doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2014.08.049

# 4 自由度冗余驱动并联机构运动学和工作空间分析\*

陈修龙 陈林林 梁小夏

(山东科技大学机械电子工程学院,青岛 266590)

**摘要:**提出了能实现二维转动和二维移动的空间 4 - UPS - RPU4 自由度冗余驱动并联机构,并对该机构进行了运动学和工作空间分析。4 - UPS - RPU 并联机构包含 5 条驱动分支,其中 4 条分支为 UPS(虎克铰-移动副-球副)结构,1 条分支为 RPU(转动副-移动副-虎克铰)结构。建立了该机构的位置反解数学模型,推导出了该机构的速度 雅可比矩阵和加速度分析表达式,求解了机构的位置反解、速度和加速度,并在此基础上分析该机构的工作空间。 研究结果为 4 - UPS - RPU 冗余驱动并联机构的实际应用提供了理论依据。

关键词:冗余并联机构 运动学分析 雅可比矩阵 工作空间

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2014)08-0307-07

#### 引言

并联机构与串联机构在应用上形成了很好的互补,受国内外学者广泛关注<sup>[1-5]</sup>。冗余驱动并联机构是输入构件数目多于输出构件自由度数的并联机构,它相对于一般并联机构具有刚度高、力操作性能优、承载能力大和定位精度高等优点<sup>[6-14]</sup>,已成为机器人研究与应用的一个热点。

目前常见的冗余驱动并联机构主要有<sup>[15-20]</sup>:直 接把非冗余并联机构的被动关节变为驱动关节,在 非冗余并联机构中增加驱动分支,采用自均力冗余 驱动接口模块。第1类冗余驱动方式构造简单,但 是由于不便于把驱动器布置在基座上,因此对机构 的动力学性能影响较大;第2类能很容易地解决驱 动器布置的问题,但机构的成本较高,运动控制较 难;第3类能很好地解决运动惯性和控制复杂性的 问题,但实际设计难度较大。迄今国内外有关学者 大都针对3自由度、5自由度和6自由度冗余驱动 并联机构进行研究,针对空间4自由度冗余驱动并 联机构的研究还相对较少。

本文提出一种 4 - UPS - RPU 空间 4 自由度冗 余并联机构,建立该机构位置反解、速度求解和加速 度求解的运动学模型,采用理论数值分析与 ADAMS 虚拟样机仿真相结合的方法验证所建模型的正确 性,在此基础上分析该机构的工作空间。

#### 1 四自由度冗余驱动并联机构

4-UPS-RPU空间四自由度冗余驱动并联机 构简图,如图1所示。4-UPS-RPU并联机构通过 4个完全相同的UPS(虎克铰-移动副-球副)支链以 及另一个 RPU(转动副-移动副-虎克铰)支链与动 平台相连接。通过协同控制4个UPS支链中移动 副的伸缩和1个 RPU支链中移动副的伸缩来实现 动平台的位置和姿态,即驱动数目是5。RPU分支 为约束支链,限制了动平台沿转动副 R6 轴线方向 的移动自由度和绕其自身法线的转动自由度,使并 联机构具有两维转动和两维移动4个自由度。4-UPS-RPU并联机构中输入构件的个数为5,大于机 构自由度的数目4,因此4-UPS-RPU并联机构为 具有冗余驱动性质的空间并联机构。

#### 2 机构的运动学分析

#### 2.1 机构的位置反解

如图 1 所示,在并联机构上下平台上分别建立 坐标系,定坐标系  $O_A X_A Y_A Z_A$  固定于定平台上,坐标 系的中心定在经过 4 个虎克铰的圆的圆心上,其中  $X_A$  轴竖直向下, $Y_A$  轴指向转动副 R6, $Z_A$  轴按右手 定则确定。动坐标系  $O_B X_B Y_B Z_B$  建立在动平台上, 初始位形时  $X_B$  轴与  $X_A$  轴同轴线、且方向相同, $Y_B$ 轴与  $Z_A$  方向相同, $Z_B$  轴与  $Y_A$  方向相反。

