doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.07.044

# 面向计算机辅助分析的并联机构符号描述方法*

廖　明[1]　刘安心[1]　沈惠平[2]　杭鲁滨[3]　杨成松[1]　杨廷力[2]

(1. 解放军理工大学野战工程学院, 南京 210007; 2. 常州大学机械工程学院, 常州 213164;
3. 上海工程技术大学机械工程学院, 上海 201620)

**摘要**: 并联机构拓扑信息的符号描述方法对于计算机辅助机构拓扑结构分析和机构型综合等研究具有重要意义。基于并联机构的 SOC 组成原理,遵循机构学领域符号表达习惯,提出了具有代数运算功能的并联机构符号描述系统,将并联机构拓扑结构表示为一种符号多项式,其中每一项代表一条支路;分析了运动副方位关系的传递性,提出了方位关系组的概念,给出了运动副方位关系的符号描述方法。在此基础上给出了 POC 集的符号推导方法,将支路的 POC 集表示为所含运动副 POC 集的加法运算,将整个并联机构的 POC 集表示为各支路 POC 集的乘法运算。该符号描述系统在一定程度上具有符号语言的代数特征,便于进行并联机构拓扑不变量的自动分析,为计算机辅助并联机构型综合提供了理论基础和有效工具。

**关键词**: 并联机构　拓扑结构　符号描述　方位特征集　拓扑结构多项式

**中图分类号**: TH112　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2015)07-0310-08

# Symbolic Description of Parallel Mechanism for Computer Aided Analysis

Liao Ming[1]　Liu Anxin[1]　Shen Huiping[2]　Hang Lubin[3]　Yang Chengsong[1]　Yang Tingli[2]

(1. *College of Field Engineering*, *PLA University of Science and Technology*, *Nanjing* 210007, *China*
2. *College of Mechanical Engineering*, *Changzhou University*, *Changzhou* 213164, *China*
3. *College of Mechanical Engineering*, *Shanghai University of Engineering Science*, *Shanghai* 201620, *China*)

**Abstract**: Kinematic and dynamic performance of a parallel mechanism is, to some extent, determined by its topological structure, so topological structure analysis and synthesis is very important to research and application of parallel mechanisms, especially the parallel robot mechanisms. In order to achieve computer aided topological structure analysis and synthesis of parallel mechanisms, the topological structure of parallel mechanism must first be represented symbolically. An algebraic symbolic description system was proposed for parallel mechanisms on the basis of SOC-based mechanism composition principle. With this symbolic description system, topological structure of any parallel mechanism can be expressed as a symbolic polynomial, each item of the polynomial represents a branch of the parallel mechanism. The transitivity of kinematic pair orientation relations was discussed and symbolic representations of different kinematic pair relations were introduced. Based on this symbolic description system, position and orientation characteristic (POC) set of parallel mechanisms can be derived easily with the help of a computer program, i.e. POC set of a branch was sum of the POC set of each kinematic pair in this branch and POC set of the complete parallel mechanism was product of the POC set of each branch. The proposed symbolic description system features the algebraic property of a symbolic computer language, so it can be used reliably in computer aided mechanism studies. Work in this paper provided a

收稿日期: 2015-01-25　修回日期: 2015-03-06

*国家自然科学基金资助项目(51475050)、上海市科委重点支撑资助项目(12510501100)和解放军理工大学预研基金资助项目(KYGYZLXY1309)

**作者简介**: 廖明,讲师,博士,主要从事机器人机构学研究,E-mail: netlm99@qq.com

**通讯作者**: 刘安心,教授,博士生导师,主要从事机器人机构学研究,E-mail: liuanxinn@163.com

theoretic basis and an effective method for computer aided analysis and automatic generation of parallel mechanisms.

**Key words**: Parallel mechanism　Topological structure　Symbolic description　Position and orientation characteristic set　Topological structure polynomial

## 引言

并联机器人机构具有高刚度、高精度等优点，但并联机构设计具有高维、强耦合、非线性及多学科交叉等特点，因而并联机构设计理论与方法成为机构学研究的前沿课题。

并联机构往往具有复杂的拓扑结构，计算机辅助条件下的并联机构拓扑机构分析，对于提高工作效率、加快机构创新设计具有重要现实意义，其中一项重要工作即给出并联机构恰当的描述形式[1]。在这方面，机构的几何代数方法得到大量研究，如李群、螺旋理论、共形几何等[2-3]。但几何代数方法通常只能得到机构瞬时状态，且分析过程复杂。近年来，能够实现机构结构特性全周状态刻画的形式化描述方法得到发展，主要为两类：符号描述和矩阵描述。其中符号描述形象直观、自由灵活、形式多样，在并联机构型谱库、构型选择、建模以及型数综合中得到广泛应用[4-5]。朱煜等[6]采用常见字符对并联机构的支路结构、平台外形、铰链数目、驱动副等拓扑要素进行描述，支持复合支路描述；丁华锋等[7-8]提出了能够描述并联机构支路拓扑结构及运动副方位关系的字符串描述。Chu 等[9]较早提出了基于邻接关系表的运动链同构识别方法；李树军等[10-11]提出了包含运动链环路及运动副方位信息的特征编码矩阵，较传统邻接矩阵表示有所简化，能够表达环路、实现同构体辨识。就机构符号描述的具体形式而言，又可分为面向运动副的符号表达，以及面向构件的表达。在面向运动副的机构符号描述方法中，以运动副的排列顺序表现构件之间的链接关系，而构件本身（包括上、下平台）通常被略去。矩阵描述方法侧重于构件之间的拓扑链接，适用于机构同构体辨识，但难以从矩阵元素的状态分布直接判读机构的拓扑结构。

实践表明，面向运动副的机构符号描述对于机构拓扑结构设计与分析所提供的信息是足够的，也是本文研究重点。本文针对目前并联机构符号描述中存在的拓扑信息不完整、缺乏系统性和可推导性等缺陷，基于 SOC 并联机构组成原理，研究并联机构拓扑要素的符号描述方法，涉及支路拓扑结构、运动副方位关系及平台构型等，并在此基础上分析 POC 集的符号推导方法。

## 1　并联机构拓扑结构的符号描述

并联机构一般由基础（静）平台、动平台和连接两平台的并联支路所组成[12-13]。就拓扑结构而言，并联机构相当于是关于运动副的一种代数多项式，其中每一项表示一条连接上下平台的支路，而支路拓扑结构的组成元素即运动副由于提供一定的运动变化因素，相当于自变量，于是可给出如下定义：

