doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2014.12.050

空间 3-PUS-UP 并联机构运动灵巧性与刚度性能研究*

崔国华[1]　张海强[2]　徐　丰[2]　孙传荣[2]

(1. 河北工程大学装备制造学院，邯郸 056038；2. 河北工程大学机电工程学院，邯郸 056038)

摘要：以含中间支链的 3 自由度 3-PUS-UP 并联机构为研究对象，充分考虑驱动支链、串联约束支链及末端平台伴随运动的影响，利用封闭矢量法求解位置逆解，建立并联驱动部分的雅可比矩阵；采用 D－H 法建立中间 UP 串联约束支链的雅可比矩阵。结合驱动方程和约束方程的关系，构建了 3-PUS-UP 并联机构完整的雅可比矩阵，建立该机构的运动学模型，通过仿真验证了雅可比矩阵的正确性；引入运动灵巧性和机构刚度性能指标，并绘制运动灵巧性和机构刚度在工作空间中的分布图谱，研究机构的运动灵巧性和机构刚度在整个工作空间的分布情况，建立了该机构基于运动学灵巧性的最优工作区域。研究表明，该 3-PUS-UP 并联机构具有良好的运动灵巧性与刚度性能。

关键词：并联机构　雅可比矩阵　D－H 法　运动灵巧性　刚度

中图分类号：TH112　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2014)12-0348-07

引言

运动学性能评价及优化是并联机器人结构设计、驱动器选型与机构控制的基础。运动灵巧性、刚度等运动学性能是机构的重要评价指标。近年来，空间 3 自由度并联机构愈来愈受到学者及工业界的关注[1-9]。

本文以 3-PUS-UP 并联机构为研究对象，对其进行运动学分析，建立机构的数学模型，通过位置逆解求解并联部分的雅可比矩阵；中间支链采用 D－H 法求解串联部分的雅可比矩阵，充分考虑并联部分和串联部分对机构运动的影响，建立该机构完整的雅可比矩阵，通过仿真分析验证雅可比矩阵求解的可行性。并在雅可比矩阵的基础上，进一步建立运动灵巧性和机构刚度性能指标，提出运动灵巧性的最优工作区域。结合具体算例，绘制 3-PUS-UP 并联机构性能指标在工作空间的分布图谱。

1　3-PUS-UP 并联机构的结构描述

如图 1 所示，该并联机构由定平台、动平台以及连接定、动平台的分支构成。定平台通过 3 个结构完全相同的驱动支链 PUS 以及中间恰约束从动支链 UP 与动平台连接。P、U、S 分别表示移动副、虎克铰和球副。动平台球铰铰点 A_1、A_2、A_3 的外接圆半径为 r_a，定平台 $B_1B_2B_3$ 为等边三角形，外接圆半径为 r_b，中间平台与下平台之间滑轨的倾斜角为 α，滑块在滑轨 B_iD_i($i=1,2,3$) 上运动，其中心所在点为 C_1、C_2、C_3。滑块与定长杆以虎克铰联接，其第一轴线与滑轨垂直，第二轴线与第一轴线垂直。滑块移动的距离为 s_i，方向向量为 $\boldsymbol{s}_{io}$，定长杆的长度为 l_i，方向向量为 $\boldsymbol{l}_{io}$，B_iA_i 的方向向量为 $\boldsymbol{L}_i$($i=1,2,3$)。3 条 PUS 支链为无约束主动支链，由于中间 UP 支链的约束，使得机构可实现 3 个可控位置自由度，而姿态是位置的函数，即可实现绕虎克铰正交轴线的转动和沿动平台参考点与虎克铰转动中心连线的移动，而限制虎克铰轴平面法线为轴线的转动[3]。

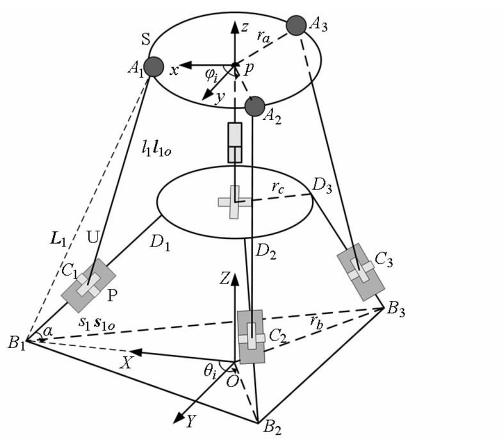


图 1　3-PUS-UP 并联机构结构简图

Fig. 1　Schematic diagram of 3-PUS-UP parallel manipulator

建立固接于定平台的参考坐标系 $OXYZ$，其坐标原点 O 为正三角形 $B_1B_2B_3$ 的外接圆圆心，X 轴平行于 OB_1，Z 轴垂直于固定平台方向向上，Y 轴方向

收稿日期：2014－05－19　修回日期：2014－07－22

*国家自然科学基金资助项目(51175143)