机构的位置反解是已知动平台的位姿,求5个

收稿日期: 2013-09-12 修回日期: 2013-10-25

<sup>\*</sup>国家自然科学基金资助项目(51005138)、山东省优秀中青年科学家科研奖励基金资助项目(BS2012ZZ008)和山东科技大学杰出青年基金资助项目(2011KYJQ102)

作者简介:陈修龙,副教授,博士后,主要从事并联机器及其动力学研究,E-mail: cxldy99@163.com





Fig. 1 Mechanism diagram of 4 - UPS - RPS



Fig. 2 Velocity diagram of mechanism

驱动杆的长度。定平台上的 5 个运动副并不是均匀 分布,其中 R6 点(后用 U1 表示)所在圆的半径为  $r_1 = 710 \text{ mm},其余 4 个虎克副则均匀分布在半径为$  $<math>r_2 = 650 \text{ mm}$ 的圆上,4 个虎克铰之间的夹角为  $\pi/2$ , 定平台坐标系的 Y 轴穿过  $R_1$ ,动坐标系则沿定坐标 系的 X 轴旋转 90°,U6 点(后用 S1 表示)位于 XOZ 平面内  $r_3 = 228 \text{ mm}$ ,距离动坐标系的竖直距离为  $d = 67.11 \text{ mm},其余 4 个球铰位于半径为 <math>r_4 = 198 \text{ mm}$ 的圆上,4 个球铰之间的夹角为  $2\pi/5$ ,根据以上尺 寸可分别求出定平台上的铰链点在定坐标系下的坐 标<sup>A</sup> $P_{Ui} = [^{A}X_{Ui} \ ^{A}Z_{Ui}]^{T}$ ,以及动平台上铰链点 在动坐标系下的坐标<sup>B</sup> $P_{Si} = [^{B}X_{Si} \ ^{B}Z_{Si}]^{T}$ 。

动平台上的铰链点坐标在定坐标系的坐标可表 示为

$${}^{A}\boldsymbol{P}_{Si} = \begin{bmatrix} {}^{A}X_{Si} & {}^{A}Y_{Si} & {}^{A}Z_{Si} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{B}\boldsymbol{P}_{Si} + {}^{A}\boldsymbol{P}_{BO}$$
  
其中  
$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta & s\alpha \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta & -c\alpha \\ -s\beta & c\beta & 0 \end{bmatrix}$$
$${}^{A}\boldsymbol{P}_{BO} = \begin{bmatrix} {}^{A}X_{BO} & {}^{A}Y_{BO} & {}^{A}Z_{BO} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

式中 **R**——以 Z – Y – X 欧拉角表示的姿态变换矩 阵

*AP*<sub>B0</sub> — 动坐标系原点在定坐标系下的坐标 由 4 – UPS – RPU 机构可知,其动平台上的虎克 铰 U6(后用 S1 表示)在定坐标系的 *Z*<sub>A</sub> 轴上的坐标 为 0。虎克铰 U6 在动坐标系下的坐标值转换到定 坐标系下可表示为

$$\begin{bmatrix} {}^{A}X_{S1} \\ {}^{A}Y_{S1} \\ {}^{A}Z_{S1} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} -67.11 \\ 0 \\ -228.41 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{A}X_{B0} \\ {}^{A}Y_{B0} \\ {}^{A}Z_{B0} \end{bmatrix}$$
(2)

由式(2)可得

$${}^{A}Z_{s_{1}} = -228.41R_{33} - 67.11R_{31} + {}^{A}Z_{B0}$$
 (3)  
由于 ${}^{A}Z_{s_{1}} = 0, 可得$ 

 ${}^{A}Z_{B0} = -67.11 \sin\beta$  (4)

从而得到 5 个驱动杆的杆长在定坐标系中的位 置矢量为

$$\boldsymbol{L}_{i} = {}^{A}\boldsymbol{P}_{Si} - {}^{A}\boldsymbol{P}_{Ui} = \boldsymbol{R}^{B}\boldsymbol{P}_{Si} + {}^{A}\boldsymbol{P}_{BO} - {}^{A}\boldsymbol{P}_{Ui}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 5)$$
(5)