拓扑结构多项式：由运动副的“积”构成支路，以支路的“和”构成并联机构的一种符号描述。

支路的阶定义为所含运动副数目，拓扑结构多项式的阶则定义为最大支路的阶。拓扑结构多项式具有如下性质：多项式的项数即为支路数目；所有支路的阶的和即为机构运动副数目；多项式的项的“和”满足通常意义上的交换律和结合律；多项式的项内部的“积”不满足通常意义上的交换律；多项式中任意两项的组合表示一个环路；并联机构独立环路数为多项式的项数减一。

### 1.1　基于拓扑结构多项式的并联机构支路组成描述

根据拓扑结构多项式定义，并联机构 PM 可由若干支路 L 表示为

$$\mathrm{PM} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \cdots + \mathrm{L}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{L}_i \tag{1}$$

支路 $\mathrm{L}_i$ 具有 SOC 或 HSOC 两种形式，对于 SOC 支路，一般将其表示为一个由运动副所组成的序列，该序列起于基础平台，而终止于动平台。若以 J 表示运动副，则 SOC 支路可以表示为 J 的“积”，即支路有表达形式

$$\mathrm{L}_i = \mathrm{J}_1\mathrm{J}_2\cdots\mathrm{J}_{k_i} = \prod_{j=1}^{k_i} \mathrm{J}_j \tag{2}$$

式中 $k_i$ 表示第 $i$ 条支路的运动副数目，即支路的“阶”。显然，对称并联机构由阶相同的支路所组成，而非对称并联机构由具有不同阶的支路所组成。由于 $k_i$ 可以取不同数值，因而式(2)也适合于非对称并联机构的描述，如图 1a 所示。

图 1a 机构可描述为 $\mathrm{PM} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_4 = \mathrm{P}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3\mathrm{R}_4 + \mathrm{P}_8\mathrm{R}_7\mathrm{R}_6\mathrm{R}_5 + \mathrm{P}_9\mathrm{S}_{10}\mathrm{S}_{11} + \mathrm{P}_{14}\mathrm{S}_{13}\mathrm{S}_{12}$，图 1b 可描述为 $\mathrm{PM} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 = \mathrm{R}_{11}\mathrm{P}_{12}\mathrm{S}_{13} + \mathrm{R}_{21}\mathrm{P}_{22}\mathrm{S}_{23} + \mathrm{R}_{31}\mathrm{P}_{32}\mathrm{S}_{33}$。

### 1.2　HSOC 支路的拓扑结构描述

对于 HSOC 支路，其结构形式相当于由若干

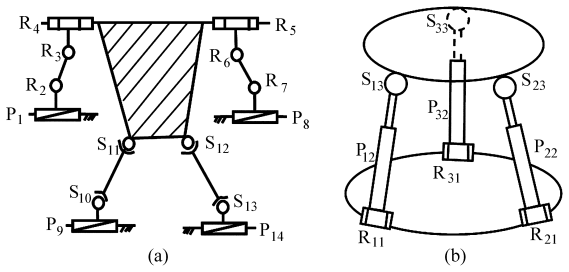



图 1 并联机构拓扑结构多项式符号描述示例

Fig. 1 Polynomial symbolic description of PM topological structure

(a) 2 - PRRR/2 - PSS[4] (b) 3 - RPS

SOC 支路进行串联或并联的组合,如由 4 个彼此平行的 R 副构成的等效 P 副,以及某个并联机构作为支路的一部分等。首先需要明确支路之间并联关系是指两条支路的首尾分别连接在一个构件上。因此,按照前面关于拓扑结构多项式的定义,以“和”表示并联关系、“积”表示串联关系,则 HSOC 支路的多项式描述形式为

$$^{H}L_i = L_{i1}(L_a + L_b + \cdots + L_x)L_{i2} \tag{3}$$

式中括号表示多个支路并联构成一个等效子支路。图 2 给出了几种常见 HSOC 拓扑结构形式及其多项式符号描述。若将并联子支路替换为等效串联子支路,则 HSOC 退化为一般 SOC 支路,如可将图 2a 中的串联子支路 $R_1R_2$、$R_4R_5$ 分别替换为 U 副($U_1$、$U_2$),则该 HSOC 等效为 SOC:$L = U_1P_2U_2$。又如可将图 2b 中的并联子支路($R_5R_6 + R_7R_8$)替换为移动副 $P_3$,则原 HSOC 支路简化为:$L = R_1R_2P_3R_3R_4$。同理图 2d 所示的 HSOC 可以将并联子支路($R_1R_2 + R_4R_5$)、($R_2R_3 + R_5R_6$) 分别替换为移动副 $P_2$ 和 $P_3$,则该支路简化为:$L = P_1P_2P_3$。式(3)中并联子支路的前继串联子支路也可以略去,如图 2e、2f 所示。

式(3)给出的拓扑结构多项式不满足一般意义上的分配律和结合律。图 3a 所示 HSOC 可描述为 $L_1 = S_1P_1S_3 + S_2P_2S_3$,此处 $S_3$ 为多重球副,不能按照结合律提取 $S_3$ 使其成为 $L_2 = (S_1P_1 + S_2P_2)S_3$。同理图 3b 所示 HSOC 的拓扑结构多项式中的 $R_2$(此处 $R_2$ 为复合铰链)也不能按照结合律提取。

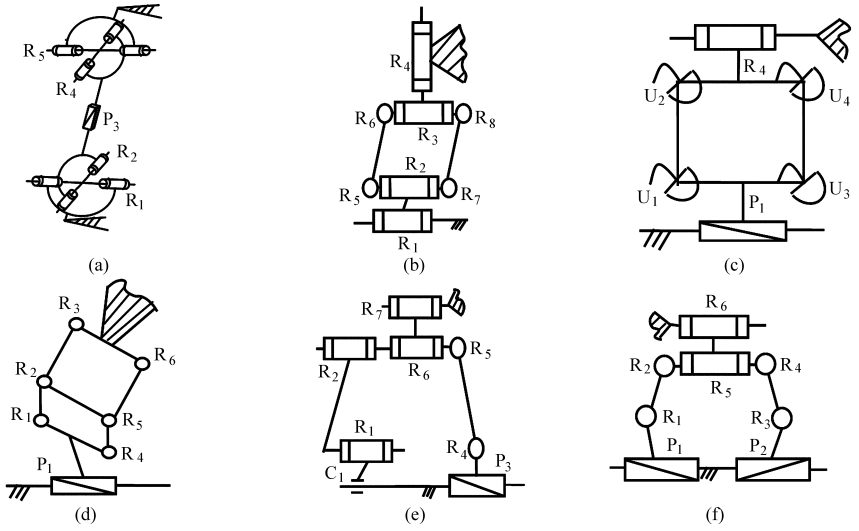



图 2 典型 HSOC 的多项式符号描述[14]

