机构的结构类型综合方法以及操作模式分析方法。 首先利用方位特征集方法,综合得到一类(640种)具有运动分岔特性的4自由度并联机构;然后从中优选出一种 机构进行操作模式分析,分析结果表明:机构处于分岔奇异点时动平台瞬时自由度为5,此时采用冗余驱动的方法 可引导动平台通过分岔奇异点顺利到达三平移一转动或两平移两转动模式;最后推导了该并联机构处于上述2种 操作模式时的位置正、逆解分析方程,得知位置逆解方程和三平移一转动模式时的位置正解方程均可解析求解。 关键词:并联机构;运动分岔;操作模式;位置分析

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2017)04-0383-07

## Type Synthesis and Position Analysis of 4-DOF Parallel Mechanisms with Two Operation Modes

SHI Zhixin<sup>1</sup> YE Meiyan<sup>2</sup> LUO Yufeng<sup>1</sup> YANG Tingli<sup>3</sup>

School of Mechanical and Electronic Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China
 School of Science, Nanchang University, Nanchang 330031, China
 Jinling Petrochemical Corporation, Nanjing 210037, China)

Abstract: To develop reconfigurable manufacturing systems with a short changeover time, parallel mechanisms with multiple operation modes had received much attention from researchers. However, the current researches on multiple modes were mostly concentrated on the 3-DOF parallel mechanisms. A simple method of type synthesis and operation mode analysis for 4-DOF parallel mechanisms with both two-dimension translation and two-dimension rotational operation mode and three-dimension translation and one-dimension rotational operation mode was put forward. Type synthesis of 4-DOF parallel mechanisms was introduced based on the theory of position and orientation characteristics. And one family of 4-DOF parallel mechanisms with two operation modes was presented. Then, one topology was selected from the different possibilities of parallel manipulators after imposing some practical requirements. The selected parallel manipulator had instantaneously five degrees of freedom at the constraint singular configuration. The parallel manipulator must pass through singular configuration when it was switched from one operation mode to another. Redundant actuators were used to ensure that the parallel manipulator can pass through the singular configuration. Finally, the forward and inverse kinematic equations of the parallel manipulator with bifurcated motion in different operation modes were derived. The parallel manipulator presented was intended to be used in manufacturing application. Key words: parallel mechanism; bifurcated motion; operation mode; position analysis

#### 引言

并联机构在理论研究和实际应用方面均已取得 重要进展,但大多数研究集中于具有确定自由度的 并联机构。对于具有连续变自由度或运动分岔特性 的并联机构,其研究尚不够系统和深入。

运动分岔是指当机构处于某些特殊位型(称为 分岔奇异点)时,动平台存在多种可能运动,此时改

收稿日期:2016-08-02 修回日期:2016-10-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(51365036、51475050)

作者简介:石志新(1979—),男,副教授,博士,主要从事机器人机构学研究,E-mail: shizhixin@ncu.edu.cn

变某些关节变量可使动平台进入不同的连续运动空间(模式)。运动分岔这一概念最早由WOHLHART<sup>[1]</sup>于1996年提出,随后的研究主要集中于运动转向机构<sup>[2-3]</sup>和运动限定机构<sup>[4-9]</sup>,直到2006年才由FANGHELLA等<sup>[10]</sup>提出几种具有运动分岔特性的并联机构,2007年REFAAT等<sup>[11]</sup>研制了具有运动分岔特性的并联机构。KONG等<sup>[12-15]</sup>提出了3自由度多模式并联机构的构型分析与综合方法;李秦川等<sup>[16-17]</sup>基于群论综合出了一类具有运动分岔特性的并联机构;叶伟等<sup>[18]</sup>提出了一种具有4种模式(三平移、三转动、两平移一转动和两转动一平移)的并联机构;LATIFAH等<sup>[19]</sup>分析了4-RUU型并联机构的3种不同模式。

方位特征集方法在拓扑结构综合方面具有显著 特点<sup>[20-22]</sup>,然而目前相关文献仅研究了确定自由度 的并联机构综合,本文将该方法推广应用于连续变 自由度(运动分岔特性)机构的结构综合,提出一类 具有运动分岔特性的4自由度并联机构,该类机构 存在三平移一转动和两平移两转动两种模式;最后 从中优选一种机构,对其运动分岔特性和位置正逆 解进行详细分析。