由式(5)可知,根据5个驱动杆两端点在定坐 标系下的坐标,可以求出各驱动杆的杆长为

$$l_{i} = |\boldsymbol{L}_{i}| = |{}^{A}\boldsymbol{P}_{Si} - {}^{A}\boldsymbol{P}_{Ui}| =$$

$$\sqrt{({}^{A}\boldsymbol{X}_{Si} - {}^{A}\boldsymbol{X}_{Ui})^{2} + ({}^{A}\boldsymbol{Y}_{Si} - {}^{A}\boldsymbol{Y}_{Ui})^{2} + ({}^{A}\boldsymbol{Z}_{Si} - {}^{A}\boldsymbol{Z}_{Ui})^{2}}$$
(6)

式(6)是4-UPS-RPU 空间4 自由度冗余驱动

并联机构的运动位置反解模型,利用式(6)可以将 并联机构工作空间中规划好的动平台中心点的位置 和姿态,转换为关节空间中 UPS 分支驱动杆的杆长 和 RPU 分支驱动杆的杆长,为冗余驱动的协调控制 从而实现对机构动平台位姿的运动控制奠定基础。

#### 2.2 机构的速度分析

如图 2 所示,  ${}^{A}V_{bo}$ 为动平台中心点  $O_{B}$  的速度,  ${}^{A}\omega_{b}$ 为动平台的角速度,  ${}^{A}V_{si}$ 为较点  $S_{i}$  的速度,  $\dot{L}_{i}$  为 杆  $L_{i}$  的杆长变化速度,  ${}^{A}r_{si}$ 为较点  $S_{i}$  相对于动平台 中心点  $O_{B}$  的矢径,  ${}^{A}n_{i}$ 为杆  $L_{i}$  的单位方向矢量,  ${}^{A}u_{1}$ 为转动副 T1 的单位向量。则铰链点  $S_{i}$ 的速度 ${}^{A}V_{S_{i}}$ 可表示为

$${}^{A}\boldsymbol{V}_{si} = {}^{A}\boldsymbol{V}_{bo} + {}^{A}\boldsymbol{\omega}_{b} \times {}^{A}\boldsymbol{r}_{si}$$
(7)

故驱动速度  $L_i$  可表示为<sup>4</sup> $V_{si}$ 在  $L_i$  上的投影

$$\dot{L}_i = {}^{A} \boldsymbol{V}_{si} {}^{A} \boldsymbol{n}_i \tag{8}$$

将式(7)代入式(8)中,可得

$$\dot{L}_{i} = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{n}_{i}^{\mathrm{T}} & ({}^{A}\boldsymbol{r}_{si} \times {}^{A}\boldsymbol{n}_{i})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{V}_{bo} \\ {}^{A}\boldsymbol{\omega}_{b} \end{bmatrix}$$
(9)

对于全部5个驱动杆,有

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{J}_{1A} \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{V}_{bo} \\ {}^{A}\boldsymbol{\omega}_{b} \end{bmatrix}$$
(10)

其中

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{L}}_{1} & \dot{\boldsymbol{L}}_{2} & \dot{\boldsymbol{L}}_{3} & \dot{\boldsymbol{L}}_{4} & \dot{\boldsymbol{L}}_{5} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{J}_{1A} = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{n}_{1}^{\mathrm{T}} & ({}^{A}\boldsymbol{r}_{s1} \times {}^{A}\boldsymbol{n}_{1})^{\mathrm{T}} \\ {}^{A}\boldsymbol{n}_{2}^{\mathrm{T}} & ({}^{A}\boldsymbol{r}_{s2} \times {}^{A}\boldsymbol{n}_{2})^{\mathrm{T}} \\ {}^{A}\boldsymbol{n}_{3}^{\mathrm{T}} & ({}^{A}\boldsymbol{r}_{s3} \times {}^{A}\boldsymbol{n}_{3})^{\mathrm{T}} \\ {}^{A}\boldsymbol{n}_{4}^{\mathrm{T}} & ({}^{A}\boldsymbol{r}_{s4} \times {}^{A}\boldsymbol{n}_{4})^{\mathrm{T}} \\ {}^{A}\boldsymbol{n}_{5}^{\mathrm{T}} & ({}^{A}\boldsymbol{r}_{s5} \times {}^{A}\boldsymbol{n}_{5})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

