doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.08.006

基于颗粒轨道模型的离心泵叶轮泥沙磨损数值预测

黄先北 杨 硕 刘竹青 杨 魏 黎耀军

(中国农业大学北京市供水管网系统安全与节能工程技术研究中心,北京100083)

摘要:基于两相流颗粒轨道模型和 Tabakoff 磨损模型,对某型号单吸泵进行数值模拟得到不同泥沙条件和不同入口条件下颗粒运动轨迹和磨损规律。不同泥沙条件共设定7组方案,即颗粒质量分数为10%时,颗粒粒径分别为0.01、0.05、0.1、0.5 mm,以及颗粒粒径为0.5 mm时,颗粒入口质量分数分别为2%、5%、8%、10%。结果表明,离心泵叶轮的磨损主要分布在叶片工作面和后盖板;粒径增大,颗粒向叶片工作面进口边的运动速度增加,形成点状的冲击式磨损;粒径减小时,在叶片工作面靠近出口边处逐渐形成条状的擦伤式磨损;颗粒质量分数对磨损率影响十分显著,而对磨损形态和位置没有影响;颗粒在入口分布的均匀度越大,叶轮内磨损形态的分散程度及磨损位置的轴对称性越明显。

关键词:离心泵;叶轮;磨损;颗粒轨迹;CFX 中图分类号:TH311 文献标识码:A 文章编号:1000-1298(2016)08-0035-07

Numerical Simulation of Erosion Prediction in Centrifugal Pump Based on Particle Track Model

Huang Xianbei Yang Shuo Liu Zhuqing Yang Wei Li Yaojun

(Beijing Engineering Research Center of Safety and Energy Saving Technology for Water Supply Network System, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract: Centrifugal pumps are widely used in the solid particles and liquid delivery, a number of areas petrochemical, aerospace, energy, irrigation and the like. When transporting sandy water, its internal wear becomes serious, which affects the life of unit. Therefore, the movement of particles in a centrifugal pump was investigated and the wear characteristics were predicted. Based on the two-phase particle track model and the Tabakoff and Grant erosion model, the simulation of a centrifugal pump was conducted to get the particle track and erosion regulation under different sands or inlet conditions. The result demonstrated that erosion was mostly taken place in hub and pressure side of vane in the impeller compared with shroud and suction side. The particle velocity to pressure side of the vane was increased with the raise of particle diameter, which would lead to dot impact erosion compared with large particles near the inlet side. While the strip scratch erosion was taken place at the press side of the impeller near the outlet when particle diameter was small. Moreover, the position and erosion shape were influenced by particle diameter in significant measure. While the erosion rate density was increased with the increase of concentration and the inlet velocity. Furthermore, the distribution of particle at the inlet also had effect on the erosion state, which meant that with the increase of uniformity of particle in the inlet, the erosion morphology turned into dispersed distribution from continuous sheet.

Key words: centrifugal pump; impeller; erosion; particle track; CFX

收稿日期: 2015-11-01 修回日期: 2016-03-12

基金项目:教育部科技项目(113010A)、北京高等学校青年英才计划项目(YETP0321)和国家自然科学基金项目(51139007)

作者简介:黄先北(1991一),男,博士生,主要从事流体机械动力学研究,E-mail: znhuang@163.com

通信作者:刘竹青(1973—),男,教授,博士生导师,主要从事流体机械及流体工程研究, E-mail: lzq@ cau. edu. cn

引言

我国大部分河流含沙量很高,黄河年均含沙量 为 37.8 kg/m^{3[1-2]},泥沙磨损成为影响水泵机组高 效稳定运行的重要因素。特别是用于农业灌溉的离 心泵,绝大部分是按照输送清水设计的,在含沙水条 件下运行,泥沙磨损问题^[3-5]尤为突出。因此,研究 含沙水条件下离心泵内颗粒运动规律及磨损特性, 对抗磨蚀离心泵优化水力设计、提升水泵机组性能 和使用寿命有重要意义。