#### 1 机构结构综合

#### 1.1 支链的构造

(1)由于动平台是在各支链共同作用下完成运动的,故支链的方位特征集 *M*,应包含动平台的方位特征集 *M*,即 *M*,应满足

$$\boldsymbol{M}_{i} \supseteq \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{1} \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^{2} \\ r^{2} \end{bmatrix} \supseteq \begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{2} \end{bmatrix}$$
(1)

式中 t<sup>3</sup>——空间三维平移

(2)欲使动平台能够进入2种不同的连续运动 模式(即三平移一转动和两平移两转动),则至少存 在1条具有连续变自由度的支链。文献[20]已给 出满足式(1)的具有确定自由度的支链,故仅需构 造满足要求的变自由度支链。

注意到三平移一转动和两平移两转动的交集为 两平移一转动。为使问题简化,将两平移一转动对 应的结构指定为一平面子链(3R、RPR、PRR、PPR)。 如果在平面子链两端分别联接一个转动副,则可构 造满足要求的变自由度支链(表1)。当上述两转动 副轴线保持平行时,该支链方位特征集为三平移一 转动;当两转动副轴线不平行时,方位特征集则为三 转动两平移。



表1中的符号含义为:"//"表示平行;"⊥"表示垂直;"-"表示交叉且不垂直;"4R"表示平行四边形机构;"4S"表示由4个球副和2个转动副构成的平行四边形机构。

#### 1.2 具有分岔特性的四自由度并联机构

若从表1中分别取1条变自由度支链、1条三 平移两转动和2条三平移三转动的确定自由度支链 进行装配,则共可得到640(4×10×4<sup>2</sup>)种存在2种 模式(三平移一转动和两平移两转动)的四自由度 并联机构。

综合考虑运动学分析简单、装配方便等原则,从 上述 640 种并联机构中优选一种机构进行详细描述 和分析。

如图 1 所示,从表 1 所示的 4 条变自由度支链 中选取  $\{R_{11} \perp R_{12} // R_{13} // R_{14} \perp R_{15} \}$ 作为第 1 条支 链;从 10 条确定自由度(三平移两转动)支链中选 取  $\{R_{31} // R_{32} (4R) // R_{33} \perp R_{34} \}$ 作为第 3 条支链;从 4 条确定自由度(三平移三转动)支链中选取  $\{P_{21} // R_{22} // R_{23} - S_{24} \}$ 和  $\{P_{41} // R_{22} // R_{23} - S_{24} \}$ 分别作为第 2 条和第 4 条支链。



Fig. 1 Schematic diagram and coordinate systems

不失一般性,设动、静平台均呈正方形形状。静 平台上4个运动副( $R_{11}$ 、 $P_{21}$ 、 $R_{31}$ 、 $P_{41}$ )均匀分布在 4条边中点处,且它们的方位配置关系为: $R_{11}$ 和 $P_{21}$ 的轴线均垂直于静平台, $R_{31}$ 和 $P_{41}$ 的轴线分别平行 于各自所在的边。动平台上的运动副( $R_{15}$ 、 $S_{24}$ 、 $R_{34}$ 、  $S_{44}$ )分布在4个顶点处,且转动副 $R_{15}$ 和 $R_{34}$ 的轴线 均垂直于动平台。装配初始位形时,动、静平台相互 平行,且转动副 $R_{12}$ 和 $R_{31}$ 的轴线相互平行。

为描述方便,在静、动平台上分别建立静坐标系 Oxyz和动坐标系 Quvw。其中,原点 O 位于静平台 的中心,x 轴和 y 轴分别平行于静平台相邻两边, z 轴为静平台所在平面的法线;原点 Q 与动平台上 R<sub>15</sub>重合,u 轴与 R<sub>34</sub>和 R<sub>15</sub>的连线重合,v 轴与 S<sub>24</sub>和 S<sub>44</sub>的连线平行,w 轴为动平台所在平面的法线。

