doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2014.09.053

基于节点变量法的连续体结构拓扑优化设计*

占金青　杨　康　黄志超

(华东交通大学机电工程学院, 南昌 330013)

摘要: 为避免结构拓扑优化设计中的数值不稳定性及考虑制造因素,提出了一种节点变量的连续体结构拓扑优化设计方法。在指定的子区域内,采用不依赖网格的映射函数表示节点设计变量与节点密度变量的关系,实现最小尺寸约束,以满足加工工艺要求。以应变能力最小化为目标函数满足结构刚度要求,以结构体积作为约束,建立最小尺寸约束下的连续体结构拓扑优化模型,将移动近似算法用于拓扑优化问题求解。数值算例结果表明,提出的方法应用于连续体拓扑优化设计中是有效的,能够消除数值不稳定性现象获得清晰的拓扑结果,结构便于制造加工。

关键词: 连续体结构　拓扑优化　节点变量法　映射函数

中图分类号: TH122; O343.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2014)09-0329-04

引言

拓扑优化设计是在规定的设计域,给定边界条件及载荷作用条件下,寻求结构材料的最佳布局,使其能在满足一定约束条件下,让某种性能指标达到最优。拓扑优化设计方法是目前连续体结构优化设计研究的热点,并且取得迅速发展,成为结构概念设计的一种有效方法。

然而,连续体拓扑优化结果中普遍存在棋盘格和网格依赖性等数值不稳定性现象[1]。棋盘格现象使拓扑结构的可制造性差,网格依赖性导致优化结果的可靠性降低。Diaz[2]采用合理高阶单元或非协调单元可有效消除棋盘格现象,但会导致计算规模增大。Sigmund[3]和李翔[4]提出了过滤技术修改目标函数的灵敏度信息,避免了数值不稳定性现象,但拓扑优化结果会出现中间密度单元。Petersson[5]和孙士平[6]通过对单元密度局部梯度进行约束,消除棋盘格等数值不稳定性问题,但优化结果可能出现一些局部细小结构。Poulsen[7]和左孔天[8]提出一种基于卷积因子前处理及小波分析后处理的综合过滤算法,可消除数值不稳定性现象。周向阳[9]采用SIMP－SSV方法进行结构拓扑优化设计,能够获得清晰拓扑分布。上述研究避免数值不稳定性问题的方法,大多数都是采用添加额外的约束来限制优化问题的可行域,没有从根本上解决数值不稳定性问题。

本文提出了一种基于节点变量法的连续体结构拓扑优化设计方法。在指定的子区域内,采用不依赖网格的映射函数表示节点设计变量与节点密度变量的关系,消除数值不稳定性现象获得清晰的拓扑结果,并且实现最小尺寸约束以满足加工要求。

1　拓扑优化模型的建立

1.1　节点变量法

目前,对于连续体结构拓扑优化问题,通常采用单元密度为设计变量,设计域内的任一点的位移和密度采用Q4/U插值方法,如图1a所示。单元内任一点的密度均匀相等,通过节点的位移进行双线性插值计算得到单元内任一点的位移 u_e

$$\begin{cases} u_e = \sum_{i=1}^{m} N_i u_i \\ \rho_e = \rho \end{cases} \tag{1}$$

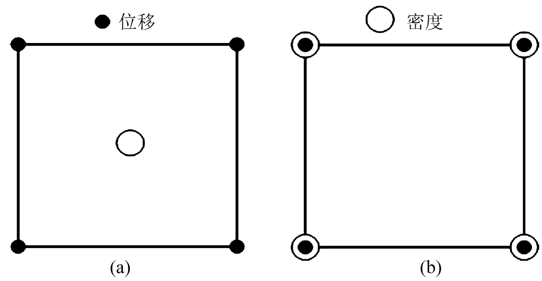

图1　位移场与密度场的插值方法示意图

Fig.1　Interpolation method of displacement field and density field

(a) Q4/U　(b) Q4/Q4

收稿日期: 2014－02－16　修回日期: 2014－03－27

*国家自然科学基金资助项目(51305136)和江西省教育厅科技项目(GJJ13319)