目前国内外对两相流的研究多集中于颗粒的分 布。汪家琼等^[6]运用 CFX 的颗粒轨道模型对固液 两相流离心泵进行数值模拟,结果表明随着颗粒直 径的增大,壁面处固体颗粒相的滑移速度增大,固体 颗粒相向叶片工作面偏移。刘建瑞等^[7-10]通过数 值模拟发现,相同浓度时,随着粒径的增大,颗粒逐 渐向叶片工作面聚集,颗粒分布越多的地方磨损就 越严重。李亚林等^[11]采用离散颗粒模型对离心泵 内示踪粒子运动进行了数值模拟,结果表明不同直 径粒子在泵内跟随性差别很大。许洪元等^[12-16]通 过试验方法研究影响离心泵磨损的一些因素,结果 表明颗粒质量、靶材料以及颗粒冲击角度等对磨损 有重要影响。

颗粒轨道模型是把颗粒当作离散相,把液体当 作连续相,并且在拉格朗日坐标系中计算颗粒运动, 而在欧拉坐标系中计算连续相运动,然后将大量颗 粒进行统计得到颗粒运动的宏观轨迹。用拉格朗日 方法计算颗粒可以得到任一轨迹上颗粒运动的速 度。许洪元等^[17]用此方法对固体颗粒在离心泵内 部的运动路线进行了数值模拟,预测结果与试验值 接近。CFX 的颗粒轨道模型里有默认的2 种预测磨 损的模型,即 Finnie^[18-19]磨损模型和 Tabakoff 磨损 模型^[20]。通过计算比较,Tabakoff 磨损模型的计算 结果更准确,因此本文以稀疏两相流为介质,选用 Tabakoff 磨损模型来预测离心泵的磨损。

1 数值计算

1.1 计算模型

本文研究对象为一单级单吸离心泵,主要参数 为:额定流量 $Q_r = 700 \text{ m}^3/\text{h}$,额定扬程 $H_r = 50 \text{ m}$,额 定效率 $\eta_r = 86\%$,转速 n = 1 480 r/min,叶片数 $z_b =$ 7,叶轮直径 D = 409 mm,隔舌间隙 $\delta = 36 \text{ mm}$,叶轮 出口宽度 b = 41 mm,叶片出口角 $\beta = 29.4^\circ$ 。利用 ICEM 对模型进行 网格划分,选用非结构 网格 (图 1),并进行网格无关性检查,如图 2 所示,当网 格数为 174 万时,扬程的变化在 2% 以内,因此最终



选定网格数为174万。

1.2 颗粒运动基本方程

当颗粒在液体中运动时,颗粒所受到的作用力 来自于颗粒与流体的速度差。颗粒主要受到的力有 重力、阻力、虚拟质量力、压力剃度力、Basset力、 Saffman力、Magnus力等,表达式为

$$m_{p} \frac{\mathrm{d}u_{p}}{\mathrm{d}t} = F_{D} + F_{B} + F_{G} + F_{V} + F_{P} + F_{X} \qquad (1)$$

式中
$$t$$
——时间 m_p ——颗粒质量
 u_p ——颗粒运动速度
 F_p ——阻力 F_B ——Basset 力
 F_c ——重力 F_v ——虚拟质量力
 F_p ——压力梯度力
 F_v ——其他未考虑的外力总和

本文中,由于考虑的是流场中颗粒浓度较小的 情况,连续相的流体速度较大,并且连续相和离散相 之间具有较大的密度差,因此,固体颗粒受到的虚拟 质量力、压力梯度力、Basset 力、Saffman 力和 Magnus 力等不予考虑。因此颗粒运动的基本方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}x_{pi}}{\mathrm{d}t} = u_{pi} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{pi}}{\mathrm{d}t} = \frac{3C_D\rho_f}{4\rho_p D_p} | u_s | u_s \tag{3}$$

式中 u_s——液相和颗粒相间的滑移速度

C_D——与雷诺数有关的阻力系数

 ρ_{f} ——液体密度 ρ_{p} ——颗粒密度

D_p——颗粒直径

x_{pi}——颗粒的空间坐标位置

由公式可以看出,颗粒在液体中运动时,其运动 轨迹与颗粒直径、密度有关。

1.3 磨损模型方程

采用商业软件 ANSYS CFX 进行计算,计算流场 所用模型为颗粒轨道模型,其中预测磨损所用的模 型为 Tabakoff 磨损模型。颗粒轨道模型规定每组颗 粒从初始位置开始沿各自独立的轨道运动,颗粒间 相互独立,颗粒与流体之间有相对速度滑移,不考虑 颗粒的湍流扩散、粘性及导热。预测磨损所用的 Tabakoff 磨损模型是在不同颗粒速度、碰撞角度对 靶材磨损影响的研究下得出的经验与半经验磨损模 型,该模型是基于颗粒碰撞叶轮的角度和速度即颗 粒轨迹来计算的,其公式为^[20]