Fig. 2 Polynomial symbolic description of classical HSOC branch

(a) $L = R_1R_2P_3R_4R_5$ (b) $L = R_1R_2(R_5R_6 + R_7R_8)R_3R_4$ (c) $L = P_1(U_1U_2 + U_3U_4)R_4$

(d) $L = P_1(R_1R_2 + R_4R_5)(R_2R_3 + R_5R_6)$ (e) $L = (C_1R_1R_2 + P_3R_4R_5)R_6R_7$ (f) $L = (P_1R_1R_2 + P_2R_3R_4)R_5R_6$

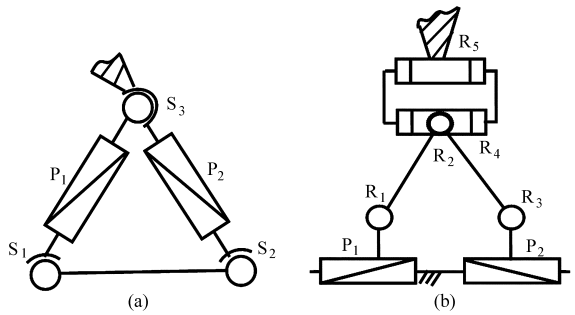



图 3 具有公共运动副的 HSOC 多项式符号描述[14]

Fig. 3 Polynomial symbolic description of HSOC with a shared pair in branch

(a) $L = S_1P_1S_3 + S_2P_2S_3$ (b) $L = (P_1R_1R_2 + P_2R_3R_2)R_4R_5$

## 2 尺度约束类型的符号描述

尺度约束类型是为了描述构件尺度(杆长、轴长、扭角)相对于运动副轴线的几何约束关系类型而引入的概念[15]。尺度约束类型将运动副之间的方位关系归纳为 6 种基本类型,即:平行、共轴、垂直、空间共点、共面及其他一般情形。为便于符号推导和运算,将尺度约束类型定义的运动副方位关系用符号“%”表示,6 种基本运动副方位关系的具体符号表示分别为:平行(//)、共轴(—)、垂直(⊥)、空间共点(·)、共面(▱)和其他($\varepsilon$)。

运动副方位关系可以视作一种二元关系，表示关于两个运动副（相邻或不相邻）之间的轴线空间方位关系。多个运动副之间的方位关系构成一个方位关系组，表示为

$$O = J_1 \% J_2 \% \cdots \% J_k \tag{4}$$

利用式（4）产生如 R // R // R、R // R - | - R、R·R·R·R、R□R□R、R—R—R 等方位关系组表示形式，如图 4 所示。式（4）表达的方位关系组体现了两个运动副之间的相对关系，其涉及的运动副不一定处于同一支路。另一方面，对于不同方位关系组，即使所涉及的方位关系描述符号相同，也不能等同看待，如：$O_1 = R_1 // R_2$，$O_2 = R_3 // R_4$，则不能简单地将 $O_1$、$O_2$ 合并为 $O = R_1 // R_2 // R_3 // R_4$。

事实上，不相邻运动副（包括不在同一支路的运动副）之间的方位关系往往可以推理得到。表 1 中除第 1 行和第 1 列外，其上三角部分表示由对应的第 1 行和第 1 列所在两个方位关系组可能推导出的方位关系（以 R 副为例进行说明），表中[J% J]表示瞬时存在的方位关系。

由表 1 可知，大多数方位关系（如 //、—、□等）

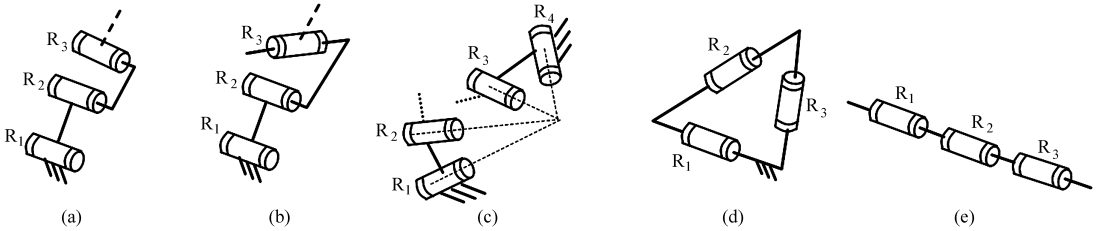



图 4　5 种典型运动副方位关系组的符号描述

Fig. 4　Symbolic description of five types of pair orientation relation

（a）平行：$R_1 // R_2 // R_3$　（b）垂直：$R_2 \perp R_3$　（c）共点：$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$　（d）共面：$R_1 \square R_2 \square R_3$　（e）共轴：$R_1 — R_2 — R_3$

**表 1　方位关系的导出特性（$J_1 \% J_2 \% J_3$）**

**Tab. 1　Derivative properties of orientation relations**

| | $R_2 // R_3$ | $R_2 — R_3$ | $R_2 \cdot R_3$ | $R_2 \perp R_3$ | $R_2 \square R_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1 // R_2$ | $R_1 // R_3$ | $R_1 // R_3$ | $[R_1 \cdot R_3]$ | $R_1 \perp R_3$ | $[R_1 \square R_3]$ |
| $R_1 — R_2$ | | $R_1 — R_3$ | $R_1 \cdot R_3$ | $R_1 \perp R_3$ | $R_1 \square R_3$ |
| $R_1 \cdot R_2$ | | | $R_1 \cdot R_3$ | Undef | $[R_1 \cdot R_3]$ |
| $R_1 \perp R_2$ | | | | Undef | $[R_1 \perp R_3]$ |
| $R_1 \square R_2$ | | | | | $[R_1 \square R_3]$ |

具有传递性。可将具有传递性的方位关系命名为正则方位关系，并表示为：$\%^*$；其余为非正则关系，仍用% 表示。对于正则方位关系 $\%^*$，若有 $J_1 \%^* J_2 \%^* J_3$，则必有 $J_1 \%^* J_3$。而非正则方位关系则不然，如垂直关系 $\perp$。根据方位关系的传递性，可以给出并联机构所有运动副方位关系类型的简化描述。