作者简介：崔国华，教授，博士，主要从事并联构型装备及机器人技术研究，E-mail：ghcui@hebeu.edu.cn

按右手定则确定。建立与动平台固接的动坐标系 $pxyz$，坐标原点 p 为动平台的几何中心，x 轴平行于 pA_1，z 轴垂直于动平台方向向上，y 轴方向由右手定则确定。

2　3-PUS-UP 并联机构运动学模型

2.1　机构位置逆解的求解

位置逆解分析涉及已知动平台的位姿，求解各个驱动副的位移。如图 1 所示，把动平台、定平台上的铰链点坐标在参考坐标系及动坐标系中表示，根据支链的杆长约束来建立约束方程。

铰点 A_i 在动坐标系 $pxyz$ 中的位置矢量为 ${}^p\boldsymbol{a}_i = r_a[\cos\varphi_i \quad \sin\varphi_i \quad 0]^{\mathrm{T}}(i=1,2,3)$。其中

$$\begin{cases} {}^p\boldsymbol{a}_1 = r_a[1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \\ {}^p\boldsymbol{a}_2 = r_a[\cos(2\pi/3) \quad \sin(2\pi/3) \quad 0]^{\mathrm{T}} \\ {}^p\boldsymbol{a}_3 = r_a[\cos(4\pi/3) \quad \sin(4\pi/3) \quad 0]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{1}$$

B_i 在参考坐标系 $OXYZ$ 中的位置坐标表示为 ${}^O\boldsymbol{b}_i = r_b[\cos\theta_i \quad \sin\theta_i \quad 0]^{\mathrm{T}}(i=1,2,3)$。其中

$$\begin{cases} {}^O\boldsymbol{b}_1 = r_b[1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \\ {}^O\boldsymbol{b}_2 = r_b[\cos(2\pi/3) \quad \sin(2\pi/3) \quad 0]^{\mathrm{T}} \\ {}^O\boldsymbol{b}_3 = r_b[\cos(4\pi/3) \quad \sin(4\pi/3) \quad 0]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{2}$$

动平台参考点在参考坐标系中的位置矢量为

$$\boldsymbol{p} = [x \quad y \quad z]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

设定动坐标系相对于参考坐标系的旋转矩阵为 $\boldsymbol{R}$，令

$${}^O\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{R}\,{}^p\boldsymbol{a}_i \tag{4}$$

为了便于表示，令 ${}^O\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_i$，${}^O\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}_i$，利用封闭矢量法，建立矢量方程

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{p} - \boldsymbol{b}_i \tag{5}$$

同时，$\boldsymbol{L}_i$ 还可以表示为

$$\boldsymbol{L}_i = l_i\boldsymbol{l}_{io} + s_i\boldsymbol{s}_{io} \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{s}_{io} = [-\cos\theta_i\cos\alpha \quad -\sin\theta_i\cos\alpha \quad \sin\alpha]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

式(6)两边平方，整理可得

$$s_i^2 - 2\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{io}s_i + \boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_i - l^2 = 0 \tag{8}$$

通过求解关于 s_i 的方程(8)，可得

$$s_i = \boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{io} \pm \sqrt{(\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{io})^2 - \boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_i + l^2} \tag{9}$$

若已知动定平台的结构参数 r_a、r_b、倾斜角 α 以及动平台中心的位置(x,y,z)，则可以求出驱动副的位移，即求得机构的位置逆解。

2.2　机构雅可比矩阵的求解

根据该并联机构的结构特点，充分考虑驱动链与约束链的影响，将机构分解为并联驱动链和串联约束链子系统，在求出二者雅可比矩阵基础上，建立该机构雅可比矩阵。

2.2.1　并联驱动部分雅可比矩阵

如图 1 所示，动平台中心的速度 $\boldsymbol{v} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]$，驱动滑块的速度 $\dot{\boldsymbol{s}} = [\dot{s}_1 \quad \dot{s}_2 \quad \dot{s}_3]$，对于该机构并联部分联立式(5)和(6)，对时间求导可得

$$\dot{s}_i\boldsymbol{s}_{io} = \dot{\boldsymbol{v}}_p + \boldsymbol{\omega} \times a_i - l(\boldsymbol{\omega}_i\boldsymbol{l}_{io}) \tag{10}$$

式中　$\boldsymbol{v}_p$——动平台中心的线速度

$\boldsymbol{\omega}$——动平台中心的角速度

式(10)两边同时左乘 $\boldsymbol{l}_{io}^{\mathrm{T}}$，得

$$\boldsymbol{l}_{io}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{io}\dot{s}_i = \boldsymbol{l}_{io}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_p + (\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{l}_{io})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega} \tag{11}$$

取 $i=1,2,3$，可以得到 3 个驱动支链的矢量方程，写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{J}_t\dot{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{J}_x\boldsymbol{v} \tag{12}$$

其中
$$\boldsymbol{J}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_{1o}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{1o} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{l}_{2o}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{2o} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{l}_{3o}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{3o} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_x = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_{1o}^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{l}_{1o})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{l}_{2o}^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{l}_{2o})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{l}_{3o}^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{l}_{3o})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