$$E = f(\theta) \left(\frac{V_p}{V_1}\right)^2 \cos^2 \theta \left[1 - \left(1 - \frac{V_p}{V_3} \sin \theta\right)^2\right] + \left(\frac{V_p}{V_2} \sin \theta\right)^4$$
(4)

其中

$$f(\theta) = \left[1 + k_1 k_{12} \sin\left(\theta \frac{\pi}{2\theta_0}\right)\right]^2$$
(5)
$$k_1 = \begin{cases} 1 & (\theta \le 2\theta_0) \\ 0 & (\theta > 2\theta_0) \end{cases}$$
(6)

式中 *E*——表面磨损率,量纲为1 *θ*——颗粒碰撞角度,(°)

V.-----颗粒冲击速度,m/s

V1、V2、V3----颗粒碰撞速度参数,m/s

 k_1 、 k_{12} 、 θ_0 ——常数

θ₀——最大磨损率所对应的碰撞角度,(°) 可把式(4)分为2部分:第1项为颗粒小角度切削 损伤,即为颗粒对展性材料的破坏机理;第2项为颗 粒法向速度对靶材的侵蚀损伤,正比于速度的4次 方,即为颗粒对脆性材料的破坏机理。由于该磨损 模型能综合考虑展性材料和脆性材料的共同影响, 所以能够较为全面地预测磨损特征。然而因为经验 系数较多,针对性较强,目前该磨损模型主要适合钢 制、铝制等材料,具体参数如表1所示。

表 1 模型参数 Tab.1 Parameters of model

-	材料	k_{12}	V_1	$V_2/$	V_3 /	θ_0				
			$(m \cdot s^{-1})$	$(m \cdot s^{-1})$	$(m \cdot s^{-1})$	(°)				
	钢	0. 293 328	123.72	352.99	179.29	30				
	铝	0. 585 000	159.11	194.75	190.50	25				

1.4 求解计算方法

进口为质量流量进口且流量设为额定流量,出

口为压力且相对静压设为零。液相为常温下的清水,固相为颗粒。壁面采用无滑移壁面,湍流模型采用 RNG *k* - *ε* 模型,固相采用颗粒轨道模型,磨损模型采用 Tabakoff and Grant 磨损模型。求解采用高精度 差分格式和方根 RMS 残差格式,求解精度设为 10⁻⁵。

本文针对液体中固体含量较少时固体颗粒的运动情况进行分析,在 CFX 设置中设定颗粒离散项为稀相,颗粒间不考虑相互碰撞;颗粒与固体边壁碰撞时为完全弹性碰撞,不考虑能量损失。

2 计算结果与分析

2.1 粒径对颗粒运动轨迹的影响

本文主要研究泥沙粒径、水中泥沙浓度(质量 分数)和泥沙颗粒在叶轮入口的分布规律对颗粒运 动轨迹和叶轮磨损率的影响,具体泥沙条件如表 2 所示。

表 2 泥沙条件 Tab.2 Sand conditions

会粉	方案序号							
参奴	1	2	3	4	5	6	7	
粒径 d/mm	0.01	0.05	0.10	0.50	0.50	0.50	0.50	
质量分数 $C_M / \%$	10	10	10	10	8	5	2	

颗粒入口质量分数为10%时,不同泥沙粒径的 颗粒轨迹如图3所示。从图中可以看出,随着粒径 增大,颗粒在叶轮中的运动速度增大,其向叶片工作 面运动的趋势更为明显,与叶片的碰撞逐渐趋近于 进口边,然后沿叶片与后盖板的交界处滑行至叶片 尾部。由图4可以看出,粒径较小时小粒径的粒子 跟随水流特性好,随着粒径增大,粒子的轨迹受流场 的影响减弱,受其自身惯性和离心力的影响增强。 现有的试验研究表明,大颗粒向叶片工作面的偏转趋 势大,易与叶片头部发生撞击;小质量颗粒易与叶片工 作面后端发生撞击,与同一叶片工作面后端发生二次 撞击的几率较小。这与本文所描述的现象一致。