## 3　并联机构平台构型的符号描述

在进行机构简图绘制时，往往需要给出构件尤其是上下平台的结构特征。由于并联机构使用与安装要求的多样性，基础平台和动平台往往具有复杂多样的结构形态，其类型可分为：平面型、导轨型、角台型及一般空间型等几种[4]。另外需要考虑到平台所关联的运动副以及与这些运动副之间的方位关系。因此，平台构型的符号描述可以采用

$$\begin{cases} F = (\text{Shape}, \% J_1, \% J_2, \cdots, \% J_k) \\ F = (\text{Shape}, J_1, J_2, \cdots, J_k) \end{cases} \tag{5}$$

式中 Shape 代表平台类型，可取值 $\{\square, \equiv, +, \varepsilon\}$ 其中任意一种，分别表示：平面型、导轨型、角台型及空间型等平台类型。% 作为运动副与所连接平台之间的方位关系，可以选择任意一种方位关系类型；对于构型明确的平台，可以略去%，如图 5b、5c、5d 所示。若用 $F_b$、$F_t$ 分别表示上平台和下平台，典型平台的符号描述形式如图 5 所示。

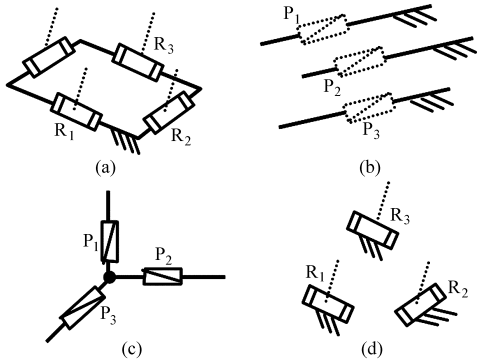



图 5　4 种典型下平台的符号描述

Fig. 5　Symbolic description of four types of base-flat

（a）平面型：$F_b = (\square, // R_1, // R_2, // R_3)$

（b）导轨型：$F_b = (\equiv, P_1, P_2, P_3)$

（c）角台型：$F_b = (+, P_1, P_2, P_3)$

（d）一般型：$F_b = (\varepsilon, R_1, R_2, R_3)$

综合上述，由支路拓扑链接关系、运动副方位关系以及平台构型等拓扑要素的符号描述，可得到能够准确刻画复杂并联机构的符号描述系统。该描述系统包括支路拓扑关系符号集 $Set_L$、运动副方位关系符号集 $Set_O$ 以及平台构型符号集 $Set_F$ 等。因此，

并联机构的诸多拓扑要素可统一由下述符号集系统进行描述

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Set}_{\mathrm{Linkages}} \\ \mathrm{Set}_{\mathrm{Oirentations}} \\ \mathrm{Set}_{\mathrm{Flats}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Set}_{\mathrm{L}} \\ \mathrm{Set}_{\mathrm{O}} \\ \mathrm{Set}_{\mathrm{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3, \cdots\} \\ \{\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3, \cdots\} \\ \{\mathrm{F}_b, \mathrm{F}_t\} \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中 $\mathrm{F}_b$、$\mathrm{F}_t$——基础平台和动平台

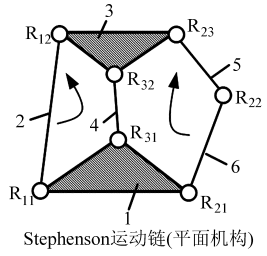
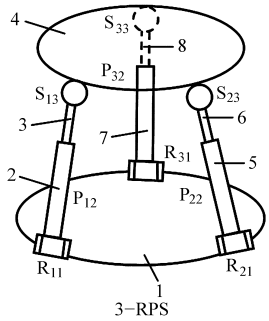
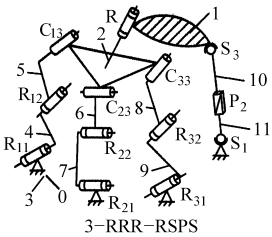
$\mathrm{O}_i$——运动副方位关系组

