

基于单步法的车辆主动悬架有限频域静态输出反馈控制

王 刚 陈长征 于慎波
(沈阳工业大学机械工程学院, 沈阳 110870)

摘要: 针对车辆主动悬架系统,提出了基于单步法求解的静态输出反馈有限频域 H_∞ 控制器设计方法。由于现有的有限频域 H_∞ 控制定理含有双线性项,且全状态反馈控制增益并不满足单步法的充分条件,导致静态输出反馈问题无可行解。文中应用 GKYP 引理给出了一个新的基于静态输出反馈的有限频域 H_∞ 控制定理。该定理可采用单步线性矩阵不等式 LMI 直接求解,相对于传统的迭代 LMI 及 CCL 算法,极大地简化了设计过程。借助状态反馈信息,避免了初始求解的不可行性。最后,通过数值算例及台架试验验证了该方法的可行性。

关键词: 车辆; 主动悬架; 频域约束; 静态输出反馈; H_∞ 控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273; U463.33 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2017)02-0354-08

Single-step Method Based Finite Frequency Static Output Feedback Control for Vehicle Active Suspension Systems

WANG Gang CHEN Changzheng YU Shenbo
(School of Mechanical Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, China)

Abstract: A static output-feedback based finite frequency H_∞ controller design method was proposed for vehicle active suspension systems. The static output-feedback controller gain matrix was directly derived via a single-step linear matrix inequality (LMI) optimization. As the previous finite frequency H_∞ control theorem did not satisfy the sufficient conditions of single-step method and contained some bilinear terms. The static output-feedback control problem of previous finite frequency H_∞ control theorem was infeasible. A new static output-feedback based finite frequency H_∞ control theorem was given by using the generalized Kalman-Yakubovich-Popov (GKYP) lemma. The initial static output-feedback controller gain matrix can be directly solved by a single-step LMI optimization. Compared with the traditional iterative linear matrix inequality (ILMI) and cone complementarity linearization (CCL) algorithms, the design process was greatly simplified. The initial infeasibility issue of the static output-feedback control was resolved by using the state-feedback information. Finally, the effectiveness of the proposed method was validated by numerical and experimental results. The results for different road excitations showed that the finite frequency controlling can improve ride comfort effectively, while keeping suspension dynamic deflection, tire dynamic load and controlling input within allowable values.

Key words: vehicle; active suspension; frequency-domain constraint; static output-feedback; H_∞ control; linear matrix inequality

引言

随着汽车行业的竞争发展,乘客对汽车的舒适性、稳定性提出了越来越高的要求。传统的被动悬架难以达到预期的性能,开发主动、半主动悬架是最具市场前景的发展方式之一^[1]。汽车主动悬架控

制问题并非单纯的抑制车身的振动加速度,还需综合考虑悬架动行程、接地性,输入饱和等约束,显然增加了设计的难度。近年来,大部分学者提出考虑约束的 H_∞ 控制策略,用于处理汽车主动悬架的多目标控制问题^[2-5]。目前的一些非线性控制方法^[6-8],虽然具有较强的鲁棒性,但仅以簧载质量位

收稿日期: 2016-05-08 修回日期: 2016-06-27
基金项目: 国家自然科学基金项目(51175350)和辽宁省科技创新重大专项(2015106023)
作者简介: 王刚(1990—),男,博士生,主要从事车辆悬架系统及传动系统振动控制研究,E-mail: w346024519@126.com
通信作者: 陈长征(1964—),男,教授,博士生导师,主要从事机械设备的振动噪声控制研究,E-mail: CCZedu@126.com

移为控制目标,难以保证悬架的物理约束,且簧载位移无法直接测量。显然,考虑约束的 H_∞ 控制策略是一个有效的可选方案。近年来,SUN 等^[9-11]提出了汽车主动悬架的有限频域 H_∞ 控制策略。相对于全频域 H_∞ 控制而言,有限频域控制能进一步提高悬架的舒适性^[12-13]。

目前关于汽车悬架的有限频域 H_∞ 控制均是基于全状态反馈和动态输出反馈^[9-16]。静态输出反馈具有结构简单、易于工程实践等优点^[17-24]。因此,有必要进一步研究汽车悬架的有限频域 H_∞ 静态输出反馈控制。有限频域 H_∞ 静态输出反馈问题比传统的全频域静态输出控制具有更强的耦合性,传统的一些方法难以求解,一直是控制理论的一个难点问题。文献[17]提出了采用两阶段法处理有限频域 H_∞ 静态输出反馈控制问题,并应用于结构振动控制当中,然而该方法对于主动悬架控制并无可行解。

本文提出一个基于单步法求解的有限频域 H_∞ 静态输出反馈控制定理,用于车辆悬架的多目标控制。通过数值算例及台架试验验证所提方法的有效性。

1 问题描述及必要引理

考虑状态空间形式的连续线性系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}_1(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}_2(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_2\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ——系统状态

$\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ ——系统输入

$\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbf{R}^w$ ——外部干扰

$\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^q$ ——系统输出, $q < n$

$\mathbf{z}_1(t) \in \mathbf{R}^{p_1}$ ——系统目标输出

$\mathbf{z}_2(t) \in \mathbf{R}^{p_2}$ ——系统约束输出

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2$ 为合适维数的常数矩阵,且外部干扰 $\boldsymbol{\omega}(t) \in L_2[0, \infty)$ 。