作者简介: 占金青,讲师,博士,主要从事柔顺机构及结构优化设计研究,E-mail: zhanjinqing@gmail.com

式中 u_i——单元节点位移 N_i——单元形函数
m——单元的节点数 ρ——单元密度
ρ_e——单元内任一点密度

这种插值方法只能保证位移场具有 C_0 连续性，然而密度场只具有 C_{-1}连续性，光滑性差，导致拓扑优化结果中出现棋盘格等数值不稳定性[10]现象。

以节点密度为设计变量，单元内的位移和密度采用 Q4/Q4 单元插值方法，如图 1b 所示，单元内部每一点的密度不再是均匀相等，而是任意一点的位移和密度通过单元节点的位移和密度进行双线性插值求得[11-12]

$$\begin{cases} u_e = \sum_{i=1}^{m} N_i u_i \\ \rho_e = \sum_{i=1}^{m} N_i \rho_i \end{cases} \tag{2}$$

式中 ρ_i——单元节点密度

节点密度法保证了位移场与密度场都具有 C_0 连续性，可以避免拓扑优化结果中的数值不稳定性现象[13]；但是这种方法不能实现最小尺寸约束。

节点变量法采用映射函数表示节点设计变量与节点密度变量关系，来满足拓扑优化设计的最小尺寸约束，获得优化结构便于制造加工。映射函数采用类似于文献[14-15]提出的方法，利用最大函数表示

$$\rho_i = \max_{j \in \Omega_i}(d_j) \tag{3}$$

式中 d_j——第 j 节点设计变量
Ω_i——第 i 节点的子区域

第 i 节点的子区域是指：以第 i 节点为圆心，以设定最小半径 $r_{\min}$为半径的区域，如图 2a 所示。子区域内的任一节点与节点 i 的位移满足关系

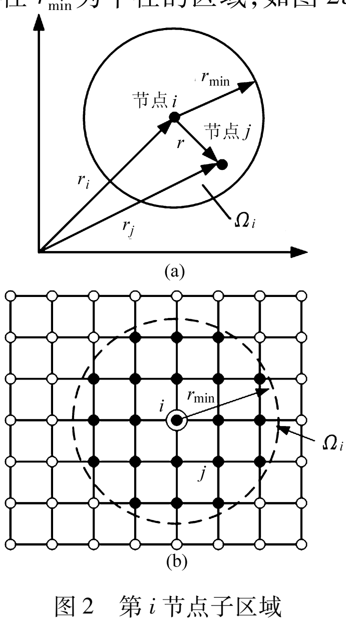

图 2 第 i 节点子区域

Fig. 2 Sub-domain of node

(a) 矢量示意图 (b) 网格示意图

$$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| < \boldsymbol{r}_{\min} \quad (j \in \Omega_i) \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{r}$——i 节点与 j 节点之间的位移
$\boldsymbol{r}_i$——节点与 i 节点相对于参考点的位移
$\boldsymbol{r}_j$——节点与 j 节点相对于参考点的位移

设定最小半径 $\boldsymbol{r}_{\min}$为指定的约束最小尺寸的一半，它决定了最优拓扑结构中的最小尺寸大小。j 表示在子域 Ω_i 任意一个节点，如图 2b 所示。

1.2 拓扑优化模型

以应变能最小化为目标函数来满足连续体结构的刚度最大化，以体积为约束，采用映射函数表示设计变量与单元节点的密度关系来达到最小尺寸约束目的。基于节点变量法的连续体结构拓扑优化模型为：

目标函数

$$\min_{d_1, d_2, \cdots, d_M} S_E = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U} \tag{5}$$