$\mathrm{L}_i$——一条链接上下平台的支路,并由拓扑结构多项式确定

根据式(6),表 2 给出了几种并联结构的符号描述示例,并列出了另两种表示方法的描述结果,参见文献[4-5]。

**表 2 并联机构符号描述示例**

**Tab. 2 Symbolic description instances of PM**

| 并联机构简图 | 本文描述方法 | 文献[11]表示方法 | 文献[6]表示方法 |
|---|---|---|---|
|  Stephenson运动链(平面机构) | $\mathrm{L}_1 = \mathrm{R}_{11}\mathrm{R}_{12}$<br>$\mathrm{L}_2 = \mathrm{R}_{21}\mathrm{R}_{22}\mathrm{R}_{23}$<br>$\mathrm{L}_3 = \mathrm{R}_{31}\mathrm{R}_{32}$<br>$\mathrm{PM} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3$<br>$\mathrm{O}_1 = \mathrm{R}_{11} /\!/ \mathrm{R}_{12} /\!/ \mathrm{R}_{21} /\!/ \mathrm{R}_{22} /\!/ \mathrm{R}_{23} /\!/ \mathrm{R}_{31} /\!/ \mathrm{R}_{32}$ | $\begin{pmatrix} 3^1 & 2^4 & 3^3 & 2^2 & 2^5 & 2^6 \\ \mathrm{R} & \mathrm{R} & \mathrm{R} & \mathrm{R} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ (\mathrm{R}) & (\mathrm{R}) & \mathrm{R} & 0 & \mathrm{R} & \mathrm{R} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | (2-RR)-RRR/$\mathrm{P}_3$-$\mathrm{P}_3$/3-3/P |
|  3-RPS | $\mathrm{L}_1 = \mathrm{R}_{11}\mathrm{P}_{12}\mathrm{S}_{13}$<br>$\mathrm{L}_2 = \mathrm{R}_{21}\mathrm{P}_{22}\mathrm{R}_{23}$<br>$\mathrm{L}_3 = \mathrm{R}_{31}\mathrm{P}_{32}\mathrm{R}_{33}$<br>$\mathrm{PM} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3$<br>$\mathrm{O}_1 = \mathrm{R}_{11} \perp \mathrm{P}_{12}$<br>$\mathrm{O}_2 = \mathrm{R}_{21} \perp \mathrm{P}_{22}$<br>$\mathrm{O}_3 = \mathrm{R}_{31} \perp \mathrm{P}_{32}$ | $\begin{pmatrix} 3^1 & 2^2 & 2^3 & 3^4 & 2^6 & 2^5 & 2^8 & 2^7 \\ 2 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{R} & \mathrm{P} & \mathrm{S} & \mathrm{S} & \mathrm{P} & \mathrm{R} & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ (\mathrm{R}) & (\mathrm{P}) & (\mathrm{S}) & \mathrm{S} & 0 & 0 & \mathrm{P} & \mathrm{R} \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | 3-RPS/$\mathrm{P}_3$-$\mathrm{P}_3$/3-3/P |
|  3-RRR-RSPS | $\mathrm{L}_1 = \mathrm{R}_{11}\mathrm{R}_{12}\mathrm{C}_{13}$<br>$\mathrm{L}_2 = \mathrm{R}_{21}\mathrm{R}_{22}\mathrm{C}_{23}$<br>$\mathrm{L}_3 = \mathrm{R}_{31}\mathrm{R}_{32}\mathrm{C}_{33}$<br>$\mathrm{L}_4 = \mathrm{S}_1\mathrm{P}_2\mathrm{S}_3$<br>$\mathrm{PM} = (\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3)\mathrm{R} + \mathrm{L}_4$<br>$\mathrm{O}_1 = \mathrm{R}_{11} /\!/ \mathrm{R}_{12} /\!/ \mathrm{C}_{13}$<br>$\mathrm{O}_2 = \mathrm{R}_{21} /\!/ \mathrm{R}_{22} /\!/ \mathrm{C}_{23}$<br>$\mathrm{O}_3 = \mathrm{R}_{31} /\!/ \mathrm{R}_{32} /\!/ \mathrm{C}_{33}$<br>$\mathrm{O}_4 = \mathrm{R}_{11} /\!/ \mathrm{R}_{31}$<br>$\mathrm{F}_b = (\varepsilon, \mathrm{R}_{11}, \mathrm{R}_{21}, \mathrm{R}_{31}, \mathrm{S}_1)$<br>$\mathrm{F}_t = (\diamond, \mathrm{R}, \mathrm{S}_3)$ | $\begin{pmatrix} 4^3 & 2^4 & 2^5 & 4^2 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & 2^1 & 2^{10} & 2^{11} \\ \mathrm{R} & \mathrm{R} & \mathrm{C} & \mathrm{C} & \mathrm{R} & \mathrm{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\mathrm{R}) & (\mathrm{R}) & (\mathrm{C}) & \mathrm{C} & 0 & 0 & \mathrm{R} & \mathrm{R} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (\mathrm{R}) & (\mathrm{R}) & (\mathrm{C}) & \mathrm{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{S} & \mathrm{P} & \mathrm{S} \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ | (3-RRC)-R-SPS/$\mathrm{P}_2$-$\mathrm{P}_4$/2-4 |

对比表 2 中的 3 种描述方法不难发现,其中文献[11]采用的矩阵形式的描述方法能够体现多副构件、环路特征、运动副方位关系类型等拓扑要素,但不相邻运动副之间的方位关系未能表达,支路拓扑结构采用隐式表示,不便于描述 HSOC 支路;文献[6]所采用的字符串描述方法属于单串表达,能够提供支路拓扑结构、平台构型等拓扑要素,但没有表示运动副方位关系。文献[6,11]的两种表示方法都不便于并联结构拓扑属性如 POC 集的计算机辅助推导,在并联机构型综合方面受到一定限制。相较而言,本文方法提供了详细的运动副方位关系类型,机构拓扑要素描述更为全面、准确;而机构拓扑结构的多项式符号描述类似于一种符号语言,便于 POC 集的程序化符号推导与分析,对于并联机构的型综合与机构简图计算机辅助绘制较为有利。

另一方面,从简化描述角度考虑,平台描述和方位关系描述在默认情况下可以略去。如表 2 中平面机构的转动副之间的方位关系可以省略;对于具有平面型铰链分布的平台也可以略去不用表示,如表 2 中前面第 2 个机构的平台表示可略去。

## 4　应用与实例分析

在给出了并联机构拓扑结构、尺度约束类型、平台构型等要素符号描述基础之后，下面介绍以拓扑结构多项式为基础的并联机构 POC 集的符号推导方法。

### 4.1　理论推导

并联机构 POC 集描述了并联机构输出构件所具有的可能存在的运动特征，其推导过程需要遵循交运算和并运算规则[16]。按照式(1)～(3)关于并联机构拓扑结构的符号描述形式，可定义与拓扑结构多项式相对应的 POC 集对偶运算规则，即支路的“和”映射为支路 POC 集的“积”(交运算规则)；而支路内部运动副的“积”映射为运动副 POC 集的“和”(并运算规则)。因此，可将并联机构 POC 集的推导过程描述为

$$\begin{aligned}\mathrm{POC(PM)}&=\mathrm{POC}(\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\cdots+\mathrm{L}_k)=\\&\prod_i^k\mathrm{POC}(\mathrm{L}_i)=\\&\prod_i^k\mathrm{POC}(\mathrm{J}_{i1}\mathrm{J}_{i2}\cdots\mathrm{J}_{n_i})=\\&\prod_i^k\left(\sum_j^{n_i}\mathrm{POC}(\mathrm{J}_{ij})\right)\end{aligned}\tag{7}$$

对于 HSOC 支路，按照式(3)的描述，其内部存在并联形式的子支路和 SOC 子支路，因而需要在 HSOC 上反复应用式(7)。由此可见，并联机构的 POC 集可视作每个运动副 POC 集的函数。任意运动副的 POC 集包括移动方向 t(＊)和旋转方向 r(＊)两种运动特征，可表示为

$$\mathrm{POC(J)}=\begin{pmatrix}\mathrm{t(J)}\\\mathrm{r(J)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{t(\%J)}\\\mathrm{r(\%J)}\end{pmatrix}\tag{8}$$

由于所有运动副均可以由 R、P 两种基本运动副组合而成，故在上下文含义明确的条件下可省略式(8)中的方位关系符号：%，如 r(R) = = r(∥R)，t(P) = = t(∥P)等。C 副、H 副存在伴随移动，以 C 副为例，其移动特征可表示为 t(C) = t(⊥C) + t(∥C)，即 t(⊥C)表示垂直于 C 副轴线平面内的一个移动，而 t(∥C)表示沿 C 副轴线方向的一个移动。

给定两个运动副 POC 集：$\mathrm{POC(J}_j\mathrm{)}$、$\mathrm{POC(J}_k\mathrm{)}$，则 $\mathrm{POC(J}_j\mathrm{)}$与 $\mathrm{POC(J}_k\mathrm{)}$的并运算可表示为

$$\mathrm{POC(J}_j\mathrm{)}+\mathrm{POC(J}_k\mathrm{)}=\begin{pmatrix}\mathrm{t(J}_j\mathrm{)}+\mathrm{t(J}_k\mathrm{)}\\\mathrm{r(J}_j\mathrm{)}+\mathrm{r(J}_k\mathrm{)}\end{pmatrix}\tag{9}$$