则并联部分的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_p$[10] 表示为

$$\boldsymbol{J}_p = \boldsymbol{J}_t^{-1}\boldsymbol{J}_x \tag{14}$$

$\boldsymbol{J}_p \in \mathbf{R}^{3\times6}$ 是动平台六维速度与关节驱动速度矢量之间的雅可比矩阵，是该机构并联部分的速度传递矩阵。

2.2.2　串联 UP 约束支链的雅可比矩阵

中间恰约束从动支链为一串联机构，等效成 R-R-P[11]，运动结构简图如图 2 所示，中间恰约束从动支链的 D－H 参数见表 1。

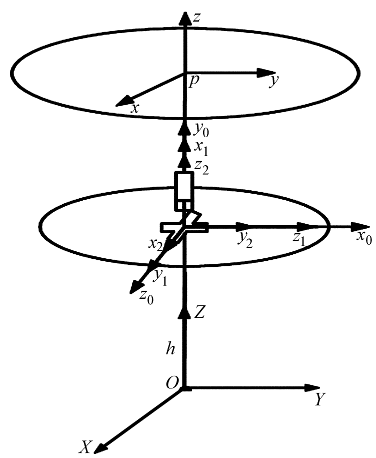


图 2　中间 UP 支链结构简图

Fig. 2　Schematic diagram of UP limb

其中，变量：θ_1、θ_2、d_3；常量：$h(h = \tan\alpha(r_b - r_c))$。$\theta_1$ 和 θ_2 为中间虎克铰的转角，d_3 为中间支链

沿杆方向的位移,h 为中间平台到定平台的距离。

表1 中间恰约束从动支链的 D-H 参数

Tab.1 D-H parameters of constraint passive limb

i	$\theta_i/(°)$	d_i	a_i	$\alpha_i/(°)$
0	90	h	0	90
1	θ_1	0	0	90
2	θ_2	0	0	0
3	0	d_3	0	0

根据表1,采用 D-H 法可得到从固定坐标系到动坐标系的齐次变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_0(h)\boldsymbol{T}_1(\theta_1)\boldsymbol{T}_2(\theta_2)\boldsymbol{T}_3(d_3)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{p}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\sin\theta_2 & 0 & -\cos\theta_2\\ \cos\theta_1\cos\theta_2 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1\sin\theta_2\\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & -\cos\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}-d_3\cos\theta_2\\ d_3\cos\theta_1\sin\theta_2\\ d_3\sin\theta_1\sin\theta_2+h\end{bmatrix} \tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{R}$——旋转矩阵 $\boldsymbol{p}$——位置矢量

联立式(3)和(17),可以得到

$$\begin{cases}d_3=\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}\\ \theta_2=a\cos\left(-\dfrac{x}{d_3}\right)\\ \theta_1=a\tan2\left(\dfrac{z-h}{d_3\sin\theta_2},\dfrac{y}{d_3\sin\theta_2}\right)\end{cases} \tag{18}$$

从固定坐标系到从动支链第 $i+1$ 个坐标系的旋转矩阵为 $\boldsymbol{Q}_i(i=0,1,2,3)$,则

$$\boldsymbol{Q}_i=\begin{bmatrix}\cos\theta_i & 0 & \sin\theta_i\\ \sin\theta_i & 0 & -\cos\theta_i\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{19}$$

于是,旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 可以表示成中间从动支链关于3个关节变量的函数[11],即

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_3 \tag{20}$$

$\boldsymbol{e}_{4i}$为旋转矩阵 $\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_{i-1}$ 的第3列,也就是 z_{i-1}轴上的单位向量,即

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{41}=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{e}_{40}\\ \boldsymbol{e}_{42}=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{e}_{40}\\ \boldsymbol{e}_{43}=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{e}_{40}\\ \boldsymbol{e}_{40}=[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{21}$$

式中 $\boldsymbol{e}_{40}$——Z 轴上的单位向量

$\boldsymbol{r}_{4i}$表示第 $i-1$ 个坐标系原点到第4个坐标系原点的位置矢量,具体可以表示为

$$\boldsymbol{r}_{41}=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{a}_{41}+\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{a}_{42}+\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{a}_{43}$$
$$\boldsymbol{r}_{42}=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{a}_{42}+\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{a}_{43}$$
$$\boldsymbol{r}_{43}=\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{a}_{43}$$

其中 $\boldsymbol{a}_{4i}=[0\quad 0\quad d_i]^{\mathrm{T}}$

式中 d_i——沿 z_{i-1} 轴移动的距离

对于中间串联部分,速度映射模型为

$$\boldsymbol{J}_s\dot{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{v} \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}_p\quad \boldsymbol{\omega}]^{\mathrm{T}}$ $\dot{\boldsymbol{\theta}}=[\dot{\theta}_1\quad \dot{\theta}_2\quad \dot{d}_3]^{\mathrm{T}}$