#### 2 方位特征集分析及模式切换

#### 2.1 初始位形时动平台方位特征集分析

当机构处于初始位形(图1)时,动、静平台相互

平行, 且转动副 R<sub>12</sub>和 R<sub>31</sub>的轴线相互平行。此时, R<sub>11</sub> // R<sub>15</sub> // R<sub>34</sub> // z 轴 // w 轴且 R<sub>12</sub> // R<sub>31</sub> // y 轴 // v 轴。 因此, 4 条支链的方位特征集 *M*<sub>i</sub>分别为

$$\begin{cases}
\boldsymbol{M}_{1} = \boldsymbol{M}_{3} = \begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{2} ( // \Diamond (v, w) ) \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{M}_{2} = \boldsymbol{M}_{4} = \begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{3} \end{bmatrix}
\end{cases}$$
(2)

式中  $r^2(// \diamondsuit(v, w))$ 表示存在二维转动,且转动轴 平行于 v轴与 w 轴张成的平面。

动平台的方位特征集 M 为

$$\boldsymbol{M} = \bigcap_{i=1}^{4} \boldsymbol{M}_{i} = \begin{bmatrix} t^{3} \\ r^{2} ( // \diamond (v, w) ) \end{bmatrix}$$
(3)

式(3)表明:在初始位形时机构瞬时自由度为 5,动平台具备空间三维平移以及绕 v 轴与 w 轴转动 的能力。

#### 2.2 一般位形时动平台方位特征集分析

#### 2.2.1 动平台绕 v 轴连续转动

如图 2 所示,当动平台由初始位形绕 v 轴连续转动后,转动副 R<sub>15</sub>和 R<sub>11</sub>轴线的平行关系将被破坏,从而导致动平台丧失沿 v 轴平移的能力,此时动平台方位特征集 M 为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} t^2 (\perp v) \\ r^2 (// \diamondsuit (v, w)) \end{bmatrix}$$
(4)

式中 $t^2(\perp v)$ 表示存在与v轴垂直的二维平移,但不能沿v轴平移。



 $Fig. \ 2 \quad 2T2R \ operation \ mode$ 

式(4)表明:动平台一旦由初始位形绕 v 轴连 续转动后,将会丧失沿 v 轴平移的能力,机构随即进 入两平移两转动模式。

### 2.2.2 动平台沿 v 轴平移

如图 3 所示,当动平台由初始位形沿 v 轴平移 后,动、静平台仍相互平行,转动副 R<sub>15</sub>和 R<sub>11</sub>轴线的 平行关系得以维系,但转动副 R<sub>12</sub>和 R<sub>31</sub>的轴线将不 再平行,从而导致动平台丧失绕 v 轴(或 y 轴)转动 的能力,此时动平台方位特征集 M 为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}^3 \\ \boldsymbol{r}^1(\ //\ \boldsymbol{w}) \end{bmatrix}$$
(5)

式中 $r^{1}(//w)$ 表示存在一维转动,且转动轴平行于w轴。



 $Fig. \ 3 \quad 3T1R \ operation \ mode$ 

式(5)表明:动平台一旦由初始位形沿 v 轴平 移后,将会丧失绕 v 轴转动的能力,机构随即进入三 平移一转动模式。

#### 2.3 模式切换

根据上述方位特征集分析可知:尽管在初始位 形时动平台具备空间三维平移以及绕 v 轴与 w 轴转 动的能力,但动平台绕 v 轴转动与沿 v 轴平移的自 由度互斥,即动平台由初始位形绕 v 轴转动后,将不 能沿 v 轴平移,反之亦然。因此,只有当机构处于初 始位形时,才可以完成 2 种模式(两平移两转动和 三平移一转动)间的切换。

由于机构在初始位形时瞬时自由度为5,故此 时需要安装5个驱动器才能实现动平台完全可控。 根据驱动副判断准则<sup>[20]</sup>,本文选取 R<sub>11</sub>、R<sub>12</sub>、P<sub>21</sub>、 R<sub>31</sub>、P<sub>41</sub>作为驱动副。

注意到机构在一般位形时自由度为4,因此上 述驱动器中某些驱动器的作用在于引导动平台通过 初始位形顺利到达指定模式,一旦动平台到达指定 模式后,将会出现冗余驱动,需锁定或松开某一驱动 器。例如,在初始位形时锁定 R<sub>11</sub>同时驱动 R<sub>12</sub>、P<sub>21</sub>、 R<sub>31</sub>、P<sub>41</sub>,则机构进入两平移两转动模式;若驱动 R<sub>11</sub> 且松开安装在 R<sub>12</sub>上的驱动器,则机构进入三平移 一转动模式。