约束条件

$$\begin{cases} \rho_i = \max_{j \in \Omega_i}(d_j) \\ \rho_e = \sum_{i=1}^{m} N_i \rho_i \\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} \\ \left(\sum_{e=1}^{N} V_e \rho_e \right) \Big/ V_0 - f^* \leqslant 0 \\ 0 < d_{\min} \leqslant d_j \leqslant 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, M) \end{cases} \tag{6}$$

式中 S_E——结构的应变能
$\boldsymbol{F}$——结构所受载荷向量
$\boldsymbol{K}$——总刚度矩阵
$\boldsymbol{U}$——单元节点的位移向量
V_e——实体单元的体积
V_0——优化前的结构总体积
f^*——优化后与优化前的结构体积比
$d_{\min}$——设计变量下限
N——网格单元数目
M——网格节点数目

1.3 灵敏度分析

移动渐近法（Method of moving asymptotes，MMA）采用显式的线性凸函数来近似隐式的目标和约束函数，构造移动近似子问题来得到一个原问题的近似解。MMA 法对于各种结构拓扑优化问题都具有很好的鲁棒性[16]。MMA 法是基于梯度的优化方法，目标函数及约束函数的灵敏度分析是必要的。

由式（3）、式（5）和式（6）可得目标函数对设计变量的灵敏度为

$$\frac{\partial S_E}{\partial d_i} = \sum_{j \in S_i} \frac{\partial S_E}{\partial \rho_j} = -\sum_{j \in S_i} \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_j} \boldsymbol{U} \tag{7}$$

式中　S_i——节点变量 d_i 映射到的所有节点集合

结构整体刚度矩阵对节点密度变量的灵敏度为

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_j} = \sum_{e=1}^{N} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{K}_e}{\partial \rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \rho_i} \mathrm{d}\Omega_e = \sum_{e=1}^{N} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{K}_e}{\partial \rho_e} N_i \mathrm{d}\Omega_e = \sum_{e=1}^{N} \int_{\Omega_e} p \rho_e^{p-1} K_e N_i \mathrm{d}\Omega_e \tag{8}$$

式中　$\boldsymbol{K}_e$——单元的刚度矩阵

p——惩罚系数，本文取 3

体积约束对设计变量的灵敏度为

$$\frac{\partial V}{\partial d_i} = \sum_{j \in S_i} \frac{\partial V}{\partial \rho_j} = \sum_{j \in S_i} \sum_{e=1}^{N} \int_{\Omega_e} N_i \mathrm{d}\Omega_e \tag{9}$$

2　数值算例

以悬臂梁结构为例采用节点变量法进行结构拓扑优化设计。悬臂梁结构的设计域尺寸如图 3 所示。悬臂梁结构的长度 L 与宽度 H 之比为 8∶5，载荷作用在结构右边中点，载荷大小 $F = 1$ N，左边固定，材料的弹性模量 E 为 100 GPa，泊松比为 0.3，体积比为 0.4。

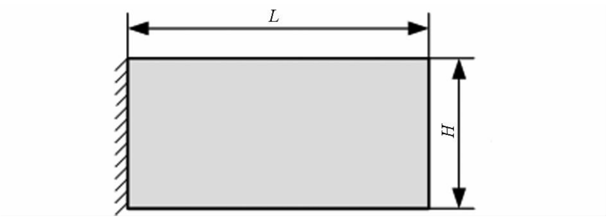

图 3　设计域

Fig. 3　Admissible design domain

为了对比说明，采用单元变密度法、过滤处理的单元变密度法和本文提出的节点密度法进行悬臂结构拓扑优化设计，设计域离散为 80×50 个 4 节点矩形单元，最小半径 $r_{\min}$ 为 2.5。

采用不同方法获得的悬臂梁结构拓扑优化结果如图 4 所示。图 4a 是直接采用单元变密度法获得的拓扑图，可以看到优化结果存在棋盘格现象；图 4b是采用过滤处理的单元变密度法获得的拓扑图，过滤处理能够消除棋盘格，但是结构边界容易出现中间密度单元；图 4c 是采用节点变量法得到的拓扑图，拓扑优化结果清晰地显现了设计区域内的黑白边界，消除了棋盘格现象。这说明节点变量法能够消除棋盘格现象，并且可以获得清晰边界结构。