则串联部分的雅可比矩阵[12-13]为

$$\boldsymbol{J}_s=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{41}\times\boldsymbol{r}_{41} & \boldsymbol{e}_{42}\times\boldsymbol{r}_{42} & \boldsymbol{e}_{43}\\ \boldsymbol{e}_{41} & \boldsymbol{e}_{42} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix} \tag{23}$$

式中 $\boldsymbol{O}$——零矩阵

即

$$\boldsymbol{J}_s=\begin{bmatrix}0 & d_3\sin\theta_2 & -\cos\theta_2\\ -d_3\sin\theta_1\sin\theta_2 & d_3\cos\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2\\ d_3\cos\theta_1\sin\theta_2 & d_3\sin\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \sin\theta_1 & 0\\ 0 & -\cos\theta_1 & 0\end{bmatrix} \tag{24}$$

$\boldsymbol{J}_s\in\mathbf{R}^{6\times3}$是串联部分的雅可比矩阵,表示从关节空间向操作空间运动的速度传递的广义传动比。

2.2.3 3-PUS-UP 机构雅可比矩阵的建立

驱动方程和约束方程建立的运动学模型可以反映并联机器人机构的整体运动特性,由于机构在运动过程中,动平台有沿 X 轴、Y 轴移动的伴随运动[14],为了避免少自由度并联机构雅可比矩阵元素的量纲不一致问题,而导致并联机构的输入运动与输出运动之间的映射关系失真。本文可利用驱动和约束方程之间的关系,将矩阵元素做归一化处理。

由于姿态是位置的函数,可以用关于位置 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 的函数表示 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$。

取 $\boldsymbol{J}_s$ 矩阵的前3行作为新的矩阵 $\boldsymbol{J}_s'$,可以得到

$$\boldsymbol{J}_s'[\dot{\theta}_1\quad \dot{\theta}_2\quad \dot{d}_3]^{\mathrm{T}}=[\dot{x}\quad \dot{y}\quad \dot{z}]^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

式(25)两边同时乘以 $\boldsymbol{J}_s'^{-1}$,整理可得 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 与 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 的关系式

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}_{2\times1}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\sin\theta_1}{d_3\sin\theta_2} & \dfrac{\cos\theta_1}{d_3\sin\theta_2}\\ \dfrac{\sin\theta_2}{d_3} & \dfrac{\cos\theta_2}{d_3\cos\theta_1} & \dfrac{\cos\theta_2}{d_3\sin\theta_1}\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}_{3\times1} \tag{26}$$

根据式(22)和(24),还可以得出关于 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 与 ω_x、ω_y、ω_z 的关系式

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\sin\theta_1\\0&-\cos\theta_1\end{bmatrix}_{3\times2}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\\dot\theta_2\end{bmatrix}_{2\times1}\tag{27}$$

联立式(26)和(27)，整理可得

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{J}_c\boldsymbol{v}_p\tag{28}$$

线速度 $\boldsymbol{v}_p$ 可以写成

$$\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}_p\tag{29}$$

式中　$\boldsymbol{I}$——单位对角矩阵

于是，恰约束从动支链的速度映射方程可以表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_p\\\boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}_q\begin{bmatrix}\dot x\\\dot y\\\dot z\end{bmatrix}\tag{30}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&-\dfrac{\sin\theta_1}{d_3\sin\theta_2}&\dfrac{\cos\theta_1}{d_3\sin\theta_2}\\\dfrac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{d_3}&\dfrac{\sin\theta_1\cos\theta_1\cos\theta_2}{d_3}&\dfrac{\cos\theta_1\ \sin^2\theta_1}{d_3}\\-\dfrac{\cos\theta_1\sin\theta_2}{d_3}&-\dfrac{\cos^2\theta_1\cos\theta_2}{d_3}&-\dfrac{\sin\theta_1\cos\theta_1\cos\theta_2}{d_3}\end{bmatrix}\tag{31}$$

联立式(14)和(31)，可得并联机构总的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_p\boldsymbol{J}_q\tag{32}$$

式(32)中的 $\boldsymbol{J}\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 是 3-PUS-UP 并联机构秩为 3 的完整雅可比矩阵。

3　并联机构运动性能指标的建立

考虑该机构的工作需求及条件，本文引入运动灵巧性和刚度作为其性能评价指标。

3.1　运动灵巧性

通常把雅可比矩阵条件数的倒数定义为局部条件数(L_{CI})作为运动学巧性的量度

$$L_{\mathrm{CI}}=1/\kappa(\boldsymbol{J})\tag{33}$$

其中　$\kappa(\boldsymbol{J})=\|\boldsymbol{J}\|\ \|\boldsymbol{J}^{-1}\|$

式中　$\kappa(\boldsymbol{J})$——雅可比矩阵条件数

通常 $0\leqslant L_{\mathrm{CI}}\leqslant1$，$L_{\mathrm{CI}}=0$，表明机构处于奇异位置；$L_{\mathrm{CI}}=1$，表明该位形各向同性，此时机构具有最佳的运动传递性能。为了评估机构在整个工作空间的灵巧性，Gosselin[15] 提出了全局灵巧性指标

$$G_{\mathrm{CI}}=\frac{\int_W L_{\mathrm{CI}}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}W}\tag{34}$$