#### 3 位置分析

如图 1 所示,该并联机构的结构参数为:动平台 外接圆半径和静平台内切圆半径分别记为 $r_1$ 、 $r_2$ ;转 动副  $R_{11}$ 、 $R_{15}$ 、 $R_{22}$ 、 $R_{23}$ 、 $R_{34}$ 以及移动副  $P_{21}$ 的轴长分 别记为 $d_{11}$ 、 $d_{12}$ 、 $d_{22}$ 、 $d_{23}$ 、 $d_{31}$ 以及 $d_{21}$ ;转动副  $R_{12}$ 、 $R_{13}$ 、  $R_{31}$ 的杆长分别记为 $l_{11}$ 、 $l_{12}$ 、 $l_{31}$ ,  $R_{32}$ 与  $R_{33}$ 之间的距离 记为 $l_{32}$ 。上述结构参数均为常数。

#### 3.1 两平移两转动模式下的位置分析

机构处于该模式时(图 2),动平台的位置(Q 在 静坐标系中的坐标)可记为(x,0,z),姿态(动平台 依次绕v轴和w轴转过的角度)记为( $\beta$ , $\gamma$ )。4 个 驱动副( $R_{12}$ , $P_{21}$ , $R_{31}$ , $P_{41}$ )的输入量分别记为 $\varphi_{12}$ 、  $\Delta_2$ , $\varphi_3$ , $\Delta_4$ 。位置分析问题可描述为:已知结构参数, 确定(x,z, $\beta$ , $\gamma$ )与( $\varphi_{12}$ , $\Delta_2$ , $\varphi_3$ , $\Delta_4$ )之间的映射关系。 分析过程如下。

(1)根据动平台的位姿(x,z,β,γ),可求得单位
 矢量 u、v、w 以及 R<sub>14</sub>、S<sub>24</sub>、R<sub>33</sub>、S<sub>44</sub>在静坐标系的坐标,其矢量形式分别为

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = (\cos\beta\cos\gamma, \sin\gamma, -\sin\beta\cos\gamma) \\ \boldsymbol{v} = (-\cos\beta\sin\gamma, \cos\gamma, \sin\beta\sin\gamma) \\ \boldsymbol{w} = (\sin\beta, 0, \cos\beta) \\ \boldsymbol{l}_{oq} = (x, 0, z) \\ \boldsymbol{l}_{oR_{14}} = \boldsymbol{l}_{oq} - \boldsymbol{d}_{12}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{l}_{oS_{24}} = \boldsymbol{l}_{oq} - \boldsymbol{r}_{1}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}_{1}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{l}_{oR_{33}} = \boldsymbol{l}_{oq} - 2\boldsymbol{r}_{1}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d}_{31}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{l}_{oS_{44}} = \boldsymbol{l}_{oq} - \boldsymbol{r}_{1}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{r}_{1}\boldsymbol{v} \end{cases}$$

$$(6)$$

(2) R<sub>13</sub>、R<sub>32</sub>在静坐标系上的坐标,可用 φ<sub>12</sub>、φ<sub>3</sub> 方便地解析表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{l}_{OR_{13}} = (r_2 + l_{11}\cos\varphi_{12}, 0, d_{11} + l_{11}\sin\varphi_{12}) \\ \boldsymbol{l}_{OR_{32}} = (-r_2 + l_{31}\cos\varphi_3, 0, l_{31}\sin\varphi_3) \end{cases}$$
(7)

(3)由于 R<sub>13</sub>与 R<sub>14</sub>之间的距离恒为 l<sub>12</sub>, R<sub>32</sub>与 R<sub>33</sub>
 之间的距离恒为 l<sub>32</sub>, S<sub>24</sub>的 z 轴坐标分量为 Δ<sub>2</sub> + d<sub>21</sub> + d<sub>22</sub> + d<sub>23</sub>, S<sub>44</sub>的 x 轴坐标分量为 Δ<sub>4</sub>, 故可得约束方程组

$$\begin{cases} |I_{OR_{14}} - I_{OR_{13}}|^2 = l_{12}^2 \\ |I_{OR_{33}} - I_{OR_{32}}|^2 = l_{32}^2 \\ \Delta_2 + D = z + r_1 \sin\beta(\cos\gamma + \sin\gamma) \\ \Delta_4 = x - r_1 \cos\beta(\cos\gamma - \sin\gamma) \\ D = d_{21} + d_{22} + d_{23} \end{cases}$$
(8)