为了更加直观地观察颗粒在叶轮内部的分布, 选取单个流道进行分析。不同粒径条件下,颗粒在 单个流道中的分布情况如图5所示,可以看出,随着 粒径的增大,颗粒会逐渐趋向于叶片压力面和后盖 板聚集,与颗粒轨迹描述的现象相吻合。

图 6 所示为颗粒质量分数为 10% 时,不同颗粒 粒径条件下叶轮后盖板上的磨损率分布情况。颗粒 较小时,由于颗粒向叶片运动的速度较慢,所以磨损 主要发生在靠近叶片出口边,且磨损形状呈连续的 条状,这是小粒径颗粒与叶片滑擦造成的。随着颗 粒的增大,颗粒在后盖板的磨损位置逐渐趋近于进



口边,这是因为随着粒径增大,颗粒在叶轮中运动的 速度增大,其向工作面运动的速度加快,与叶片的碰 撞逐渐趋近于进口边,这与颗粒运动轨迹描述的 现象吻合。除此之外,进口附近较大颗粒的磨损 形状呈点状,这是大粒径颗粒携带较大的冲击速 度与叶片进口边产生冲击造成的,说明磨损形态

Fig. 5 Particles distribution with different diameters in

single passage



与粒径有关。

由上文的分析,粒径越大则颗粒分布越趋于压 力面,图7所示为叶片压力面的磨损分布图,当颗粒 较小时,磨损主要集中在压力面尾部靠近后盖板,随 着粒径的增大,磨损逐渐延伸至叶片头部并且磨损 率越来越大,根据颗粒的运动轨迹,粒径较大时对头 部造成的是冲击磨损。



Fig. 7 Contours of erosion rate density for blade with different diameters

2.2 颗粒质量分数对颗粒运动轨迹的影响

颗粒粒径为 5 mm 时,不同入口质量分数的颗 粒轨迹如图 8、9 所示。可以看出质量分数的改变对 颗粒运动轨迹影响不大,这是由于颗粒大小不变,其 受力状态也就不变,因此无论含沙量多少,其运动轨迹 也不变。

采用单个流道来观察颗粒的分布情况。从 图 10 中可以明显看出,在粒径不变的情况下,不同 质量分数下的颗粒在离心泵中的分布基本没有变 化,因此质量分数对单流道中颗粒的分布影响不大, 与颗粒轨迹描述相符。

同一粒径不同质量分数下,后盖板相同位置磨 损率随质量分数增加而增大,如图 11 所示。叶片头



图 8 不同颗粒质量分数下单个颗粒运动轨迹 Fig. 8 Particle track with different concentrations







图 10 不同质量分数下的颗粒在单个流道中的分布 Fig. 10 Particles distribution with different diameters in single passage

部和尾部的磨损率也都增大,且磨损形态相同,如 图 12所示。由此可见,颗粒质量分数的变化基本不 改变磨损形态和位置,只改变原有位置上磨损率,与 颗粒运动轨迹现象一致,即含沙量对颗粒磨损形态 和位置影响不大。

为定量研究磨损率随颗粒质量分数的变化, 图 13显示了最大磨损率随颗粒质量分数的变化。 同一粒径下,叶片和后盖板最大磨损率与颗粒入



Fig. 11 Contours of erosion rate density for hub with different concentrations



图 12 不问<u>凤重万致下叶</u>万磨钡华云图 Fig. 12 Contours of erosion rate density for blade with different concentrations

口浓度的关系如图 13 所示,可以看出在各个粒径下,最大磨损率均随着颗粒质量分数增大而增大, 说明颗粒质量分数对磨损率的影响很大,与前文现象描述一致。

2.3 颗粒在入口的分布排列对磨损的影响

颗粒在离心泵进口段有多种分布情况,根据颗 粒在入口分布的均匀程度由杂乱到均匀分为4种入 射方式,对应的后盖板磨损率如图14所示,随着颗 粒在入口分布的均匀度增加,磨损形态从连续的片 状逐渐变成了分散的点状。这是由于当颗粒在入口 分布十分均匀时,如图14d所示,由于颗粒粒径不 变,其质量也就不变,如颗粒轨道模型假设中所阐 述,即每个颗粒都按照自己独立的轨迹运动,于是均 匀地冲击在后盖板上,故形成分散的点状的磨损形 态。而当颗粒在入口分布杂乱时,入口颗粒分布的 不均匀造成了颗粒撞在后盖板有些地方磨损相对集 中,这就形成了连续的片状磨损,这种情况更接近于 真实情况。