将式(9)代入式(7)，可得到并联机构的 POC 集推导公式

$$\begin{aligned}\mathrm{POC(PM)}&=\prod_i^k\left(\sum_j^{n_i}\mathrm{POC(J}_{ij}\mathrm{)}\right)=\\&\prod_i^k\begin{pmatrix}\sum\mathrm{t(J}_{ij}\mathrm{)}\\\sum\mathrm{r(J}_{ij}\mathrm{)}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{10}$$

按照 POC 集的并运算规则，移动特征 t(J)的和以及旋转特征 r(J)的和，分别存在 3 种可能的形式：$\mathrm{t^1(J)}$、$\mathrm{t^2(J_1,J_2)}$、$\mathrm{t^3(J_1,J_2,J_3,\cdots)}$和 $\mathrm{r^1(J)}$、$\mathrm{r^2(J_1,J_2)}$、$\mathrm{r^3(J_1,J_2,J_3,\cdots)}$，其上角标表示存在相应数目的可能运动。为了表达简便，可将上角标略去，而以其所关联的运动副数目表示其可能的运动数目，即：t(J)表示 1 个可能移动，$\mathrm{t(J_1,J_2)}$表示 2 个由 $\mathrm{J_1}$、$\mathrm{J_2}$决定的可能移动，$\mathrm{t(J_1,J_2,J_3)}$表示可能的 3 个移动。因此，根据并运算规则有

$$\begin{cases}\mathrm{t(J}_i\mathrm{)+t(J}_j\mathrm{)}=\begin{cases}\mathrm{t(J}_i\mathrm{)} & (\mathrm{t(J}_i\mathrm{)}/\!/\mathrm{t(J}_j\mathrm{)})\\\mathrm{t(J}_i\mathrm{,J}_j\mathrm{)} & (\text{其他})\end{cases}\\\mathrm{t(J}_i\mathrm{)+t(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)}=\begin{cases}\mathrm{t(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)} & (\mathrm{t(J}_i\mathrm{)}/\!/\mathrm{t(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)})\\\mathrm{t(J}_i\mathrm{,J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)} & (\text{其他})\end{cases}\\\mathrm{t(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)+t(J}_l\mathrm{,J}_m\mathrm{)}=\\\quad\begin{cases}\mathrm{t(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)} & (\mathrm{t(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)}/\!/\mathrm{t(J}_l\mathrm{,J}_m\mathrm{)})\\\mathrm{t(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{,J}_l\mathrm{)} & (\text{其他})\end{cases}\\\mathrm{t(J}_i\mathrm{,}\cdots\mathrm{)+t(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{,J}_l\mathrm{)=t(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{,J}_l\mathrm{)}\end{cases}\tag{11}$$

式中的 $\mathrm{t(J}_i\mathrm{)}/\!/\mathrm{t(J}_j\mathrm{)}$表示移动方向平行(与 $\mathrm{J}_i/\!/\mathrm{J}_j$有所不同)，如 t(R)∥t(P)是指 R 副所对应的伴随移动与 P 副移动方向平行；$\mathrm{t(J}_i\mathrm{)}/\!/\mathrm{t(J}_j\mathrm{,\ J}_k\mathrm{)}$表示 $\mathrm{t(J}_i\mathrm{)}$与由 $\mathrm{t(J}_i\mathrm{)}$、$\mathrm{t(J}_k\mathrm{)}$运动所张成的平面平行，等价于 $\mathrm{t(J}_i\mathrm{)}/\!/\square\mathrm{(t(J}_j\mathrm{),\ t(J}_k\mathrm{))}$。同理，对于旋转特征 r(J)的并运算规则有

$$\begin{cases}\mathrm{r(J}_i\mathrm{)+r(J}_j\mathrm{)}=\begin{cases}\mathrm{r(J}_i\mathrm{)} & (\mathrm{J}_i/\!/\mathrm{J}_j)\\\mathrm{r(J}_i\mathrm{,J}_j\mathrm{)} & (\text{其他})\end{cases}\\\mathrm{r(J}_i\mathrm{)+r(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)}=\begin{cases}\mathrm{r(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)} & (\mathrm{J}_i/\!/\mathrm{Y(J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{))}\\\mathrm{r(J}_i\mathrm{,J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)} & (\text{其他})\end{cases}\\\mathrm{r(J}_i\mathrm{,J}_j\mathrm{)+r(J}_k\mathrm{,J}_l\mathrm{)}=\\\quad\begin{cases}\mathrm{r(J}_i\mathrm{,J}_j\mathrm{)} & (\mathrm{Y(J}_i\mathrm{,J}_j\mathrm{)}/\!/\mathrm{Y(J}_k\mathrm{,J}_l\mathrm{))}\\\mathrm{r(J}_i\mathrm{,J}_j\mathrm{,J}_k\mathrm{)} & (\text{其他})\end{cases}\\\mathrm{r(J}_i\mathrm{,}\cdots\mathrm{)+r(J}_k\mathrm{,J}_l\mathrm{,J}_m\mathrm{)=r(J}_k\mathrm{,J}_l\mathrm{,J}_m\mathrm{)}\end{cases}\tag{12}$$

由此可见，旋转运动与平移运动的并运算方式完全类似，区别仅仅在于运动平面的表示方法：旋转运动采用运动副轴线张成平面，而平移运动则是由可能移动方向张成平面。同理，POC 集之间的交运算可作类似推导，给定两个运动副 POC 集：$\mathrm{POC(J}_j\mathrm{)}$、$\mathrm{POC(J}_k\mathrm{)}$，则 $\mathrm{POC(J}_j\mathrm{)}$与 $\mathrm{POC(J}_k\mathrm{)}$的交运算可表示为

$$\mathrm{POC}(\mathrm{J}_j)\mathrm{POC}(\mathrm{J}_k)=\begin{pmatrix}\mathrm{t}(\mathrm{J}_j)\mathrm{t}(\mathrm{J}_k)\\ \mathrm{r}(\mathrm{J}_j)\mathrm{r}(\mathrm{J}_k)\end{pmatrix} \tag{13}$$