式中　W——可达工作空间

在可达工作空间的基础上，定义工作空间中局部运动灵巧性 $G_{\mathrm{CI}}\leqslant L_{\mathrm{CI}}\leqslant L_{\mathrm{CImax}}$ 的集合为该新型并联机构在可达工作空间内的最优工作区域[16]。

3.2　机构刚度指标

通常采用刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的最大和最小特征值作为评价机构刚度性能的指标[17-18]。

刚度矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}k_i\boldsymbol{J}\tag{35}$$

式中　k_i——驱动副的关节刚度

设定关节刚度 $k_1=k_2=k_3=k=1\ 000$ N/mm，则刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$[19] 可表示为

$$\boldsymbol{K}=k\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\tag{36}$$

将刚度问题归结为矩阵的特征值和特征向量的问题，设 $\boldsymbol{K}$ 为 3 阶方阵，如果存在数 λ 和 3 维非零列向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 使关系式

$$\boldsymbol{K\varepsilon}=\lambda\boldsymbol{\varepsilon}\tag{37}$$

成立，数 λ 称为矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的特征值，非零向量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 称为 $\boldsymbol{K}$ 的对应特征值 λ 下的特征向量。

在给定机构的位置可以求出刚度矩阵的特征值 λ_i，$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 是特征值所对应的特征向量，λ_i 的意义表示的是并联机构在 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 方向的刚度。用 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别代表的最大和最小特征值，并联机构在给定位置处的最大和最小刚度就发生在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\max}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\min}$ 方向。

4　并联机构运动学仿真分析与验证

对于图 1 所示的并联机构，设定结构参数 $r_a=0.25$ m，$r_b=0.75$ m，$r_c=0.4$ m，$l=0.75$ m，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$。

设定动平台的运动轨迹为

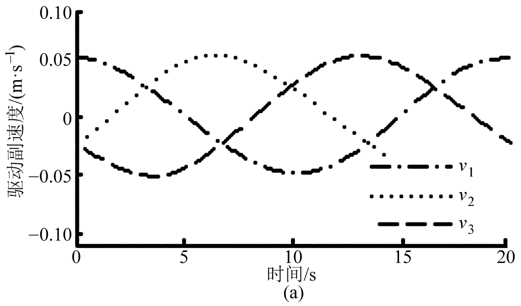
$$\begin{cases}x=-0.15\sin\left(\dfrac{\pi}{10}t\right)\\y=0.15\cos\left(\dfrac{\pi}{10}t\right)\\z=0.75-0.01\cos\left(\dfrac{\pi}{20}t\right)\end{cases}\tag{38}$$

由速度逆解

$$[\dot s_1\quad\dot s_2\quad\dot s_3]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}[\dot x\quad\dot y\quad\dot z]^{\mathrm{T}}\tag{39}$$

按照设定的运动轨迹，通过 Matlab 编程可得 3 个驱动副的速度变化规律曲线，如图 3a 所示。同时，基于多体系统动力学仿真软件 RecurDyn 对本文所论述机构的虚拟样机进行仿真，可以获得机构输入与输出位置参数之间的映射曲线，如图 3b 所示。

图 3b 所得曲线与利用等式(39)编程所得的速度曲线求解结果是一致的。通过虚拟样机仿真验证说明雅可比矩阵的理论求解是正确的，前期的数学



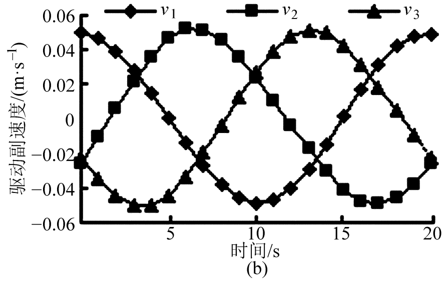


图 3 驱动副速度-时间曲线

Fig. 3 Time history of driving joint velocity

(a) Matlab 编程 (b) Recurdyn 仿真

建模过程是可行的,这为后续性能指标的计算建立了理论基础。

5 应用算例与机构性能分析

对于图 1 所示的并联机构,设定工作空间的搜索范围为 $-0.4\ \mathrm{m} \leqslant x \leqslant 0.4\ \mathrm{m}$, $-0.4\ \mathrm{m} \leqslant y \leqslant 0.4\ \mathrm{m}$, $0.5\ \mathrm{m} \leqslant z \leqslant 1\ \mathrm{m}$;设定驱动副的位移 s_i 的范围为$(0, 0.5\ \mathrm{m})$,虎克铰的最大转角 U_i 为$\frac{\pi}{2}$,球铰的最大转角 S_i 为$\frac{\pi}{3}$。