其中

(4)将式(6)、(7)代入式(8)中,且将  $\varphi_{12}$ 、 $\Delta_2$ 、  $\varphi_3$ 、 $\Delta_4$ 视为变量,而 x、z、 $\beta$ 、 $\gamma$  视为已知量,分离已知 量和变量,可得位置逆解方程组为

$$\begin{cases} a_{1}\cos\varphi_{12} + b_{1}\sin\varphi_{12} + c_{1} = 0 \\ a_{2}\cos\varphi_{3} + b_{2}\sin\varphi_{3} + c_{2} = 0 \\ \Delta_{2} = z + r_{1}\sin\beta(\cos\gamma + \sin\gamma) - D \\ \Delta_{4} = x - r_{1}\cos\beta(\cos\gamma - \sin\gamma) \end{cases}$$
(9)  

$$\ddagger \psi \qquad a_{1} = -2l_{11}(x - r_{2} - d_{12}\sin\beta) \\ b_{1} = -2l_{11}(z - d_{11} - d_{12}\cos\beta) \\ c_{1} = (x - r_{2})^{2} + d_{12}^{2} + l_{11}^{2} - l_{12}^{2} - 2(x - r_{2})d_{12}\sin\beta + (z - d_{11})^{2} - 2(z - d_{11})d_{12}\cos\beta \\ a_{2} = -2l_{31}(x + r_{2} - 2r_{1}\cos\beta\cos\gamma - d_{31}\sin\beta) \\ b_{3} = -2l_{31}(z + 2r_{3}\sin\beta\cos\gamma - d_{31}\cos\beta) \end{cases}$$

其中

 $c_{2} = (x + r_{2})^{2} - 4r_{1}\cos\gamma\left[(x + r_{2})\cos\beta - z\sin\beta\right] + 4r_{1}^{2} +$  $z^{2} - 2d_{31}[(x + r_{2})\sin\beta + z\cos\beta] - l_{32}^{2} + d_{31}^{2} + l_{31}^{2}$ 

显然式(9)可解析求解,且  $\varphi_{12}$ 与  $\varphi_3$ 均有2组 解, $\Delta_2$ 与 $\Delta_4$ 仅有1组解。因此,该机构位置逆解方 程共有4组解。

(5)将式(8)中  $x_x z_x \beta_x \gamma$  视为变量,而  $\varphi_{12}_x \Delta_2_x$  $\varphi_3$ 、 $\Delta_4$ 视为已知量,分离已知量和变量且经化简后, 可得位置正解方程组为

$$\begin{cases} x = e_1 \cos\beta + \Delta_4 \\ z = -f_1 \sin\beta + \Delta_2 + D \\ A_1^2 + B_1^2 - l_{12}^2 = 0 \\ A_2^2 + B_2^2 + (f_1 - e_1)^2 - l_{32}^2 = 0 \end{cases}$$
(10)  
$$\vdots \psi \quad e_1 = r_1 (\cos\gamma - \sin\gamma) \quad f_1 = r_1 (\cos\gamma + \sin\gamma) \\ h_1 = \Delta_4 - r_2 - l_{11} \cos\varphi_{12} \quad h_2 = d_{11} + l_{11} \sin\varphi_{12} - \Delta_2 - D \\ h_3 = l_{31} \cos\varphi_3 - \Delta_4 - r_2 \quad h_4 = \Delta_2 + D - l_{31} \sin\varphi_3 \\ A_1 = e_1 \cos\beta - d_{12} \sin\beta + h_1 \\ B_1 = f_1 \sin\beta + d_{12} \cos\beta + h_2 \\ A_2 = f_1 \cos\beta + d_2, \sin\beta + h_2 \end{cases}$$