式中 J14 ---- 驱动速度映射矩阵

RPU 分支中球铰<sup>A</sup> $V_{s_1}$ 在<sup>A</sup> $u_1$ 上的投影为零,即

$$0 = {}^{A} \boldsymbol{V}_{s_{1}} {}^{A} \boldsymbol{u}_{1} = \begin{bmatrix} {}^{A} \boldsymbol{u}_{1}^{\mathrm{T}} & ({}^{A} \boldsymbol{r}_{s_{1}} \times {}^{A} \boldsymbol{u}_{1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A} \boldsymbol{V}_{bo} \\ {}^{A} \boldsymbol{\omega}_{b} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_{uA} \begin{bmatrix} {}^{A} \boldsymbol{V}_{bo} \\ {}^{A} \boldsymbol{\omega}_{b} \end{bmatrix}$$
(11)

其中  $\boldsymbol{J}_{uA} = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{u}_{1}^{\mathrm{T}} & ({}^{A}\boldsymbol{r}_{s_{1}} \times {}^{A}\boldsymbol{u}_{1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 

式中  $J_{uA}$ ——约束映射矩阵

由式(10)和式(11)可得

$$\begin{bmatrix} \dot{L} \\ 0 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} {}^{A} V_{bo} \\ {}^{A} \omega_{b} \end{bmatrix}$$
(12)  
$$J = \begin{bmatrix} J_{1A} \\ J_{uA} \end{bmatrix} =$$

其中

$$\begin{bmatrix} {}^{A}n_{1} & {}^{A}n_{2} & {}^{A}n_{3} & {}^{A}n_{4} & {}^{A}n_{5} & {}^{A}u_{1} \\ {}^{A}r_{s1} \times {}^{A}n_{1} & {}^{A}r_{s2} \times {}^{A}n_{2} & {}^{A}r_{s3} \times {}^{A}n_{3} & {}^{A}r_{s4} \times {}^{A}n_{4} & {}^{A}r_{s5} \times {}^{A}n_{5} & {}^{A}r_{s1} \times {}^{A}u_{1} \end{bmatrix}_{6 \times 6}^{T}$$
  
式中 *J*——完全映射矩阵

由式(12)可得

$$\begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{V}_{bo} \\ {}^{A}\boldsymbol{\omega}_{b} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\dot{L}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$
(13)

式中 **J**<sup>-1</sup>——从关节空间到操作空间映射的速度 雅可比矩阵

当用 Z - Y - X 欧拉角( $\alpha, \beta, \gamma$ )表示动平台的姿态时,欧拉角( $\alpha, \beta, \gamma$ )对时间的导数为 $\dot{\alpha}$ 在 Z轴上,  $\dot{\beta}$ 在 Y'轴上, $\dot{\gamma}$ 在 X''轴上, $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ 非正交。将 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ 和  $\dot{\gamma}$ 转换到定坐标系 $\{A\}$ 上,则动平台的转动角速度 用欧拉角的导数表示为

$${}^{A}\boldsymbol{\omega}_{B} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{Z},\alpha) \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{Z},\alpha) \boldsymbol{R}(\boldsymbol{Y},\beta) \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{Z},\alpha) \boldsymbol{R}(\boldsymbol{Y},\beta) \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & -\sin\alpha \\ \boldsymbol{0} & \cos\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{bmatrix}$$
(14)