对于全状态反馈控制,控制器具有

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

式中 $\mathbf{K}$ ——待设计的状态反馈增益矩阵

将式(2)代入式(1)中,可得基于全状态反馈的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{z}_1(t) = \bar{\mathbf{C}}_1\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}_2(t) = \bar{\mathbf{C}}_2\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{BK}$ $\bar{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_1\mathbf{K}$

$$\bar{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{K}$$

对于静态输出反馈控制,控制器可设计为

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{y}(t) \quad (4)$$

式中 $\hat{\mathbf{K}}$ ——待设计的静态输出反馈增益矩阵
则基于静态输出反馈的闭环系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{z}_1(t) = \hat{\mathbf{C}}_1\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}_2(t) = \hat{\mathbf{C}}_2\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{BK}\hat{\mathbf{C}}$ $\hat{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_1\hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}$
 $\hat{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2\hat{\mathbf{K}}\mathbf{C}$

主要控制目标为设计一个有限频域 H_∞ 静态输出反馈控制器,使得被控系统式(1)在无干扰下渐近稳定,且满足指标

$$\sup_{\omega_1 < \omega < \omega_2} \|T_{z_1\omega}(j\omega)\|_\infty < \gamma_{\min} \quad (6)$$

$$\|\mathbf{z}_2\|_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p_2) \quad (7)$$

式中 $T_{z_1\omega}$ —— $\boldsymbol{\omega}$ 到 $\mathbf{z}_1$ 的传递函数

$\gamma_{\min}$ ——能量增益

ω ——频率, $\omega_1 < \omega < \omega_2$

为了证明文中提出的主要定理,首先引进 GKYP 引理^[17]:对于闭环系统式(3),有限频域不等式(6)成立,仅当存在对称矩阵 $\mathbf{P} > 0, \mathbf{Q} > 0$ 满足

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\Phi} < 0 \quad (8)$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \bar{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (9)$$
$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Pi} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{f} \otimes \mathbf{P} + \boldsymbol{\psi} \otimes \mathbf{Q} \quad \boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ * & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & j\omega_c \\ -j\omega_c & -\omega_1\omega_2 \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{O}$ ——零矩阵

2 有限频域控制器设计与综合

由于现有的有限频域控制定理^[9-16]不满足单步法的充分条件,全状态反馈增益不能因式分解为正定矩阵乘积的形式,导致静态输出反馈问题并无可行解。因此,文中提出新形式的基于全状态反馈的有限频域控制 H_∞ 定理,使得控制增益矩阵可分解为正定矩阵乘积的形式,并引入了松弛系数,使其具有更小的保守性。

定理 1(有限频域 H_∞ 状态反馈控制):给定正标量 $\gamma, r, \eta, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ 。闭环系统(3)在 $\boldsymbol{\omega} = 0$ 时

渐近稳定,且在最大干扰能量 $\omega_{\max} = r/\eta$ 下满足性能指标(6)、(7)。若存在对称矩阵 $X > 0, Q > 0, P_s > 0, P$ 满足

$$\Xi_s + \Omega^T + \Omega < 0 \tag{10}$$

$$\Xi + \Gamma^T \Gamma < 0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} P_s & \{\bar{C}_2\}_i^T \\ * & 1/r \end{bmatrix} > 0 \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_s &= \begin{bmatrix} f \otimes P_s & O \\ O & \frac{1}{\eta} B_1 B_1^T \end{bmatrix} \quad \Xi = \begin{bmatrix} \Theta & O \\ O & \Pi \end{bmatrix} \\ \Omega &= \begin{bmatrix} -a_1 X & a_1 X \bar{A} & O \\ -b_1 X & b_1 X \bar{A} & O \\ O & c_1 X^{-1} P_s & -c_1 X^{-1} \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} O & O & O & O \\ -a_2 X & a_2 X \bar{A} & O & a_2 X B_1 \\ O & b_2 \bar{C}_1 & -b_2 I & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \end{aligned}$$

证明 首先定义矩阵 $\Phi_s = [\bar{A}^T \quad I \quad P_s]^T$, 将 Φ_s^T 及其转置左右乘不等式(10)可得

$$\Phi_s^T (\Xi_s + \Omega^T + \Omega) \Phi_s < 0 \tag{13}$$

注意到 $\Omega \Phi_s = 0$, 故式(13)等价于 $\Phi_s^T \Xi_s \Phi_s < 0$ 。根据 Schur 补引理可将式(13)改写为

$$\text{sym}(P_s \bar{A}) + \frac{1}{\eta} P_s B_1 B_1^T P_s < 0 \tag{14}$$

式(14)可保证 $P_s \bar{A} + \bar{A}^T P_s < 0$ 始终成立。根据连续系统的 Lyapunov 理论可知,系统式(3)在无干扰下渐近稳定。

同理,将 Φ^T 及其转置左右乘不等式(11)可得

$$\Phi^T (\Xi + \Gamma^T \Gamma) \Phi < 0 \tag{15}$$

注意到 $\Gamma \Phi = 0$, 因此式(15)等价于 $\Phi^T \Xi \Phi < 0$ 。根据 GKYP 引理可知,有限频域指标式(6)得到保证。

定义一个能量函数 $V(t) = x^T(t) P_s x(t)$ 。对于任意的 $\eta > 0$, 有不等式

$$\text{sym}(x^T P_s B_1 \omega) < \frac{1}{\eta} x^T P_s B_1 B_1^T P_s x + \eta \omega^T \omega$$

对 $V(t)$ 求导可得

$$\dot{V}(t) < x^T \left(\text{sym}(P_s \bar{A}) + \frac{1}{\eta} P_s B_1 B_1^T P_s \right) x + \eta \omega^T \omega$$