$$B_2 = e_1 \sin\beta - d_{31} \cos\beta + h_4$$

式(10)不可解析求解,可采用遍历搜索法<sup>[23]</sup>进 行求解。

#### 3.2 三平移一转动模式下的位置分析

机构处于该模式时(图3),动平台位置(Q在静 坐标系中的坐标)可记为(x, y, z),姿态(动平台绕 w 轴转过的角度)记为 $\theta$ 。4个驱动副(R<sub>11</sub>、P<sub>21</sub>、R<sub>31</sub>、  $P_{41}$ )的输入量分别记为 $\varphi_{11}$ 、 $\Delta_2$ 、 $\varphi_3$ 、 $\Delta_4$ 。则位置分析 问题可描述为:已知结构参数,确定 $(x, y, z, \theta)$ 与  $(\varphi_{11}, \Delta_2, \varphi_3, \Delta_4)$ 之间的映射关系。

位置分析过程和两平移两转动模式类似,但此 时单位矢量 u、v、w 为

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \boldsymbol{v} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ \boldsymbol{w} = (0, 0, 1) \end{cases}$$
(11)

位置逆解方程组为

$$\begin{cases} \Delta_2 = z - d_{21} - d_{22} - d_{23} \\ \Delta_4 = x - r_1 (\cos\theta - \sin\theta) \\ \tan\varphi_{11} = y/(x - r_2) \\ a_3 \cos\varphi_3 + b_3 \sin\varphi_3 + c_3 = 0 \end{cases}$$
(12)  
$$\vdots \psi \qquad a_3 = -2l_{31} (x + r_2 - 2r_1 \cos\theta) \\ b_3 = -2l_{31} (z - d_{31}) \\ c_3 = (x + r_2)^2 + (z - d_{31})^2 - 4r_1 [(x + r_2) \cos\theta + y \sin\theta] + y^2 + 4r_1^2 + l_{31}^2 - l_{32}^2 \end{cases}$$

式(12)可解析求解,且 $\varphi_{11}$ 与 $\varphi_{3}$ 均有2组解, $\Delta_{2}$ 与 $\Delta_4$ 仅有1组解。因此该机构位置逆解方程共有4 组解。

位置正解方程组为

$$\begin{cases} z = \Delta_2 + d_{21} + d_{22} + d_{23} \\ A_3^2 + B_3^2 + g = 0 \\ x = \Delta_4 + r_1 (\cos\theta - \sin\theta) \\ y = (x - r_2) \tan\varphi_{11} \end{cases}$$
(13)  

$$\vdots \psi \quad A_3 = r_1 (\cos\theta + \sin\theta) - \Delta_4 - r_2 + l_{31} \cos\varphi_3$$

$$B_3 = r_1 \left[ \tan \varphi_{11} \cos \theta - (2 + \tan \varphi_{11}) \sin \theta \right] + (\Delta_4 - r_2) \tan \varphi_{11}$$

$$g = (\Delta_2 + d_{21} + d_{22} + d_{23} - d_{31} - l_{31} \sin \varphi_3)^2 - l_{32}^2$$

值得注意的是,式(13)中第2个方程最高次数 项为  $\cos^2 \theta$ 。若采用半角变换,则可变为一元四次代 数方程,可解析求解。因此机构位置正解方程存在 4 组解。

#### 3.3 数值实例

如图1所示,并联机器人机构的结构参数分别 选为: $r_1 = r_2 = 1.0$  m, $l_{11} = l_{12} = l_{31} = l_{32} = 1.0$  m, $d_{11} = l_{12} = l_{12} = l_{13} = l_{13} = 1.0$  m, $d_{11} = l_{13} = l_{13}$  $d_{12} = d_{31} = d_{21} = d_{22} = d_{23} = 0.5 \text{ m}_{\odot}$ 两平移两转动模 式下4个驱动副输入量分别取为: $\Delta_2 = 0.1 \text{ m}, \Delta_4 =$  $0.2 \text{ m}, \varphi_1 = \varphi_2 = 60^\circ$ ; 三平移一转动模式下的 4 个驱 动副输入量分别取为: $\Delta_2 = 0.1 \text{ m}, \Delta_4 = 0.2 \text{ m}, \varphi_{11} =$  $\varphi_3 = 60^{\circ}$ 