对式(4)两边求导,可得

$${}^{A}V_{zbo} = -67.11\dot{\beta}\cos\beta$$
 (15)  
可以将动平台的六维速度表示为

$$\begin{bmatrix} {}^{A}V_{B0} \\ {}^{A}\omega_{B} \end{bmatrix} = J_{2A} \begin{vmatrix} {}^{V}_{xB0} \\ {}^{A}V_{yB0} \\ \vdots \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\alpha} \end{vmatrix}$$
(16)

其中  
$$\boldsymbol{J}_{2A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -67.11\cos\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

将式(16)代入式(10)中,可得到

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_{1} \\ \dot{L}_{2} \\ \dot{L}_{3} \\ \dot{L}_{4} \\ \dot{L}_{5} \end{bmatrix} = J'_{A} \begin{bmatrix} {}^{A}V_{xbo} \\ {}^{A}V_{ybo} \\ \vdots \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$
(17)

其中  $J'_{A5\times 4} = J_{1A}J_{2A} \in R^{5\times 4}$ 

式中 J'<sub>45×4</sub>——欧拉角转速形式的速度传递矩阵

利用式(17)可以求得 4 - UPS - RPU 空间四自 由度冗余驱动并联机构中 UPS 分支和 RPU 分支共 5 个驱动杆的速度。

#### 2.3 机构的加速度分析

令动平台对应的线加速度和角加速度分别为a和 $\varepsilon$ , $a_{Li}$ 为沿着 $L_i$ 的加速度, $i = 1, 2, \dots, 5, 则 a$  和 $\varepsilon$ 可表示为

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x & \boldsymbol{\varepsilon}_y & \boldsymbol{\varepsilon}_z \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$
式(10)对时间求导,可得

$$a_{Li} = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{n}_{i}^{\mathrm{T}} & ({}^{A}\boldsymbol{r}_{si} \times {}^{A}\boldsymbol{n}_{i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{V}_{bo} & {}^{T}\boldsymbol{\omega}_{b} \end{bmatrix} \boldsymbol{h}_{i} \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{V}_{bo} \\ {}^{A}\boldsymbol{\omega}_{b} \end{bmatrix}$$
(18)

其中

$$h_{i} = \frac{1}{L_{i}} \begin{bmatrix} -{}^{A} \hat{n}_{i}^{2} & {}^{A} \hat{n}_{i}^{2A} \hat{r}_{si} \\ -{}^{A} \hat{r}_{si}^{A} \hat{n}_{i}^{2} & {}^{L_{i}} \hat{r}_{si}^{A} \hat{n}_{i} + {}^{A} \hat{r}_{si}^{A} \hat{n}_{i}^{2A} \hat{r}_{si} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$\forall \vec{x} \in \vec{1} \text{ (16)} \ \vec{x} \in \vec{y} \text{ (17)}$$

$$A = J_{2A} a_{s} + v_{s}^{T} H v_{s} \qquad (19)$$

其中

$$\boldsymbol{a}_{s} = \begin{bmatrix} {}^{A}\dot{\boldsymbol{V}}_{xbo} & {}^{A}\dot{\boldsymbol{V}}_{ybo} & \boldsymbol{\ddot{\alpha}} & \boldsymbol{\ddot{\beta}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{1} & \boldsymbol{H}_{2} & \boldsymbol{H}_{3} & \boldsymbol{H}_{4} & \boldsymbol{H}_{5} & \boldsymbol{H}_{6} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

 $A = \begin{bmatrix} a & \varepsilon \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 

当已知<sup>4</sup> $V_{xbo}$ 、<sup>4</sup> $V_{ybo}$ 、 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 、 $\dot{\gamma}$ 、<sup>4</sup> $\dot{V}_{xbo}$ 、<sup>4</sup> $\dot{V}_{ybo}$ 、 $\ddot{\alpha}$ 、 $\ddot{\beta}$ 、 $\ddot{\gamma}$ 时,由式(19)、(16)、(18)可以 4 – UPS – RPU 空间 4 自由度冗余驱动并联机构中 UPS 分支和 RPU 分 支共 5 个驱动杆的加速度。