由式(14)可知, $\dot{V}(t) < \eta \omega^T \omega$ 。对其积分可得 $V(t) < \eta \omega_{\max} + V(0) = r$, r 为定义的椭圆域半径。则在零初始条件下,最大干扰能量范数为 $\omega_{\max} = r/\eta$ 。

进一步将式(12)写为

$$P_s - r \{\bar{C}_2\}_i^T \{\bar{C}_2\}_i > 0 \tag{16}$$

将式(16)两边同时左乘 x^T 右乘 x , 可得

$$r \{\bar{z}_2\}_i^T \{\bar{z}_2\}_i < x^T(t) P_s x(t) < r \tag{17}$$

故在最大干扰 $\omega_{\max} = r/\eta$ 下,式(7)得到保证。

考虑到定理 1 中含有双线性项及逆矩阵,难以直接应用 LMI 凸优化技术求解,需要对其进行同余变换。定义变换矩阵为

$$\begin{cases} T_1 = \text{diag} \{ X^{-1} & X^{-1} & I \} \\ T_2 = \text{diag} \{ X^{-1} & X^{-1} & I & I \} \\ T_3 = \text{diag} \{ X^{-1} & I \} \end{cases} \tag{18}$$

应用上述矩阵对定理 1 进行同余变换,并定义变量矩阵 $\bar{X} = X^{-1}, \bar{K} = KX^{-1}, \bar{Q} = X^{-1} QX^{-1}, \bar{P}_s = X^{-1} P_s X^{-1}, \bar{P} = X^{-1} P X^{-1}$, 可得推论 1。

推论 1: 给定正标量 $\gamma, r, \eta, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ 。闭环系统式(3)在 $\omega = 0$ 时渐近稳定,且在最大干扰能量 $\omega_{\max} = r/\eta$ 下满足性能指标式(6)、(7)。若存在对称矩阵 $\bar{X} > 0, \bar{Q} > 0, \bar{P}_s > 0, \bar{P}$ 及一般矩阵 $\bar{K}$ 满足

$$\bar{\Xi}_s + \bar{\Omega}^T + \bar{\Omega} < 0 \tag{19}$$

$$\bar{\Xi} + \bar{\Gamma}^T + \bar{\Gamma} < 0 \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_s & \{C_2 \bar{X} + D_2 \bar{K}\}_i^T \\ * & 1/r \end{bmatrix} > 0 \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_s &= \begin{bmatrix} f \otimes \bar{P}_s & O \\ O & \frac{1}{\eta} B_1 B_1^T \end{bmatrix} \\ \bar{\Xi} &= \begin{bmatrix} f \otimes \bar{P} + \psi \otimes \bar{Q} & O \\ O & \Pi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} -a_1 \bar{X} & a_1 (A \bar{X} + B_u \bar{K}) & O \\ -b_1 \bar{X} & b_1 (A \bar{X} + B_u \bar{K}) & O \\ O & c_1 \bar{P}_s & -c_1 \bar{X} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} O & O & O & O \\ -a_2 \bar{X} & a_2 (A \bar{X} + B_u \bar{K}) & O & a_2 B_1 \\ O & b_2 (C_1 \bar{X} + D_1 \bar{K}) & -b_2 I & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}$$

则全状态反馈增益矩阵为 $K = \bar{K} \bar{X}^{-1}$ 。

当系统只有部分状态可测时,需要考虑静态输出反馈控制。因此,有必要找到一个可行解,使得推论 1 中的增益矩阵可因式分解为 $\bar{K} \bar{X}^{-1} = \hat{K} C$ 。区别于以往的迭代方法,文中采用一个新的变量替换技术处理静态输出反馈问题。注意到 $\bar{X}$ 是对称正定矩阵,满足单步法的充分条件。根据文献[19-20],采用变量替换

$$\begin{cases} \bar{X} = N X_N N^T + R X_R R^T \\ \bar{K} = Y_R R^T \\ R = C^\dagger + N L \end{cases} \tag{22}$$

式中 $X_N \in \mathbf{R}^{(n-q) \times (n-q)}$ —— 对称正定矩阵

$X_R \in \mathbf{R}^{q \times q}$ —— 对称正定矩阵

$Y_R \in \mathbf{R}^{m \times q}$ ——一般矩阵
 $N \in \mathbf{R}^{n \times (n-q)}$ —— $\ker(\mathbf{C})$ 的基底
 $L \in \mathbf{R}^{(n-q) \times q}$ ——任意矩阵

将式(22)代入推论 1 中可得基于单步法求解的有限频域 H_∞ 静态输出反馈控制准则。

定理 2(有限频域 H_∞ 静态输出反馈控制):给定正标量 $\gamma, r, \eta, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ 。闭环系统式(5)在 $\omega = 0$ 时渐近稳定,且在最大干扰能量 $\omega_{\max} = r/\eta$ 下满足性能指标式(6)、(7)。若存在对称矩阵 $X_N > 0, X_R > 0, \bar{Q} > 0, \bar{P}_s > 0, \bar{P}$ 及一般矩阵 Y_R 满足

$$\bar{\Xi}_s + \bar{\Omega}^T + \bar{\Omega} < 0 \tag{23}$$

$$\bar{\Xi} + \bar{I}^T + \bar{I} < 0 \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_s & \{C_2 \bar{X} + D_2 \bar{K}\}_i^T \\ * & 1/r \end{bmatrix} > 0 \tag{25}$$