与 POC 集的并运算规则类似,根据交运算规则可得到平移运动的积运算 $\mathrm{t}(\mathrm{J}_i)^*\mathrm{t}(\mathrm{J}_j)$ 和旋转运动的积运算 $\mathrm{r}(\mathrm{J}_i)^*\mathrm{r}(\mathrm{J}_j)$,由于篇幅有限,不再赘述。式(9)~(13)中的移动特征 t(J)之间的和或积分别满足移动特征的并运算规则和交运算规则,转动特征 r(J)也是如此。上述关于 POC 集的推导过程融入了运动副方位关系类型,可以参考式(6)进行。

### 4.2 实例分析

以 3-RRC 机构为例说明 POC 集符号推导过程:机构简图如图 6 所示(O′为上平台上任意一点),按照式(1)~(3)给出拓扑结构多项式,并结合式(4)给出的运动副方位关系类型,由式(7)~(13)推导 POC 集,主要步骤如下:并联机构拓扑结构多项式描述(见表 3);并联机构运动副方位关系类型(见表 3);并联机构 POC 集推导。

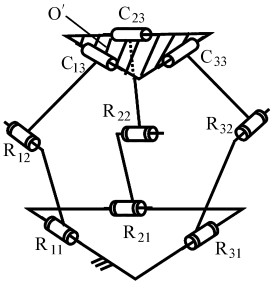



图 6 3-RRC 并联机构

Fig. 6 3-RRC parallel mechanism

**表 3 并联机构 3-RRC 符号描述及 POC 集推导结果**

**Tab. 3 Symbolic description and POC derivation results of PM 3-RRC**

| 机构符号描述 | O′点的 POC 集符号推导结果 |
|---|---|
| $\mathrm{L}_1=\mathrm{R}_{11}\mathrm{R}_{12}\mathrm{R}_{13}$ | $\mathrm{POC}(\mathrm{L}_1)=[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12},\mathrm{C}_{13}),0]$ |
| $\mathrm{L}_2=\mathrm{R}_{21}\mathrm{R}_{22}\mathrm{R}_{23}$ | $\mathrm{POC}(\mathrm{L}_2)=[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{21},\mathrm{R}_{22},\mathrm{C}_{23}),0]$ |
| $\mathrm{L}_3=\mathrm{R}_{31}\mathrm{R}_{32}\mathrm{R}_{33}$ | $\mathrm{POC}(\mathrm{L}_3)=[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{31},\mathrm{R}_{32},\mathrm{C}_{33}),0]$ |
| $\mathrm{PM}=\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3$ | $\mathrm{POC}(\mathrm{PM})=[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12},\mathrm{C}_{13}),0]$ |
| $\mathrm{O}_1=\mathrm{R}_{11}/\!/\mathrm{R}_{12}/\!/\mathrm{C}_{13}$ | |
| $\mathrm{O}_2=\mathrm{R}_{21}/\!/\mathrm{R}_{22}/\!/\mathrm{C}_{23}$ | |
| $\mathrm{O}_3=\mathrm{R}_{31}/\!/\mathrm{R}_{32}/\!/\mathrm{C}_{33}$ | |

由于 3-RRC 为对称并联机构,故只需给出第 1 条支路的 POC 集,其余支路的 POC 集可以类推得到。为了便于书写,下面将 POC(J)变成行向量形式,即:$\mathrm{POC}(\mathrm{J})=[\mathrm{t}(\mathrm{J}),\mathrm{r}(\mathrm{J})]$。对于支路 $\mathrm{L}_1$ 有

$$\mathrm{POC}(\mathrm{L}_1)=\mathrm{POC}(\mathrm{R}_{11}\mathrm{R}_{12}\mathrm{C}_{13})=$$
$$\mathrm{POC}(\mathrm{R}_{11})+\mathrm{POC}(\mathrm{R}_{12})+\mathrm{POC}(\mathrm{C}_{13})=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{11})]+[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{12}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{12})]+$$
$$[\mathrm{t}(\perp\mathrm{C}_{13})+\mathrm{t}(/\!/\mathrm{C}_{13}),\mathrm{r}(\mathrm{C}_{13})]=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11})+\mathrm{t}(\mathrm{R}_{12})+\mathrm{t}(\perp\mathrm{C}_{13})+$$
$$\mathrm{t}(/\!/\mathrm{C}_{13}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{11})+\mathrm{r}(\mathrm{R}_{12})+\mathrm{r}(\mathrm{C}_{13})]=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12})+\mathrm{t}(\perp\mathrm{C}_{13})+$$
$$\mathrm{t}(/\!/\mathrm{C}_{13}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{11})+\mathrm{r}(\mathrm{C}_{13})]=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12})+\mathrm{t}(/\!/\mathrm{C}_{13}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{11})]=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12},\mathrm{C}_{13}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{11})]$$

推导过程简要分析:根据第 2 步给出的方位关系组 $\mathrm{O}_1=\mathrm{R}_{11}/\!/\mathrm{R}_{12}/\!/\mathrm{C}_{13}$,则有 $\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12})/\!/\mathrm{t}(\perp\mathrm{C}_{13})$,由式(11)第 2 式可得 $\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12})+\mathrm{t}(\perp\mathrm{C}_{13})=\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12})$。又由于 $\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12})!/\!/\mathrm{t}(/\!/\mathrm{C}_{13})$,则得到 $\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12})+\mathrm{t}(/\!/\mathrm{C}_{13})=\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12},\mathrm{C}_{13})$。对于旋转运动,根据方位关系组 $\mathrm{O}_1$ 及式(12)第 1 式即有:$\mathrm{r}(\mathrm{R}_{11})+\mathrm{r}(\mathrm{R}_{12})+\mathrm{r}(\mathrm{C}_{13})=\mathrm{r}(\mathrm{R}_{11})$。同理,支路 $\mathrm{L}_2$、$\mathrm{L}_3$ 的 POC 集为

$$\mathrm{POC}(\mathrm{L}_2)=\mathrm{POC}(\mathrm{R}_{21}\mathrm{R}_{22}\mathrm{C}_{23})=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{21},\mathrm{R}_{22},\mathrm{C}_{23}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{21})]$$
$$\mathrm{POC}(\mathrm{L}_3)=\mathrm{POC}(\mathrm{R}_{31}\mathrm{R}_{32}\mathrm{C}_{33})=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{31},\mathrm{R}_{32},\mathrm{C}_{33}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{31})]$$