#### 3 机构的工作空间分析

并联机构正常工作时,工作头可达点空间称为 工作空间,其中,工作头可以任意姿态到达的部分称 为灵活工作空间。工作空间可以通过工作头倾斜角 进行描述,假定工作头轴线开始时与 X 轴重合,工 作头轴线所在坐标系与定坐标系 OXYZ 重合,r 表示 经过变换后的轴线,r 与 X 构成一平面,工作头轴线 在此平面内与 X 轴具有一个最大的夹角,随着 r 的 变化,最大值中的最小值便是工作头的灵活倾斜 角。在并联机构运动的过程中,受到很多几何约 束条件约束,主要包括伸缩杆的最短最长约束、球 铰摆角约束、虎克角约束、驱动杆之间约束等。只 有正确分析几何条件约束,才能防止产生奇异位 型和干涉。为确保加工的顺利进行,工作头到达 空间的任一点时,工作头在圆锥面内不能发生干 涉现象。

#### 3.1 工作空间的降维描述

4 – UPS – RPU 并联机构用 Z – Y – X 欧拉角来 确定动平台的姿态,在欧拉角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  中,由于  $\gamma$  =  $\pi/2$ ,只需确定  $\alpha$ 、 $\beta$ 即可。如图 3 所示,矢量 r 所在 坐标系可以由定坐标系经过两次变换确定:首先绕 X 轴旋转  $\varphi$ ,然后绕 Y 轴转动一个 –  $\eta$  而得到,根据 坐标齐次变换运算得到,由定坐标系到刀具坐标系 的变换矩阵为

$$R_{x-y} = R(X,\varphi)R(Y, -\eta) = \begin{bmatrix} \cos\eta & 0 & -\sin\eta \\ -\sin\eta\sin\varphi & \cos\varphi & -\cos\eta\sin\varphi \\ \sin\eta\cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi\cos\eta \end{bmatrix}$$
(20)  

$$\exists t \neq \varphi \quad \exists x \text{ inf} \quad \eta \in (0,2\pi)$$

$$f(0,2\pi) \quad f(0,2\pi) \quad f(0,2\pi) \quad f(0,2\pi)$$

$$R^{-1} = R_{x-y} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = R_{x-y} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = R_{x-y} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & y$$

$$sin\alpha cos\beta = cos\eta$$
  

$$sin\alpha cos\beta = -sin\eta sin\varphi$$
 (23)  

$$-sin\beta = sin\eta cos\varphi$$

由式(23)可得到灵活姿态角和欧拉角的关系

$$\begin{cases} \alpha = \arctan(-\tan\varphi\sin\eta) \\ \beta = \arctan(\sin\alpha\cot\eta) \end{cases}$$
(24)

根据式(24),可以得到灵活工作头倾角  $\varphi$  取不同值时 4 – UPS – RPU 并联机构的工作空间。

#### 3.2 并联机构的几何约束分析

为

4-UPS-RPU 并联机构的工作空间受到几何

条件的约束可以表示为

### 4 机构的运动学和工作空间分析实例

#### 4.1 并联机构的运动学分析实例

定义 4 - UPS - RPU 并联机构动平台的运动轨 迹为

 $\begin{cases} x = 1 \ 152 + 40 \sin(2t) \\ y = 441. \ 5 + 40 \cos(2t) \\ z = -67. \ 11 \sin\beta \\ \alpha = 0 \\ \beta = \pi/36 \\ \gamma = \pi/2 \end{cases}$ (26)

根据上述推导出的 4 - UPS - RPU 并联机构的 位置反解、速度求解和加速度求解数学模型,即 式(6)、式(17)和式(19),利用 Matlab 数值计算分 别得到机构驱动杆杆长、驱动杆速度和驱动杆加速 度随时间变化的曲线,见图4。利用 ADAMS 虚拟样 机仿真得到的4-UPS-RPU 并联机构的驱动杆杆 长值、驱动杆速度和驱动杆加速度随时间变化的曲 线,见图5。由图4和图5可以得出,数值计算的结 果与虚拟仿真分析结果基本上一致,说明了本文推 导的位置反解、速度求解和加速度求解表达式都是 正确的。