根据上述位置正解模型和方程求解算法,利用 Matlab 软件编程计算,可求得两平移两转动模式下的 全部6组实数解(表2),三平移一转动模式下的全部2 组实数解(表3)。对应的装配构型如图4、5所示。

表 2 两平移两转动模式下位置正解

Tab. 2 Real solutions to forward displacement of 2T2R

序号	γ/(°)	<b>β</b> /(°)	<i>x/</i> m	z/m
1	18. 559 3	14. 829 1	0.8087	1.2759
2	29.7747	- 39. 616 7	0.4861	2.4701
3	152.8981	146. 472 3	1.3219	1.8401
4	172.6047	165. 144 4	1.2829	1.8213
5	354.0285	- 69. 573 9	0. 583 4	2.4345
6	356. 172 8	34. 610 1	1.0761	1.0712

表 3 三平移一转动模式下位置正解

Tab. 3 Real solutions to forward displacement of 3T1R

序号	γ∕(°)	x∕m	<i>y/</i> m	z/m
1	16.7749	0.8688	-0.2272	1.6000
2	- 9. 959 5	1.3579	0.6199	1.6000

#### 4 结论

(1)通过构造变自由度支链的方法,可将方位 特征集方法推广应用于连续变自由度(运动分岔特 性)机构的拓扑结构综合。利用改进的方位特征集 方法综合得到一类(640种)具有2种操作模式的四





自由度并联机构。

(2)采用冗余驱动方法,可保证综合得到的双

操作模式并联机构在2种不同操作模式(三平移一转动和两平移两转动)间快速切换,从而无需重新装配即可达到一机多用的效果。在存在多种不同操 作工位需求的场合(如抓取、加工、定位装配等工 艺)下,综合得到的并联机构具有重要应用开发 价值。

(3) 推导了机构处于 2 种操作模式时的位置 正、逆解方程,发现 2 种操作模式时的位置逆解方程 和三平移一转动模式时的位置正解方程均可解析求 解,这有利于运动控制。

- 参考文献
- 1 WOHLHART K. Kinematotropic mechanisms [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- 2 GALLETTI C, FANGHELLA P. Single-loop kinematotropic mechanisms [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(6): 743-761.
- 3 GALLETTI C, GIANNOTTI E. Multiloop kinematotropic mechanisms [C] // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2002: 455-460.
- 4 LEE C C, HERVÉ J M. Discontinuous mobility of one family of spatial 6R mechanisms through the group algebraic structure of displacement set [C] // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2002: 645 - 653.
- 5 LEE C C, HERVÉ J M. Discontinuously movable seven-link mechanisms via group-algebraic approach [J]. Proc. IMech E, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2005, 219(6): 577 - 587.
- 6 YAN H, KUO C. Topological representations and characteristics of variable kinematic joints [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2006, 128(2):384-391.
- 7 LEE C C, HERVÉ J M. Discontinuously movable 8R mechanisms with an infinity of bifurcations [C] // The 12th World Congress in Mechanism and Machine Science, 2007: 198 203.
- 8 LEE C C, HERVÉ J M. A novel discontinuously movable six-revolute mechanism [C] // International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots, 2009: 58-62.
- 9 KONG X, HUANG C. Type synthesis of single-DOF single-loop mechanisms with two operation modes [C] // International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots, 2009: 136 141.
- 10 FANGHELLA P, GALLETTI C, GIANNOTTI E. Parallel robots that change their group of motion [M]. Netherlands: Springer, 2006.
- 11 REFAAT S, HERVÉ J M, NAHAVANDI S, et al. Two mode overconstrained three DOFs rotational translational linear motor based parallel kinematics mechanism for machine tool applications [J]. Robotica, 2007, 25(4): 461-466.
- 12 KONG X, GOSSELIN C, RICHARD P L. Type synthesis of parallel mechanisms with multiple operation modes [J]. ASME

Journal of Mechanical Design, 2007, 129(6): 595 - 601.