Fig. 13 Variations of maximum erosion rate density with different concentrations





3 结论

(1)离心泵叶轮的磨损主要分布在后盖板和叶 片工作面;颗粒质量分数对磨损率影响显著,对磨损 形态和位置没有影响。

(2)颗粒粒径对叶轮内磨损形态和磨损位置有显著影响。粒径不同的颗粒受力状态不同,其运动轨迹和与叶轮壁面的接触的部位不同。粒径增大,

颗粒向叶片工作面进口边的运动速度增加,形成点 状的冲击式磨损;粒径减小时,在叶片工作面靠近出 口边处逐渐形成条状的擦伤式磨损。

(3)颗粒在泵入口的分布规律,对 Tabakoff 磨 损模型预测结果有显著影响。颗粒在入口分布的均 匀度增加,叶轮内磨损形态的分散程度及磨损位置 的轴对称性越明显。

▶ 考 文 献

- 1 钱宁.黄河三门峡水库的泥沙问题[C]//黄河三门峡工程泥沙问题研讨会论文集,2006:23-30.
- 2 赵文林. 黄河泥沙[M]. 郑州:黄河水利出版社, 1996.
- 3 杨敦敏,叶海燕,陈刚.离心泵内固液两相流动的图像测量[J].农业机械学报,2006,37(12):100-104. YANG D M, YE H Y, CHEN G. Image measurement of gas-liquid two-phase flow inside the centrifugal pump[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2006, 37(12):100-104. (in Chinese)
- 4 杨凌波,肖业祥,唐兵,等.基于固液两相流的纸浆泵磨损预测[J].排灌机械工程学报,2015,33(2):98-103.

YANG L B, XIAO Y X, TANG B, et al. Prediction of pulp pump erosion characteristic based on solid-liquid two-phase turbulent flow[J]. Journal of Drainage & Irrigation Machinery Engineering, 2015,33(2):98 - 103. (in Chinese)