对设计域进行 80×50、160×100 及 240×150 网格划分，采用提出的方法进行悬臂梁结构拓扑优化设计，拓扑优化结果如图 5 所示。由图 5 可知，在不同网格划分情况下，除了网格数越多边界越光滑外，得到的拓扑图是一致的，不存在网格依赖性。

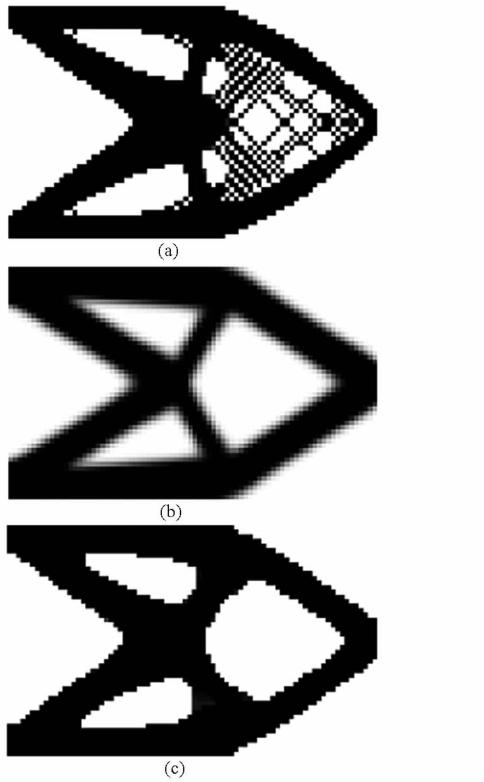

图 4　不同方法获得的拓扑图

Fig. 4　Optimal topology for different method

（a）变密度法　（b）过滤处理的变密度法　（c）节点变量法

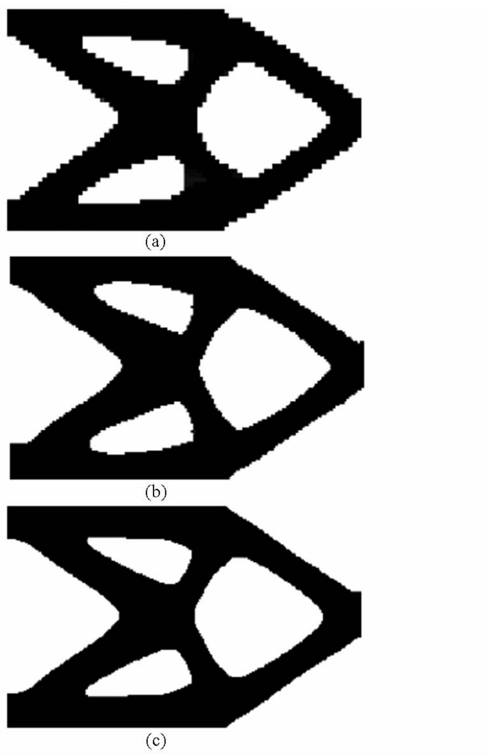

图 5　不同网格划分获得的拓扑图

Fig. 5　Optimal topology for different element mesh

（a）网格划分为 80×50　（b）网格划分为 160×100

（c）网格划分为 240×150

网格划分为 80×50，采用最小半径分别为 1.5、2.5 情况下，进行悬臂梁结构拓扑优化设计，拓扑结果如图 6 所示。映射函数通过最小半径来控制拓扑结构的最小尺寸，允许的最小尺寸是由两倍最小半