#### 4.2 并联机构的工作空间分析实例

定义 4 – UPS – RPU 并联机构驱动杆的最大杆 长 1700 mm(其中 RPU 杆为 1650 mm);驱动杆最小 杆长 900 mm(其中 RPU 杆为 950 mm);球铰的最大 摆角为 45°;虎克铰最大转角为 90°;灵活测头倾角  $\varphi$  的变化范围为 0°~20°。通过数值计算得到机构 的工作空间图,见图 6。由图 6 可知,当 $\varphi$ 变大时, 机构的工作空间在 Y 方向逐渐增大,在 Z 方向逐渐 减少;当 $\varphi$  为 0°时,机构只能在竖直平面内运动,机 构在 Z 方向的最大运动范围可达 700 mm;当 $\varphi$  = 20°时,机构在 Y 方向最大运动范围可达 200 mm;机 构的工作空间关于 Y、Z 两个方向对称分布,且连续 分布。







#### 5 结束语

提出了一种 4 - UPS - RPU 空间 4 自由度冗余 并联机构,建立了该并联机构的位置反解数学模型; 建立了动平台六维速度和关节驱动速度矢量之间的 6×6完全映射矩阵,推导出了适用于欧拉角转速形 式的5×4 雅可比矩阵,实现了机构关节空间和工作 空间速度的一一映射;建立了机构的加速度分析表



达式;分析了机构的工作空间,并通过实例验证了理

论分析的正确性。

#### 文 献

- 陈修龙,孙先洋,邓昱.4-UPS-RPS 空间 5 自由度并联机构运动学分析[J].农业机械学报,2013,44(8):257-261,267. 1 Chen Xiulong, Sun Xianyang, Deng Yu. Kinematics analysis of 4 - UPS - RPS spatial 5-DOF parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(8):257-261, 267. (in Chinese)
- 唐卫星,马履中,石奇端,等. 3T-2R五自由度并联机构的型综合[J]. 中国机械工程,2007,18(20):2460-2463. 2 Tang Weixing, Ma Lüzhong, Shi Qinduan, et al. Type synthesis of 3T-2R parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(20): 2460 - 2463. (in Chinese)
- 3 陈修龙,冯伟明,赵永生.五自由度并联机器人机构动力学模型[J].农业机械学报,2013,44(1):236-243. Chen Xiulong, Feng Weiming, Zhao Yongsheng. Dynamics model of 5-DOF parallel robot mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(1):236-243. (in Chinese)
- 4 Huang Z, Li Q C. Two novel symmetrical 5-DOF parallel manipulators [J]. Journal of Yanshan University, 2001, 25 (4):283 -286.
- Wu Jun, Wang J S, Wang L P, et al. Study on the stiffness of a 5-DOF hybrid machine tool with actuation redundancy [J]. 5 Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(2): 289-305.
- Kong Xianwen, Gosselin Clément M. Type synthesis of 5-DOF parallel manipulators based on screw theory [J]. Journal of Robotic 6 Systems, 2005, 22(10):535 - 547.
- Piccin O, Bayle B, Maurin B, et al. Kinematic modeling of a 5-DOF parallel mechanism for semi-spherical workspace [J]. 7 Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(8): 1485 - 1496.
- Gao Feng, Peng Binbin, Zhao Hui, et al. A novel 5-DOF fully parallel kinematic machine tool[J]. The International Journal of 8

Advanced Manufacturing Technology, 2006, 31(1-2): 201-207.