其中 $\bar{X} = NX_N N^T + RX_R R^T \quad \bar{K} = Y_R R^T$

其余矩阵同推论 1,则相应的静态输出反馈增益为 $\hat{K} = Y_R X_R^{-1}$ 。

备注 1:单步法的证明过程可参阅文献[20]。根据定理 2,有限频域静态输出反馈控制问题可通过一个单步 LMI 直接求解。区别于传统的全频域静态输出反馈控制问题,有限频域具有更强的耦合性,控制矩阵不仅与系统参数矩阵耦合,也和频域不等式矩阵耦合。传统的一些迭代 LMI 算法、CCL 算法^[21]及一些进化算法^[4]不一定具有可行解,且设计及编程复杂。显然,定理 2 极大地简化了设计过程。

备注 2:注意到定理 2 中含有一个自由矩阵 L ,该矩阵需要设计者自行选择。矩阵 L 的选取对定理 2 的可行性具有决定性的影响,当 L 选取不当,定理 2 并无可行解。在以往大部分工作中,均采用经验调试的方法,当系统维数较大时,该方法是繁琐的。根据当前较新的研究成果,文献[22]提出了借助状态反馈的信息决定矩阵 L ,避免了问题的不可行性。

因此,采用 3 个步骤求解有限频域 H_∞ 静态输出反馈控制增益矩阵。

(1)首先求解凸优化问题

$$P_s: \begin{cases} \text{minimize } \gamma \\ \text{subject to LMIs (19 - 21)} \end{cases} \tag{26}$$

(2)若式(26)具有可行解,则矩阵 L 为

$$L = N^\dagger \bar{X} C^T (C \bar{X} C^T)^{-1} \tag{27}$$

式中 $\bar{X}$ ——式(26)求出的 LMI 变量

(3)将求出的矩阵 L 代入 R 中,并求解凸优化问题

$$P_{of}: \begin{cases} \text{minimize } \gamma \\ \text{subject to LMIs (23 - 25)} \end{cases} \tag{28}$$

则 $\hat{K} = Y_R X_R^{-1}$ 。借助状态反馈信息可保证定理 2 是始终可行的。

为了便于对比,这里亦推导出基于单步法求解的全频域 H_∞ 静态输出反馈控制准则^[19]。

定理 3(全频域 H_∞ 静态输出反馈控制):考虑闭环系统式(5),给定正标量 γ, r ,则系统在 $\omega = 0$ 时渐近稳定,且在最大干扰能量 $\omega_{\max} = r/\gamma^2$ 下满足全频域 H_∞ 性能及约束性能(7)。若存在对称矩阵 $X_N > 0, X_R > 0$ 及一般矩阵 Y_R 满足

$$\begin{bmatrix} \text{sym}(\Sigma_1) & \Sigma_2 & B_1 \\ * & -I & O \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} NX_N N^T + RX_R R^T & \Sigma_3 \\ * & \frac{1}{r} \end{bmatrix} > 0 \tag{30}$$

其中 $\Sigma_1 = ANX_N N^T + ARX_R R^T + BY_R R^T$

$$\Sigma_2 = NX_N N^T C_1^T + RX_R R^T C_1^T + RY_R^T D_1^T$$

$$\Sigma_3 = (C_2 NX_N N^T + C_2 RX_R R^T + D_2 Y_R R^T)_i^T$$

若定理 3 可行,则全频域静态输出反馈控制增益矩阵为 $\hat{K} = Y_R X_R^{-1}$ 。证明过程可参照有界实引理及定理 1 的证明。

3 车辆主动悬架控制应用

将第 2 节提出的控制定理应用到车辆主动悬架控制当中。限于篇幅考虑,文中以图 1 所示的 1/4 车主动悬架模型^[9]为研究对象。显然,该方法同样适用于整车悬架。

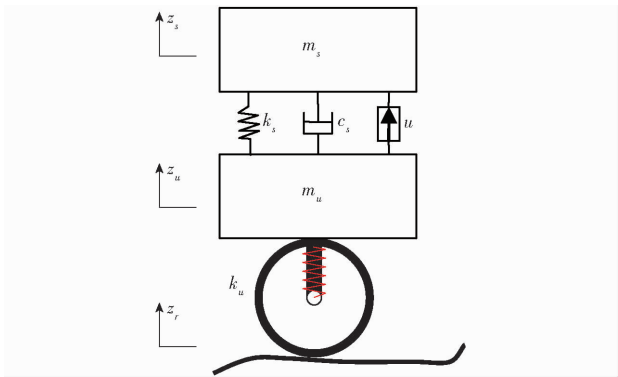


图 1 1/4 车主动悬架模型

Fig. 1 1/4 vehicle active suspension model

其动力学方程为

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s + c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) + k_s (z_s - z_u) = u \\ m_u \ddot{z}_u + k_u (z_u - z_r) - c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_u) - \\ k_s (z_s - z_u) = -u \end{cases} \tag{31}$$

式中 m_s, m_u ——车身及非簧载质量
 k_s, c_s ——悬架刚度和阻尼系数
 z_s, z_u ——车身及非簧载质量位移

k_u ——轮胎刚度 u ——主动执行力
 z_r ——路面干扰

选取系统的状态矢量为

$$\boldsymbol{x}(t) = [z_s - z_u \quad \dot{z}_s \quad z_u - z_r \quad \dot{z}_u]^T \quad (32)$$