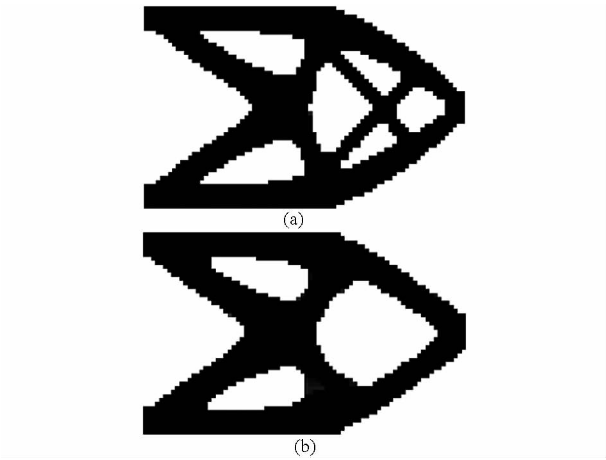

图6　不同最小半径获得的拓扑图

Fig. 6　Optimal topology for different minimum radius

(a) $r_{min}=1.5$　(b) $r_{min}=2.5$

径决定的。由图6可知,与最小半径为1.5相比,最小半径为2.5时拓扑优化结果出现较大的尺寸结构。这说明通过设定的最小半径来控制优化结果中的最小尺寸约束可行,并且设定的最小半径越大,拓扑图出现越大尺寸的结构,便于加工制造。

3　结论

(1) 采用节点变量法进行连续体结构拓扑优化设计方法是可行的,能够得到清晰材料分布的拓扑图。

(2) 采用节点变量法进行连续体结构拓扑优化设计,拓扑优化结果能够避免棋盘格、网格依赖性等数值不稳定性现象。

(3) 通过最小半径来实现拓扑优化结果中的最小尺寸约束,设定的最小半径越大,拓扑图出现越大尺寸的结构,便于加工制造。

参考文献

1　开依沙尔·热合曼, 买买提明·艾尼. 基于骨骼重建机理的连续体结构仿生拓扑优化方法[J]. 农业机械学报, 2014, 45(5): 340－346.
Kaysar·Rahman, Mamtimin·Geni. Bionic topology optimization method for continuum structures based on bone remodeling mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(5): 340－346. (in Chinese)

2　Diaz A, Sigmund O. Checkerboard patterns in layout optimization[J]. Structural Optimization, 1995, 10(1): 40－45.

3　Sigmund O, Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima[J]. Structural Optimization, 1998, 16(1): 68－75.

4　李翔,王皓. 连续体结构拓扑优化的过滤变密度法[J]. 复旦学报:自然科学版,2012, 51(4): 400－405.
Li Xiang, Wang Hao. A new variable density method with gray-scale filter function for topology optimization of continuum structures[J]. Journal of Fudan University:Natural Science, 2012, 51(4): 400－405. (in Chinese)

5　Petersson J, Sigmund O. Slope constrained topology optimization[J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1998, 41(8): 1417－1434.

6　孙士平,张卫红. 多相材料结构拓扑优化的周长控制方法研究[J]. 航空学报,2006, 27(5): 963－968.
Sun Shiping, Zhang Weihong. Investigation of perimeter control for structural topology optimization with multiphase materials[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(5): 963－968. (in Chinese)

7　Poulsen A. Topology optimization in wavelet space[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(3): 567－582.

8　左孔天,王书亭,陈立平,等. 拓扑优化中去除数值不稳定性的算法研究[J]. 机械科学与技术,2005, 24(1): 86－89.

9　周向阳,陈立平,黄正东. 基于SIMP和SSV的结构与支撑拓扑优化设计[J]. 农业机械学报,2008, 29(6): 137－141.
Zhou Xiangyang, Chen Liping, Huang Zhengdong. Simultaneous topology optimization of structure and supports based on SIMP and SSV[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 29(6): 137－141. (in Chinese)

10　李震,孙宝元,钱敏,等. 基于节点密度的柔性机构的拓扑优化设计[J]. 计算力学学报,2007, 24(2): 130－134.
Li Zhen, Sun Baoyuan, Qian Min, et al. Topology optimization design for compliant mechanisms based on nodal density[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(2): 130－134. (in Chinese)

11　Matsui K, Terada K. Continuous approximation of material distribution for topology optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 59(14): 1925－1944.