- 13 KONG X. Type synthesis of 3-DOF parallel mechanisms with both a planar operation mode and a spatial translational operation mode [J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(4): 041015 - 041015 - 12.
- 14 KONG X. Reconfiguration analysis of a 3-DOF parallel mechanism using Euler parameter quaternions and algebraic geometry method [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 74(1): 188-201.
- 15 KONG X, YAN J. Type synthesis of 3-DOF multi-mode translational/spherical parallel mechanisms with lockable joints [J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 96(1): 323 - 333.
- 16 李秦川,陈巧红,武传宇,等.变自由度4-\*P\*R\*R\*R\*R\*R,并联机构[J].机械工程学报,2009,45(1):83-87.
   LI Qinchuan, CHEN Qiaohong, WU Chuanyu, et al. 4-\*P\*R\*R\*R\*R, parallel mechanism with variable mobility [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(1): 83-87. (in Chinese)
- 17 LI Q, HERVÉ J M. Parallel mechanisms with bifurcation of schoenflies motion [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(1): 158-164.
- 18 叶伟,方跃法,郭盛,等. 一种新型并联机构的运动分岔特性及运动学分析[J]. 机械工程学报,2013,49(13):8-15. YE Wei, FANG Yuefa, GUO Sheng, et al. Bifurcated motion and kinematics of novel parallel mechanism [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(13): 8-15. (in Chinese)
- 19 LATIFAH N, STEPHANE C, PHILEPPE W, et al. Reconfiguration analysis of a 4 RUU parallel manipulator [J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 96(1): 269 - 289.
- 20 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012.
- 21 杨廷力, 沈惠平, 刘安心, 等. 机构自由度公式的基本形式、自由度分析及其物理内涵[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 69-80.

YANG Tingli, SHEN Huiping, LIU Anxin, et al. Review of the formulas for degrees of freedom in the past ten years [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 69 - 80. (in Chinese)

22 沈惠平,尹洪波,李菊,等.基于方位特征方法的范例并联机构的拓扑特征分析及其启示与应用[J].机械工程学报,2015,51(13):101-115.

SHEN Huiping, YIN Hongbo, LI Ju, et al. Position and orientation characteristic based method and enlightenment for topology characteristic analysis of typical parallel mechanisms and its application [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 101-115. (in Chinese)

23 石志新,叶梅燕,毛志伟,等. 5-5型并联机器人位置正解的简单算法[J/OL].农业机械学报,2014,45(3):314-319. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\_abstract.aspx? file\_no = 20140351&flag = 1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298. 2014.03.051.

SHI Zhixin, YE Meiyan, MAO Zhiwei, et al. Simple method for forward displacement analysis of a 5-5 in-parallel robot [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(3); 314-319. (in Chinese)

- 16 LI X, ZLATANOV D, ZOPPI M, et al. Stiffness estimation and experiments for the Exechon parallel self-reconfiguring fixture mechanism [C] // Proceedings of the ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2012: 637 - 645.
- 17 陈修龙,孙先洋,邓昱. 4 UPS RPS 空间 5 自由度并联机构运动学分析[J/OL].农业机械学报,2013,44(8):257 261.http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\_abstract.aspx? file\_no = 20130844&flag = 1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.08.044.

CHEN X L, SUN X Y, DENG Y. Kinematics analysis of 4 – UPS – RPS spatial 5-DOF parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(8): 257 – 261. (in Chinese)

18 季晔, 刘宏昭, 原大宁. 4 - SPS/PPU 型并联机构工作空间与尺度分析[J/OL]. 农业机械学报, 2013, 44(11): 322 - 328. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\_abstract.aspx? file\_no = 20131154&flag = 1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.11.054.

JI Y, LIU H Z, YUAN D N. Workspace and scale analysis of 4 - SPS/PPU parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(11): 322 - 328. (in Chinese)

- 19 TANG T F, ZHAO Y Q, ZHANG J, et al. Conceptual design and workspace analysis of an Exechon-inspired parallel kinematic machine [C] // The 3rd ASME/IFToMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robotics, 2015:445-453.
- 20 路曼,赵艳芹.类 Exechon 并联模块的结构设计与刚度建模[J/OL].农业机械学报,2016,47(3):367-388.http:// www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\_abstract.aspx? file\_no = 20160352&flag = 1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016. 03.052.

LU M, ZHAO Y Q. Structural design and stiffness modeling for Exe – Variant parallel kinematic machine [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(3): 367 – 388. (in Chinese)

<sup>(</sup>上接第382页)