由于状态变量 $z_u - z_r$ 包含路面干扰,采用低成本传感器难以测量,故文中选取可测的状态矢量为

$$\boldsymbol{y}(t) = [z_s - z_u \quad \dot{z}_s \quad \dot{z}_u]^T \quad (33)$$

考虑到 4~8 Hz 范围内的车身振动加速度对舒适性影响较大,定义 $\ddot{z}_s$ 为被控输出。

时域硬约束选为

$$\begin{cases} |z_s - z_u| < z_{\max} \\ k_u(z_u - z_r) < (m_s + m_u)g \\ |u(t)| < u_{\max} \end{cases} \quad (34)$$

式中 $z_{\max}$ ——规定的最大悬架行程

$u_{\max}$ ——执行器的最大输出力

式(34)中第 1 项表示悬架动行程约束;第 2 项表示轮胎动静载荷比;第 3 项表示控制饱和。

定义 $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\boldsymbol{z}}_r(t)$,可将悬架系统的状态空间方程表示为式(1)的标准形式,系统矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-k_s}{m_s} & \frac{-c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & \frac{-k_u}{m_u} & \frac{-c_s}{m_u} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{u_{\max}}{m_s} \\ 0 \\ \frac{-u_{\max}}{m_u} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-k_s}{m_s} & \frac{-c_s}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D}_1 = \frac{u_{\max}}{m_s}$$

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_{\max}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_u}{(m_s + m_u)g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

为了验证所提控制的有效性,以图 1 所示的模型为例给出数值验证。车辆参数^[9]如表 1 所示。

表 1 车辆参数
Tab.1 Vehicle parameters

参数	m_s/kg	m_u/kg	$k_s/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$
数值	320	40	18 000
参数	$k_u/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$z_{\max}/\text{m}$	$c_s/(\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$
数值	200 000	1 000	0.08

需要注意的是在文献[9]中,有限频域最大能

量干扰界限设定为 $\boldsymbol{\omega}_{\max} = r/\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta} = 10\,000$,而全频域最大能量干扰界限为 r/γ^2 ,实际上 $\boldsymbol{\eta}$ 远大于 γ^2 ,这样的比较并不等价。若强行设置 $\boldsymbol{\eta} = \gamma^2$,文献[9]中的定理并无可行解。为了解决该问题,文中引入了松弛变量,减少了设计的保守性。

为了公平地比较,选取有限频域设计参数为 $r = 0.3$, $\boldsymbol{\eta} = 150$ 。求解全频域控制定理发现 γ^2 始终接近于 79。因此,全频域的设计参数选为 $r = 0.16$ 。则两者的最大能量干扰界限均为 $\boldsymbol{\omega}_{\max} = 0.002$ 。

频域约束参数选为 $\boldsymbol{\omega}_1 = 4\text{ Hz}$, $\boldsymbol{\omega}_2 = 8\text{ Hz}$,最大控制力为 $u_{\max} = 1\,500\text{ N}$ 。定理 2 中的松弛变量参数选为 $a_1 = 0.000\,01$, $b_1 = 1.8$, $c_1 = 3.233$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$ 。调节松弛变量,可得保守性小的结果。通过算例研究发现,在约束界限允许的情况下, c_1 值越小越好。

求解式(26)~(28)可得有限频域静态输出反馈控制器为

$$\hat{\boldsymbol{K}}_f = [6.663\,7 \quad -1.556\,7 \quad -0.349\,0]$$

求解定理 3 可得全频域静态输出反馈控制器为

$$\hat{\boldsymbol{K}}_e = [10.168\,7 \quad -0.372\,9 \quad -0.459\,4]$$

根据求出的控制器,可得图 2 所示的悬架系统频域响应情况。图中比较了相同干扰界限下的全频域状态反馈(SFC)、全频域静态输出反馈(SOFC)、有限频域状态反馈(SFC)及静态输出反馈(SOFC)的频域响应情况。从图中可看出,在相同的干扰界限下,有限频域控制器在低频段能取得较小的加速度 L_2 增益,尤其在人体对舒适性更为敏感的 4~8 Hz 范围内。由于两者是在相同干扰界限下做比较,故悬架动行程及轮胎动载的峰值增益是相等的。

为了评估控制系统在时域的响应情况,以连续的长坡型包块作为路面干扰激励^[3],即

$$z_r = \begin{cases} \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi Vt}{L} \right) & (0 \leq t \leq 5\text{ s}) \\ 0 & (t > 5\text{ s}) \end{cases} \quad (35)$$

式中 h ——包块高度,取 0.05 m

V ——车速,取 25 m/s

L ——包块长度,取 5 m

图 3 为悬架系统在长坡包块激励下车身加速度的时域响应曲线,从图中可看出,基于有限频域控制的悬架系统具有较小的加速度幅值,舒适性得到改善。图 4 给出了主动悬架时域硬约束的响应情况,在给定的干扰界限下,有限频域控制器能满足悬架时域硬约束条件,悬架动行程、轮胎动载、控制力都在限值内。