5.1 运动学灵巧性分析

图 4 表示动平台在不同高度下局部条件数的分布情况。机构在 Z 方向移动越小,机构的局部条件数越接近于 1,说明机构的运动灵巧性越好,运动精度越高。而且局部条件数在(0,1)之间连续变化,没有突变,说明该机构的运动灵巧性较好。

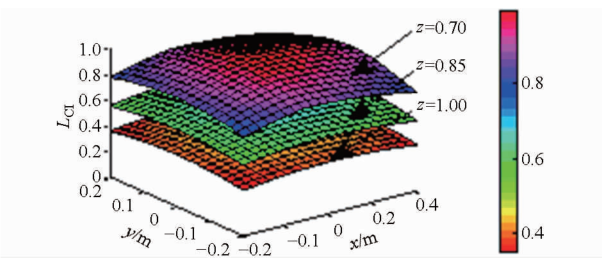


图 4 不同高度下局部条件数的分布图

Fig. 4 Atlas of the local condition index under different height

图 5 为给定三维空间下不考虑约束条件的整个工作空间内局部运动灵巧性的分布规律。

图 6 为考虑约束条件下的可达工作空间内局部运动学灵巧性的分布规律。

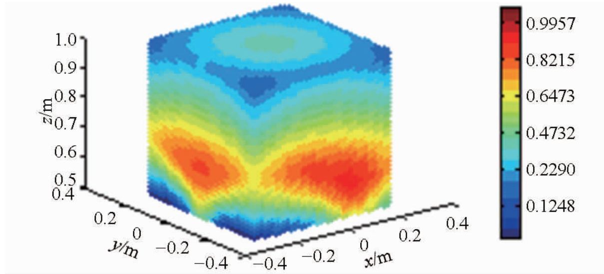


图 5 理想工作空间内的运动灵巧性分布

Fig. 5 Atlas of the kinematic dexterity in ideal workspace

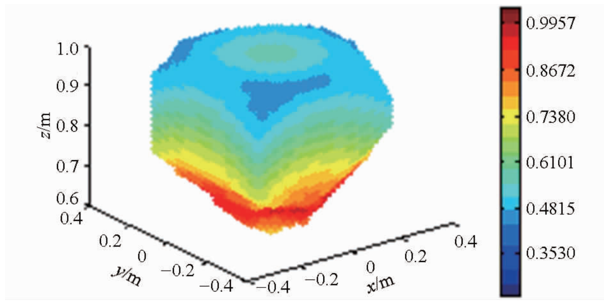


图 6 可达工作空间的运动灵巧性分布

Fig. 6 Atlas of the kinematic dexterity in the reachable workspace

从图 6 中可以看出,机构的运动灵巧性随机构位形的变化而变化,局部运动灵巧性的变化范围为(0.353 0,0.995 7),局部运动灵巧性越大,说明机构的传递性能越好,精度越高。

根据第 4 节给定的机构参数和式(33)、(34),可以得到 $L_{\mathrm{CImax}} = 0.995\,7$, $G_{\mathrm{CI}} = 0.536\,2$,则该机构在可达工作空间内的最优区域为(0.536 2,0.995 7)。图 7 为该并联机构局部运动灵巧性在最优工作区域的分布。对并联机构进行轨迹规划时,应尽量满足机构在最优工作区域内工作,使机构具有较好的运动学性能,从而提高机构的运动精度和控制精度。

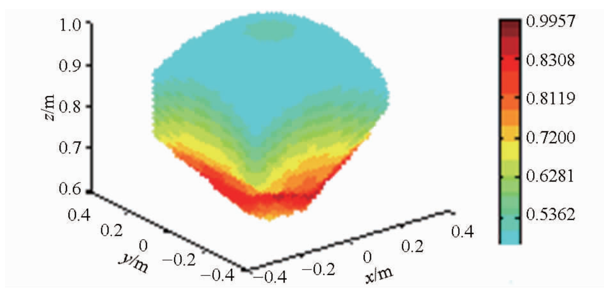


图 7 运动学灵巧性的最优工作区域

Fig. 7 Optimum region of the kinematic dexterity

5.2 机构刚度分析

图 8 和图 9 给出了 $z = 0.95$ m 的工作平面内 3-$\underline{\mathrm{P}}$US-UP 并联机构的最大刚度和最小刚度图谱,图 10 和图 11 给出了机构在工作空间内最大和最小刚度的方向。