- 9 赵永生,郑魁敬,李秦川,等. 5-UPS/PRPU五自由度并联机床运动学分析[J]. 机械工程学报,2004,40(2):12-16. Zhao Yongsheng, Zheng Kuijing, Li Qinchuan, et al. Kinematic analysis of 5 - UPS/PRPU 5-DOF parallel machine tool[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004,40(2):12-16. (in Chinese)
- 10 李秦川,陈巧红,胡旭东,等. 对称五自由度 3R2T 并联机构的雅可比分析[J]. 中国机械工程,2008,19(14):1731-1735. Li Qinchuan, Chen Qiaohong, Hu Xudong, et al. Jacobian analysis of symmetrical 5 - DOF 3R2T parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2008,19(14):1731-1735. (in Chinese)
- 11 He Jingfeng, Jiang Hongzhou, Tong Zhizhong, et al. Study on dynamic isotropy of a class of symmetric spatial parallel mechanisms with actuation redundancy[J]. Journal of Vibration and Control, 2012, 18(8): 1156-1164.
- 12 Zhang Yanfei, Gong Jinliang, Gao Feng. Theory of singularity elimination by redundant actuation for parallel mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2006,17(5):445-448.
- 13 Chen Xiulong, Sun Xianyang. Dexterity analysis of 4 UPS RPS parallel mechanism [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2012, 9: 1-8.
- 14 Fang Y F, Tsai L W. Structure synthesis of a class of 4-DOF and 5-DOF parallel manipulators with identical limb structures [J]. Journal of Robotics Research, 2002, 21(9): 799-810.
- 15 Qing Jianxi, Li Jianfeng, Fang Bin. Drive optimization of tricept parallel mechanism with redundant actuation [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(5):8-14.
- 16 Jeong Haemin, Kwon Sang Joo, Lee Sang Moo. Mask-panel alignment robot system using a parallel mechanism with actuation redundancy[J]. Journal of Institute of Control, Robotics and Systems, 2009, 15(9):887-893.
- 17 李剑锋,费仁元,范金红,等.驱动器布位及冗余驱动对 Tricept 并联机构性能的影响[J].机械工程学报,2008,44(1): 31-39.

Li Jianfeng, Fei Renyuan, Fan Jinhong, et al. Effects of actuator disposition and redundant actuation on performance of the Tricept parallel mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008,44(1):31-39. (in Chinese)

- 18 白志富,韩先国,陈五一. 基于冗余驱动的大姿态角并联机构优化设计[J]. 北京航空航天大学学报,2006,32(7):856-859.
   Bai Zhifu, Han Xianguo, Chen Wuyi. Optimal design of parallel mechanisms with large tilting ability based on redundant actuation [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2006,32(7):856-859. (in Chinese)
- 19 刘欣,仇原鹰,陈光达. 平面冗余与非冗余并联机构的奇异性比较研究[J]. 中国机械工程,2006,17(17):1769-1774.
- Liu Xin, Qiu Yuanying, Chen Guangda. Comparative study on singularities of planar parallel mechanisms with and without redundant actuations[J]. China Mechanical Engineering, 2006,17(17): 1769 1774. (in Chinese)
- 20 杨建新,余跃庆. 平面三自由度冗余并联机构的驱动奇异性分析[J]. 中国机械工程, 2006,17(6):629-632. Yang Jianxin, Yu Yueqing. Actuator singularity analysis of planar 3-DOF redundant parallel mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(6):629-632. (in Chinese)

## Kinematics and Workspace Analysis of a Novel 4-DOF Redundant Actuation Parallel Mechanism

Chen Xiulong Chen Linlin Liang Xiaoxia

(College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: A novel 4 - UPS - RPU spatial 4-degree of freedom redundant actuation parallel mechanism, which can achieve two rotational DOF and two translational DOF, is introduced, and the kinematics and workspace analysis are carried out. 4 - UPS - RPU parallel mechanism includes five limbs, four types of universal joint—prismatical joint—spherical joints and one type of revolution—prismatical joint—universal joint. The reverse solutions of position analysis for the parallel mechanism are presented, and the Jacobian matrix and acceleration equation are derived. The inverse position, velocity and acceleration of this parallel mechanism are solved, and on this basis, the workspace of the parallel mechanism is analyzed. The research can provide a theoretical basis foundation to promote application of 4 - UPS - RPU redundant actuation parallel mechanism.

Key words: Redundant actuation parallel mechanism Kinematics analysis Jacobian matrix Workspace