由于舒适性可量化为加速度的均方根,为了评估控制器在随机路面激励^[16]下的响应情况,表 2~4 给出了各性能指标的均方根,其中激励时间为

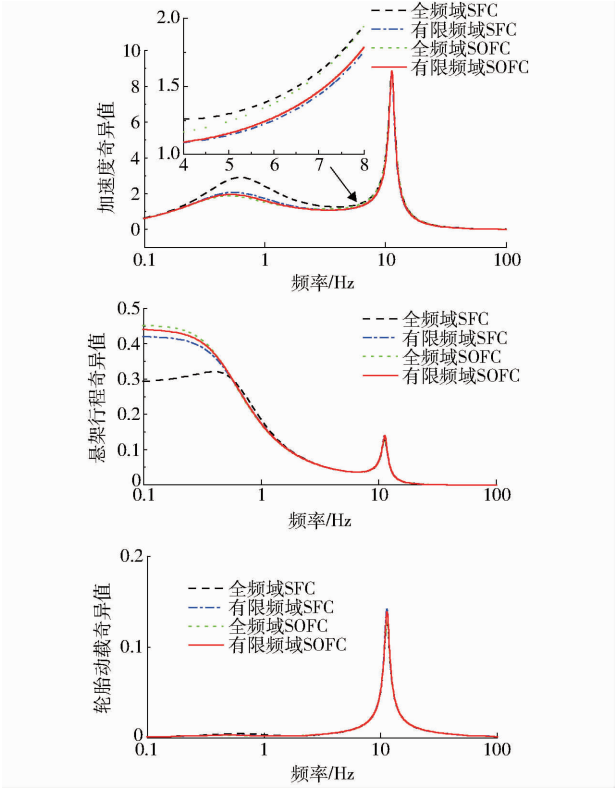


图 2 悬架系统频响曲线

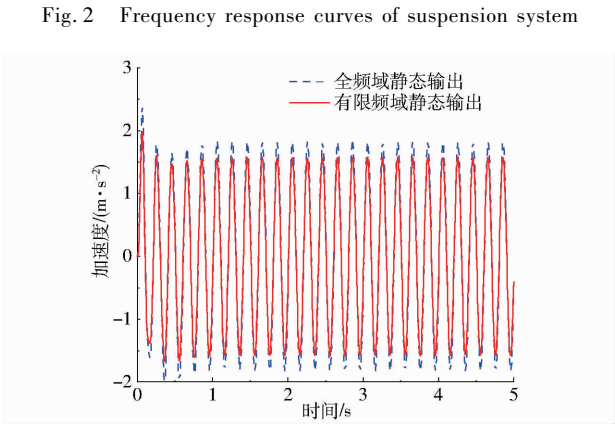


图 3 车身加速度包块响应

Fig. 3 Bump response of car body acceleration

10 s,车速为 25 m/s。从表中可看出,对于不同等级的路面轮廓,有限频域控制能取得较小的加速度均方根,同时其余的物理约束均方根指标也小于被动控制,满足规定的性能要求。

4 台架试验结果

为了进一步评估该方法的有效性,采用图 5 所示的主动悬架比例试验台进行台架试验,台架部件规格及尺寸如表 5 所示。工作部件包括与设备配套的基于 Matlab/Simulink 用户的实时控制软件、AMPAQ-L2 型线性电流放大器和一个 Q8-USB 型数据采集卡。

由于实际参数与名义参数存在一定偏差,直接采用第2节所提方法难以达到预期的效果。因此,

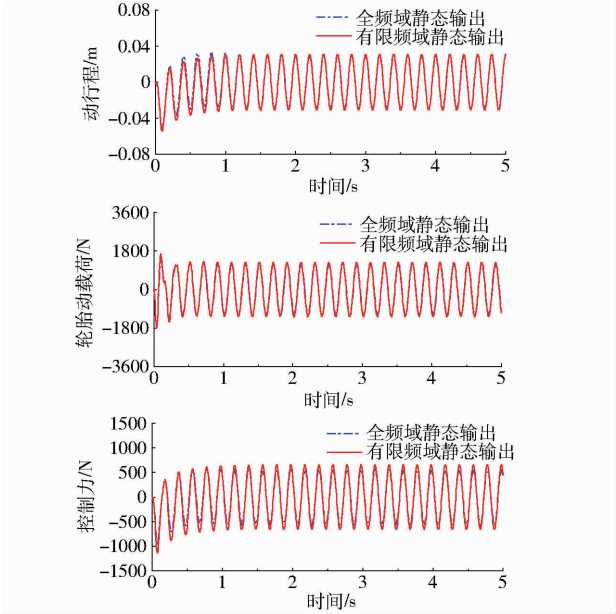


图 4 悬架约束响应

Fig. 4 Constraint response of suspension

表 2 车身振动加速度均方根

Tab. 2 Root mean square of body acceleration

m/s ²			
等级	被动	全频域	有限频域
B	0.108 8	0.038 1	0.029 1
C	0.217 5	0.076 1	0.058 3
D	0.435 0	0.152 2	0.116 6
E	0.870 0	0.304 4	0.233 2

表 3 悬架动行程比率均方根

Tab. 3 Root mean square of suspension dynamic stroke ratio

等级	被动	全频域	有限频域
B	0.020 93	0.020 1	0.020 7
C	0.041 87	0.039 3	0.041 4
D	0.083 73	0.078 7	0.082 8
E	0.167 50	0.157 4	0.164 7

表 4 轮胎动静载荷比均方根

Tab. 4 Root mean square of tire load ratio

等级	被动	全频域	有限频域
B	0.010 90	0.007 55	0.007 7
C	0.021 79	0.015 11	0.015 4
D	0.043 59	0.030 22	0.030 8
E	0.087 17	0.060 43	0.061 6

需要考虑系统的参数不确定性,设计一个鲁棒控制器。参照文献[5]中的步骤可将定理 2 拓展为考虑参数摄动的鲁棒控制准则。将求解出的控制增益编入控制软件中,产生控制力由电动机控制模块转换为电动机控制信号进行实时反馈控制。在测试中,顶盘加速度由下方安装的加速度计直接测量,顶盘和中间盘的位移由分辨率为 1 024 的编码器测量,