12　龙凯,左正兴. 基于节点密度法的连续体结构拓扑优化结果提取[J]. 北京理工大学学报,2008, 28(8): 706－709.
Long Kai, Zuo Zhengxing. Topology extraction in the topological optimization of continuum structure based on nodal density[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2008, 28(8): 706－709. (in Chinese)

13　Glaucio H P, Chau H L. A modified Q4/Q4 element for topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009, 37(3):255－264.

14　Guest J K, Prevost J H, Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(7): 238－254.

15　Almeid S R M, Paulino G H, Silva E C N. A simple and effective inverse projection scheme for void distribution control in topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2009, 39(4):359－371.

16　Svanberg K. The method of moving asymptotes: a new method for structural optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(2): 359－373.

(下转第339页)

13 Shute N A, Turnbull D E. Minimum power loss conditions of the pistons and valve plate in axial pumps and motors[J]. ASME Paper 63 - WA - 90, 1963: 6 - 17.
14 盛敬超. 液压流体力学[M]. 北京：机械工业出版社, 1980.
15 何存兴. 液压元件[M]. 北京：机械工业出版社, 1982.

Calculation Method of Minimum Length Retained in Cylinder for Swash-plate Plunger Pump Based on Energy Loss

Cheng Huanbo[1]　Liu Zhifeng[1]　Xie Ping[2]　Zhan Yifei[1]　Yuan He[1]
(1. *School of Mechanical and Automotive Engineering*, *Hefei University of Technology*, *Hefei* 230009, *China*
2. *Guangxi Liugong Machinery Co.*, *Ltd.*, *Liuzhou* 545007, *China*)

Abstract: Based on the energy loss analysis of the sliding pair between plunger and cylinder, a mathematical model of overall efficiency loss was established. Based on the principle of minimum overall efficiency loss, a calculation method of minimum length retained in cylinder was proposed. In order to ensure the plunger was not stuck during the relative movement because of friction self-locking, a strength check method of the sliding pair was proposed to validate the rationality of the calculated minimum length. And according to the strength check method, the minimum length and corresponding plunger geometry length were calculated. Under the principle of minimum loss of total efficiency, the optimum clearance of sliding pair was calculated by the strength check method. A case analyzed and verified the correctness of the calculation method, the calculated minimum length is 35 mm or 40 mm for the plunger pump used on an engineering machinery, the corresponding optimal clearance is 0.012 mm or 0.012 7 mm, and the theoretical calculated overall efficiency loss is 0.3%.

Key words: Swash-plate plunger pump　Minimum length retained in cylinder　Overall efficiency loss　Optimum clearance

(上接第 332 页)

Topology Optimization of Continuum Structures Using Node Variable Method

Zhan Jinqing　Yang Kang　Huang Zhichao
(*School of Mechanical and Electrical Engineering*, *East China Jiaotong University*, *Nanchang* 330013, *China*)

Abstract: A topology optimization design of continuum structures using node variable method was proposed not only to avoid the phenomenon of numerical instabilities but also to consider the manufacturing requirements. Within the defined sub-domain, the projection function independent on element mesh was adopted to represent the relationship of node design variables and node density variables. It could achieve the minimum length scale constraint of the topological solution to meet processing requirements. With the objective function developed by the minimum strain energy to meet stiffness requirement, and the volume used as the constraints, the topology optimization model of continuum structure under minimum length scale constraints was developed. The method of moving asymptotes was adopted to solve the topology optimization problem. The numerical examples indicated that the approach could avoid the phenomenon of numerical instabilities and obtain distinct topological structure which is convenient for manufacturing.

Key words: Continuum structures　Topology optimization　Node variable method　Projection function