图 8 和图 9 反映了刚度的等值线分布情况,由

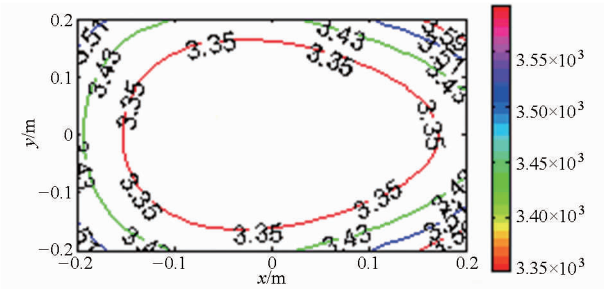


图 8　并联机构的最大刚度映射图谱

Fig. 8　Atlas of the maximum stiffness of parallel manipulator

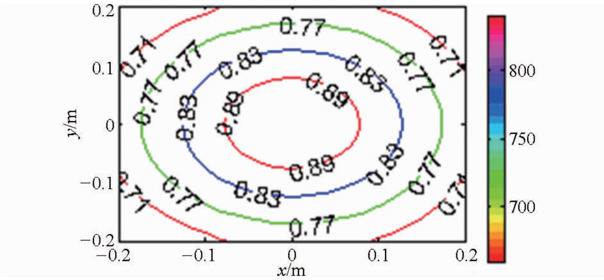


图 9　并联机构的最小刚度映射图谱

Fig. 9　Atlas of the minimum stiffness of parallel manipulator

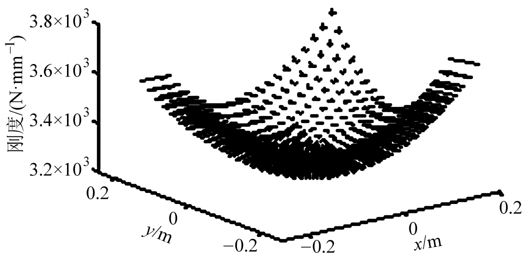


图 10　并联机构的最大刚度方向

Fig. 10　Vector direction of the maximum stiffness of parallel manipulator

于机构具有一定的对称性，其最大和最小刚度的分布也关于 y 轴具有一定的对称性；在工作空间内，最大和最小刚度指标的变化范围分别为（3.35×10^3，3.55×10^3）N/mm 和（7.0×10^2，9.0×10^2）N/mm，刚度分布均匀、变化平稳、无突变，说明机构刚度性能较好；图 10 和图 11 所代表的最大和最小刚度的

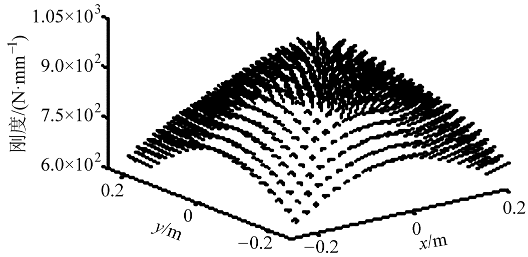


图 11　并联机构的最小刚度方向

Fig. 11　Vector direction of the minimum stiffness of parallel manipulator

方向实际上是最大和最小变形的方向，当终端作用力沿着特征向量的方向时，终端的变形也沿着特征向量的方向，变形值取得最大或最小。变形最大的方向，刚度最低，柔度最高；变形最小的方向，刚度最高，柔度最低[20]。因此，该 3-PUS-UP 并联机构在工作时应尽量使终端载荷的方向沿最小刚度的方向，使机构承载能力最佳。

6　结论

（1）针对空间 3 自由度 3-PUS-UP 并联机构，充分考虑驱动支链、串联约束链及末端平台伴随运动的影响，利用封闭矢量法求解位置逆解建立并联驱动部分的雅可比矩阵；采用 D－H 法建立对中间 UP 串联约束支链的雅可比矩阵。结合驱动方程和约束方程的关系，构建 3-PUS-UP 并联机构完整的雅可比矩阵，建立该机构的运动学模型；并通过仿真验证了雅可比矩阵求解的正确性。

（2）引入运动灵巧性和机构刚度性能指标，并绘制运动灵巧性和机构刚度在工作空间中的分布图谱，研究机构的运动灵巧性和机构刚度在整个工作空间的分布情况，定义并计算机构可达工作空间的运动学灵巧性的最优工作区域。

（3）得到了该机构的运动灵巧性和机构刚度在整个工作空间的分布情况，以及运动灵巧性最优工作区域，结果表明，该机构具有较好的运动灵巧性与刚度性能。

参　考　文　献

1　Li Yangmin, Xu Qingsong. A new approach to the architecture optimization of a general 3-PUU translational parallel manipulator [J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2006, 46(1):59－72.

2　Pond G, Carretero J A. Dexterity measures and their use in quantitative dexterity comparisons[J]. Meccanica, 2011,46(1):51－64.

3　吴振勇，王玉茹，黄田. Tricept 机器人的尺度综合方法研究[J]. 机械工程学报，2003，39(6):22－30.
Wu Zhenyong, Wang Yuru, Huang Tian. Optimal dimensional synthesis of Tricept robot[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2003,39(6):22－30. (in Chinese)

4　Wang Youyu, Liu Haitao, Huang Tian. Stiffness modeling of the Tricept robot using the overall Jacobian matrix[J]. Jouranl of Mechanisms and Robotics,2009,1(2):011002－1－8.