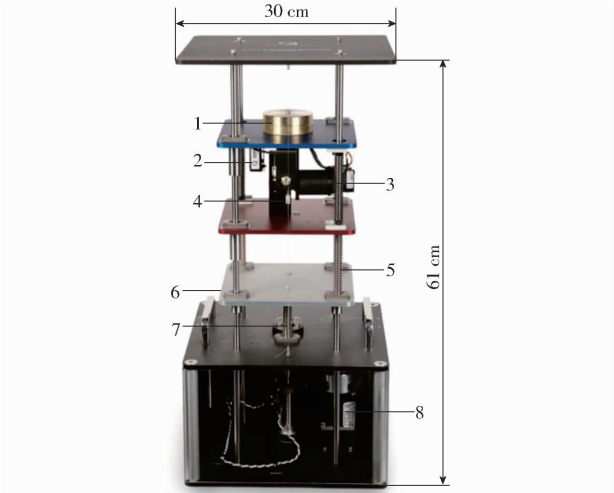


图5 主动悬架试验台

Fig.5 Active suspension setup

1. 可调质量块 2. 加速度计 3. 无刷直流电动机 4. 位移编码器
5. 可调刚度弹簧 6. 干扰传递板 7. 传动丝杠 8. 伺服电动机

表5 设备参数
Tab.5 Setup specification

参数	数值
长×宽×高/(cm×cm×cm)	30×30.5×61
总质量/kg	15
位移分辨率/bit	10
加速度计灵敏度/(g·V ⁻¹)	1
激励频率范围/Hz	0~15

并通过高通滤波器将其转换为速度量。路面干扰有底部的电动机-带传动装置模拟产生，激励频率与幅值设置为4~6 Hz,0.01 m。根据设备的规格及电动机功率，最大悬架行程选为 $z_{\max}=0.03\text{ m}$ ，最大控制输出选为 $u_{\max}=50\text{ N}$ 。

试验结果如图6~8所示。图6为不同控制下顶盘加速度的响应情况。显然，对比于被动控制及全频域控制，有限频域控制能取得更好的干扰衰减效果，具有较小的保守性。从图7中可看出，悬架行程小于规定的约束值。图8为轮胎行程 z_u-z_r 的响应情况。

5 结束语

提出了基于单步法求解的有限频域静态输出反馈 H_∞ 控制器设计方法，用于车辆主动悬架的多目标控制。应用 GKYP 引理，以 LMI 的形式给出了控制器的设计准则。针对一类约束的线性系统，给出

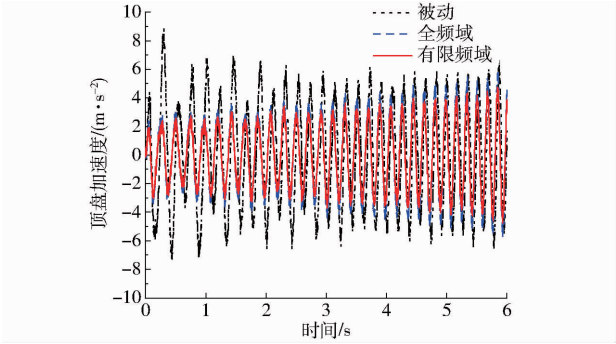


图6 垂直加速度响应

Fig.6 Vertical acceleration response

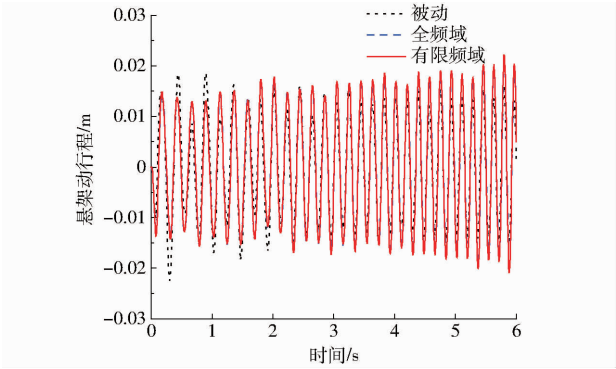


图7 悬架动行程

Fig.7 Suspension deflection

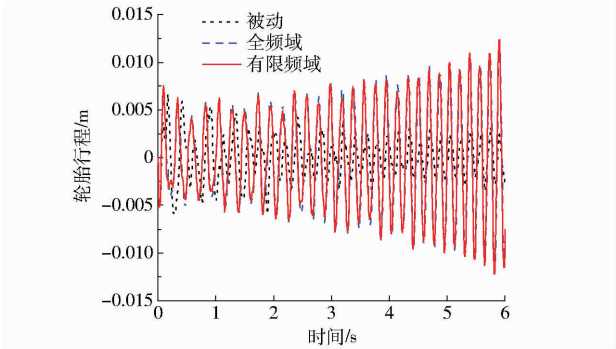


图8 轮胎行程

Fig.8 Tire deflection

了一个新的有限频域 H_∞ 控制定理，使其满足单步法的充分条件，通过引入松弛变量减少了设计的保守性。区别于以往的静态输出反馈求解方法，本文采用一个新的单步法，减少了编程及计算时间，且借助全状态反馈信息来避免问题的不可行性。数值及试验结果验证了设计方法的有效性，相对于被动系统及全频域控制而言，有限频域的控制方法能更好地衰减4~8 Hz的低频振动，在保证时域约束的前提下，舒适性得到改善。