按照式(13)所给出的 POC 集乘法原理,该并联机构的 POC 集为

$$\mathrm{POC}(\mathrm{PM})=\mathrm{POC}(3-\mathrm{RRC})=$$
$$\mathrm{POC}(\mathrm{L}_1)*\mathrm{POC}(\mathrm{L}_2)*\mathrm{POC}(\mathrm{L}_3)=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12},\mathrm{C}_{13}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{11})]*$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{21},\mathrm{R}_{22},\mathrm{C}_{23}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{21})]*$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{31},\mathrm{R}_{32},\mathrm{C}_{33}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{31})]=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12},\mathrm{C}_{13})*\mathrm{t}(\mathrm{R}_{21},\mathrm{R}_{22},\mathrm{C}_{23})*$$
$$\mathrm{t}(\mathrm{R}_{31},\mathrm{R}_{32},\mathrm{C}_{33}),\mathrm{r}(\mathrm{R}_{11})*\mathrm{r}(\mathrm{R}_{21})*\mathrm{r}(\mathrm{R}_{31})]=$$
$$[\mathrm{t}(\mathrm{R}_{11},\mathrm{R}_{12},\mathrm{C}_{13}),0]$$

根据 POC(PM)的推导结果可知,该并联机构存在 3 个平移零个转动,与事实相符。需要注意的是,虽然在形式上该并联机构的 POC(PM)与其第 1 条支路的 $\mathrm{POC}(\mathrm{L}_1)$ 相同,但 POC 集本身仅仅表示可能存在的运动方向和数目,而不能与实际的运动空间等价。

## 5 结束语

采用常用符号描述了并联机构拓扑结构、尺度约束类型以及平台构型。其中并联机构的拓扑结构被表示为符号多项式,该多项式的每一项代表一条支路,可以是 SOC 或 HSOC;尺度约束类型表示为运动副轴线的方位关系组,对于并联机构所有相邻和不相邻运动副之间的方位关系进行了完整描述;基础平台和动平台构型得到较为详细的表示,体现了平台的几何外形以及与各支路的链接关系。对比实例表明,本文提出的并联机构符号描述系统具有直观、简便、要素完备等优点。基于所给出的并联机构符号描述系统,针对 POC 集的符号描述和推导方法进行了简要分析,实例证实了其合理性和可行性。

## 参 考 文 献


1 Li Shujun. Computer-aided structure synthesis of spatial kinematic chains[J]. Mechanism and Machine Theory, 1990, 25(6): 645 – 653.

2 黄昔光. 机构运动学若干问题及其代数法理论研究[D]. 北京:北京邮电大学,2008.
Huang Xiguang. A study on some issues for kinematics of mechanism and their algebraic methods[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2008. (in Chinese)

3 范守文,徐礼钜,周肇飞,等. 基于数字-符号法的空间 4 自由度并联机构位置正解[J]. 机械工程学报,2002,38(9):57 – 60.
Fan Shouwen, Xu Liju, Zhou Zhaofei, et al. Numeric-symbolic approach for direct displacement solution of a 4-DOF spatial parallel mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2002,38(9):57 – 60. (in Chinese)

4 陈超. 基于序单开链法的并联机器人结构分析程序化研究[D]. 南昌:南昌大学, 2011.

5 方跃法, 房海蓉. 并联机器人支链结构的解析识别[J]. 机械设计与研究, 2004, 20(增刊 1):231 – 234.
Fang Yuefa, Fang Hairong. Analytical identification of limb structures of parallel manipulators[J]. Machine Design and Research, 2004, 20(Supp. 1):231 – 234. (in Chinese)

6 朱煜,汪劲松,张华,等. 并联机构拓扑结构的字符串描述及其应用[J]. 中国机械工程, 2003, 14(12) : 991 – 995.
Zhu Yu, Wang Jinsong, Zhang Hua, et al. Description of topological structure of parallel mechanisms and its application [J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(12): 991 – 995. (in Chinese)

7 丁华锋,黄真,邹婷. 并联机构的结构描述[J]. 燕山大学学报,2007, 31(1):1 – 5.
Ding Huafeng, Huang Zhen, Zou Ting. Structure description of parallel mechanism[J]. Journal of Yanshan University,2007, 31(1):1 – 5. (in Chinese)

8 丁华锋,黄真,刘力改,等. 运动链拓扑图绘制及特征描述获取的计算机实现[J]. 燕山大学学报, 2006, 30(1):10 – 13.
Ding Huafeng, Huang Zhen, Liu Ligai, et al. Computerized sketching of topological graphs of kinematic chains and obtaining of characteristic representations[J]. Journal of Yanshan University, 2006, 30(1):10 – 13. (in Chinese)

9 Chu Jinkui, Cao Weiqing. Identification of isomorphism among kinematic chains and inversions using link's adjacent-chain-table [J]. Mechanism and Machine Theory, 1994, 29(1): 53 – 58.

10 李树军, 王德伦, 戴建生. 含环路布局和运动副轴线方位特征的运动链拓扑结构描述[J]. 机械工程学报, 2009, 45(6): 34 – 40.
Li Shujun, Wang Delun, Dai Jiansheng. Topology of kinematic chains with loops and orientation of joint axes[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(6): 34 – 40. (in Chinese)

11 李树军, 戴建生. 基于 Assur 杆组元素的平面机构的拓扑描述[J]. 机械工程学报, 2011, 47(19): 8 – 13.
Li Shujun, Dai Jiansheng. Topological representation of planar mechanisms based on Assur group elements [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(19): 8 – 13. (in Chinese)

12 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构结构综合方法的基本思想、特点及其发展趋势[J]. 机械工程学报, 2010, 46(9): 1 – 8.
Yang Tingli, Liu Anxin, Luo Yufeng, et al. Basic principles, main characteristics and development tendency of methods for robot mechanism structure synthesis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(9): 1 – 8. (in Chinese)

13 张彦斌,吴鑫. 完全解耦二移动二转动并联机构结构综合[J]. 农业机械学报, 2013, 44(8): 250 – 256.
Zhang Yanbin, Wu Xin. Structural synthesis of fully-decoupled two-translational and two-rotational parallel mechanisms[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013,44(8):250 – 256. (in Chinese)

14 曾惠芬. 解耦并联机器人机构设计[D]. 南昌:南昌大学, 2009.

15 Yang Tingli, Liu Anxin, Jin Qiong, et al. Position and orientation characteristic equation for topological design of robot mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design,2009,131(2):021001 – 1 – 17.

16 房立丰,刘安心,杨廷力,等. 一平移二转动并联稳定平台拓扑结构设计[J]. 农业机械学报, 2012, 43(2): 205 – 210.
Fang Lifeng, Liu Anxin, Yang Tingli, et al. Topology structure design of 1T-2R parallel stable platform [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(2): 205 – 210. (in Chinese)