5　崔国华，周海栋，王南，等. 基于 Isight 的 3-UPS-S 并联机器人机构多目标优化[J]. 农业机械学报，2013，44(9)：261－266.
Cui Guohua, Zhou Haidong, Wang Nan, et al. Multi-objective optimization of 3-UPS-S parallel mechanism based on Isight[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2013, 44(9):261－266. (in Chinese)

6 齐明,刘海涛,梅江平,等. 3-PUS/PU 3 自由度并联机构运动学优化设计[J].天津大学学报,2007, 40(6):649 - 654.
Qi Ming, Liu Haitao,Mei Jiangping, et al. Kinematics optimum design of a 3-DOF parallel mechanism with 3-PUS/PU architecture[J]. Journal of Tianjin University,2007,40(6):649 - 654. (in Chinese)
7 Li Jian. Design of 3-DOF parallel manipulators for micro-motion applications[D]. Canada: University of Ontario Institute of Technology, 2009.
8 Chi Zhongzhe, Zhang Dan, Xia Lian, et al. Multi-objective optimization of stiffness and workspace for a parallel kinematic machine[J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design,2013,9(3):281 - 293.
9 路懿. 具有被动分支自由度为3和4并联机器人机构综合与性质研究[J]. 机械工程学报,2010,46(20): 194.
10 Li Yangmin, Xu Qingsong. Kinematic analysis and dynamic control of a 3-PUU parallel manipulator for cardiopulmonary resuscitation[C]// Proceedings of the 12th International Conference on Advanced Robotics, 2005:344 - 351.
11 Sameer Joshi,Lung-Wen Tsai. A comparison study of two 3-DOF parallel manipulators: one with three and the other with four supporting legs[C]// IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2003,19(2):200 - 209.
12 Zhang Dan, Gao Zhen. Hybrid head mechanism of the groundhog-like mine rescue robot[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2010, 27 (2):460 - 470
13 Zhang Dan, Gao Zhen. Forward kinematics, performance analysis, and multi-objective optimization of a bio-inspired parallel manipulator [J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2012, 8(4):484 - 492.
14 姚太克.一类三自由度并联机构的特性研究与优化设计[D].合肥:中国科学技术大学,2013.
15 Gosselin C, Angeles J. A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulator[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1991, 113(3):220 - 226.
16 Wu Jun, Wang Jinsong, Wang Liping, et al. Performance comparison of three planar 3-DOF parallel manipulators with 4-RRR, 3-RRR and 2-RRR structures [J]. Mechatronics,2010,20(4):510 - 517.
17 Cui Guohua, Wei Bin, Wang Nan,et al. Stiffness, workspace analysis and optimization for 3UPU parallel robot mechanism[J]. Indonesian Journal of Electrical Engineering, 2013,11(9):5253 - 5261.
18 Liu Xinjun, Jin Zhenlin, Gao Feng. Optimum design of 3-DOF spherical parallel manipulators with respect to the conditioning and stiffness indices[J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35(9):1257 - 1267.
19 Gao Zhen, Zhang Dan. Performance mapping and motion simulation of a 4UPS + PU redundantly actuated parallel manipulators [C] // Proceedings of ASME 2010 International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering Conference, 2010,2:791 - 800.
20 韩书葵,方跃法,槐创锋. 4自由度并联机器人刚度分析[J]. 机械工程学报, 2006, 42(增刊1):31 - 34.
Han Shukui, Fang Yuefa, Huai Chuangfeng. Stiffness analysis of four degrees parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2006, 42(Supp.1):31 - 34. (in Chinese)

Kinematic Dexterity and Stiffness Performance of Spatial 3-$\underline{P}$US-UP Parallel Manipulator

Cui Guohua[1] Zhang Haiqiang[2] Xu Feng[2] Sun Chuanrong[2]
(1. *School of Equipment and Manufacturing*, *Hebei University of Engineering*, *Handan* 056038, *China*
2. *School of Mechanical and Electrical Engineering*, *Hebei University of Engineering*, *Handan* 056038, *China*)

Abstract: Three degrees of freedom parallel manipulator 3-$\underline{P}$US-UP with a properly constrained passive limb was taken as the research objective. Inverse kinematics solution equations were formulated with closed vector method, and a Jacobian matrix of parallel driving part was obtained considering the influences of driving chains, constraint chain and parasitic motion of moving platform. Further, a Jacobian matrix of UP limb of serial part was acquired by adopting the D - H method. Combining the relation between the driving equations with constraint equations, a complete Jacobian matrix of the 3-$\underline{P}$US-UP parallel manipulator was constructed and verified by simulation analysis on the basis of the previous kinematical model. Simultaneously, kinematic dexterity and stiffness were introduced to evaluate the kinematic performance, and distribution atlas of the kinematic dexterity and stiffness in the workspace were drawn and researched. The optimum regions of the kinematic dexterity in the reachable workspace were defined and calculated. The research results show that this 3-$\underline{P}$US-UP parallel manipulator has good kinematic dexterity and stiffness performance.

Key words: Parallel manipulator Jacobian matrix D - H method Kinematic dexterity Stiffness