参 考 文 献

1 寇发荣. 汽车磁流变半主动悬架系统设计与试验[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(4):280-287. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20160437&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.04.037.
KOU Farong. Design and test of vehicle semi-active suspension with magnetorheological damper[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(4):280-287. (in Chinese)
2 宋刚, 许长城. 考虑控制时滞的车辆主动悬架随机预瞄控制[J/OL]. 农业机械学报, 2013, 44(6):1-7. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20130601&flag=1

- csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no = 20130601&flag = 1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.06.001.
- SONG Gang, XU Changcheng. Stochastic optimal preview control of active vehicle suspension with time-delay consideration[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(6):1-7. (in Chinese)
- 3 宋刚, 吴志刚, 林家浩. 考虑时域硬约束的车辆主动悬架 H_∞ 控制[J]. 农业机械学报, 2009, 40(4):11-17.
- SONG Gang, WU Zhigang, LIN Jiahao. H_∞ control of active suspensions with time-domain hard constraints[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(4):11-17. (in Chinese)
- 4 孔英秀, 赵丁选, 杨彬, 等. 具有时滞的主动悬架非脆弱 H_∞/L_2-L_∞ 静态输出反馈控制[J/OL]. 农业机械学报, 2014, 45(8):1-7. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no = 20140801&flag = 1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2014.08.001.
- KONG Yingxiu, ZHAO Dingxuan, YANG Bing, et al. Non-fragile H_∞/L_2-L_∞ static output feedback control of active suspension with actuator input delay[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(8):1-7. (in Chinese)
- 5 陈长征, 王刚, 于慎波. 含输入时滞的电动汽车悬架系统有限频域振动控制的研究[J]. 振动与冲击, 2016, 35(11):130-137.
- CHEN Changzheng, WANG Gang, YU Shenbo. Finite frequency domain vibration control for suspension systems of electric vehicles with actuator input delay[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(11):130-137. (in Chinese)
- 6 DESHPANDE V S, MOHAN B, SHENDGE P, et al. Disturbance observer based sliding mode control of active suspension systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(11):2281-2296.
- 7 YAGIZ N, HACIOGLU Y. Backstepping control of a vehicle with active suspensions[J]. Control Engineering Practice, 2008, 16(12):1457-1467.
- 8 SUN W, PAN H, ZHANG Y, et al. Multi-objective control for uncertain nonlinear active suspension systems[J]. Mechatronics, 2014, 24(4):318-327.
- 9 SUN W, GAO H, KAYNAK O. Finite frequency H_∞ control for vehicle active suspension systems[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(2):416-422.
- 10 SUN W, LI J, ZHAO Y, et al. Vibration control for active seat suspension systems via dynamic output feedback with limited frequency characteristic[J]. Mechatronics, 2011, 21(1):250-260.
- 11 SUN W, ZHAO Y, LI J, et al. Active suspension control with frequency band constraints and actuator input delay[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2012, 59(1):530-537.
- 12 WANG R, JING H, YAN F, et al. Optimization and finite-frequency H_∞ control of active suspensions in in-wheel motor driven electric ground vehicles[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(2):468-484.
- 13 WANG R, JING H, KARIMI H R, et al. Robust fault-tolerant H_∞ control of active suspension systems with finite-frequency constraint[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2015, 62-63:341-355.
- 14 CHEN Y, ZHANG W, GAO H. Finite frequency H_∞ control for building under earthquake excitation[J]. Mechatronics, 2010, 20(1):128-142.
- 15 LI X, YANG G. Adaptive H_∞ control in finite frequency domain for uncertain linear systems[J]. Information Sciences, 2015, 314(1):14-27.
- 16 王刚, 陈长征, 于慎波. 含路面预瞄信息的车辆主动悬架有限频域多目标控制[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(12):294-300. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20151240&journal_id = jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.12.040.
- WANG Gang, CHEN Changzheng, YU Shenbo. Finite frequency multi-objective control of vehicle active suspension with road preview information[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 45(12):294-300. (in Chinese)
- 17 ZHANG H, WANG R, WANG J, et al. Robust finite frequency H_∞ static-output-feedback control with application to vibration active control of structural systems[J]. Mechatronics, 2014, 24(4):354-366.
- 18 CRUSIUS C, TROFINO A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(5):1053-1057.
- 19 WANG G, CHEN C, YU S. Optimization and static output-feedback control for half-car active suspensions with constrained information[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 378:1-13.
- 20 RUBUO-MASSEGU J, ROSSELL J, KARIMI H, et al. Static output-feedback control under information structure constraints[J]. Automatica, 2013, 49(1):313-316.
- 21 LI P, LAM J, CHEUNG K. Multi-objective control for active vehicle suspension with wheelbase preview[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(21):5269-5282.
- 22 PALACIOS-QUINONERO F, RUBUO-MASSEGU J, ROSSELL J, et al. Feasibility issues in static output-feedback controller design with application to structural vibration control[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(1):139-155.
- 23 BAKKA T, KARIMI H. H_∞ static output-feedback control design with constrained information for offshore wind turbine system[J]. Journal of the Franklin Institute, 2013, 350(8):2244-2260.
- 24 PALACIOS-QUINONERO F, RUBUO-MASSEGU J, ROSSELL J, et al. Vibration control for adjacent structures using local state information[J]. Mechatronics, 2014, 24(4):336-344.