- 5 周大庆,米紫昊,茅媛婷. 基于欧拉固液两相流模型的泵站进水侧流场三维模拟[J]. 农业机械学报, 2013, 44(1):48-52. ZHOU D Q, MI Z H, MAO Y T. 3-D numerical simulation of inlet structure flow in pumping station based on Eulerian solid-liquid two-phase flow model[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(1):48-52. (in Chinese)
- 6 汪家琼,蒋万明,孔繁余,等. 固液两相流离心泵内部流场数值模拟与磨损特性[J]. 农业机械学报, 2013, 44(11): 53-60. WANG J Q, JIANG W M, KONG F Y, et al. Numerical simulation of solid-liquid two-phase turbulent flow and wear characteristics of centrifugal pump[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(11): 53-60. (in Chinese)
- 7 刘建瑞,徐永刚,王董梅,等. 离心泵叶轮固液两相流动及泵外特性数值分析[J]. 农业机械学报,2010,41(3):86-90. LIU J R, XU Y G, WANG D M, et al. Numerical simulation of solid-liquid two-phase turbulent flow in impeller channel and pump characteristics analysis[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(3):86-90. (in Chinese)
- 8 王洋,徐小敏,张翔. 离心泵内低固相浓度固体颗粒运动的数值模拟[J]. 流体机械, 2009, 37(2): 24-27. WANG Y, XU X M, ZHANG X. Numerical simulation for the motion of dilute solid particles in centrifugal pump[J]. Fluid Machinery, 2009, 37(2):24-27. (in Chinese)
- 9 张玉良,李昳,崔宝玲,等.两相流离心泵水力输送性能计算分析[J].机械工程学报,2012,48(14):169-176. ZHANG Y L, LI Y, CUI B L, et al. Computational analysis of hydraulic transmission performance in two-phase flow centrifugal pump[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(14):169-176. (in Chinese)
- 10 刘娟,许洪元,唐澍,等. 离心泵内固体颗粒运动规律与磨损的数值模拟[J]. 农业机械学报, 2008, 39(6): 54 59.
 LIU J, XU H Y, TANG S, et al. Numerical simulation of erosion and particle motion trajectory in centrifugal pump[J].
 Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(6): 54 59. (in Chinese)
- 11 李亚林,袁寿其,汤跃,等. 离心泵内示踪粒子运动的离散相模型模拟[J]. 农业机械学报, 2012, 43(11):113-118. LIYL, YUANSQ, TANGY, et al. Simulation of tracer particles movement by discrete phase model in the centrifugal pump [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012,43(11):113-118. (in Chinese)
- 12 许洪元,陈雪梅,王琳,等. 离心泵叶轮中固体颗粒的运动研究[J]. 流体机械, 1992,20(7):1-6.
 XUHY, CHENXM, WANGL, et al. A study on motion of solid particles in centrifugal pump impeller[J]. Fluid Machinery, 1992,20(7):1-6. (in Chinese)
- 13 邓军,杨永全,沈焕荣,等.水流含水量对磨蚀的影响[J]. 泥沙研究,2000(4):1-5. DENG J, YANG Y Q, SHEN H R, et al. The influence to abrasion of sediment concentration[J]. Journal of Sediment Research, 2000(4):1-5. (in Chinese)
- 14 余江成,姚启鹏. 河流泥沙颗粒特性对磨损影响的研究[J]. 水利水电技术, 1999, 30(11): 37-39.
- 15 李双寿, 卢达溶, 洪亮, 等. ADI 渣浆泵叶片磨损机理的研究[J]. 流体机械, 2000, 28(6): 5-8.
- 16 SATO J, USAMI T, OKAMURA K, et al. Comparison of silt erosion characteristics of materials through different types of test methods[C] // The 3rd Japan - China Joint Conference on Fluid Machinery, 1990:201 - 207.
- 17 许洪元,吴玉林,高志强,等. 稀相固粒在离心泵轮中的运动实验研究和数值分析[J]. 水利学报, 1997(9):12-18.
- XU H Y, WU Y L, GAO Z Q, et al. Experimental study and numerical analysis of the motion of dilute soild particles in centrifugal pump impellers[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1997(9):12-18. (in Chinese)
- 18 FINNIE I. The mechanism of erosion of ductile metals [C] // Proceedings of the 3rd US National Congress of Applied Mechanics, 1958.
- 19 FINNIE I. Erosion of surfaces by solid particles [J]. Wear, 1960, 3(2): 87-103.
- 20 GRANT G, TABAKOFF W. Erosion prediction in turbomachinery resulting from environmental solid particles [J]. Journal of Aircraft, 1975, 12(5): 471-478.

(上接第34页)

- 13 蔡金来. 轴流泵出口环量对出水流道损失影响的数值模拟研究[D]. 扬州:扬州大学, 2009. CAI Jinlai. Study on the numerical simulation of the influence of the outlet circulation of axial flow pump to the hydraulic loss of the outlet conduit [D]. Yangzhou: Yangzhou University, 2009. (in Chinese)
- 14 杨帆,刘超,孙丹丹,等. 轴流泵装置虹吸式出水流道内流机理数值分析[J]. 农业机械学报, 2015, 46(6):60-65. YANG Fan, LIU Chao, SUN Dandan, et al. Numerical investigation of internal flow mechanisms of siphon outlet passage in pumping system[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(6):60-65. (in Chinese)
- 15 BLAZEK J. Computational fluid dynamics: principles and applications [M]. 2nd ed. Netherlands: Elsevier Ltd., 2005:227-270.
- 16 LAUNDER B E, SPALDING D B. Lectures in mathematical models of turbulence [M]. London: Academic Press, 1972.
- 17 LAUNDER B E, SPALDING D B. The numerical computation of turbulent flows [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1974, 3(2):269 289.
- 18 RODI W. Turbulence models and their application in hydraulics experimental and mathematical fluid dynamics [M]. Delft: IAHR Section on Fundamentals of Division II, 1980:44 - 46.
- 19 ANSI/HI 9.8-1998 American national standard for pump intake design[S].1998.