

不完全分形多孔介质热导率模型*

张 赛 陈君若 刘美红 刘显茜

(昆明理工大学机电工程学院, 昆明 650500)

摘要: 将多孔介质的物理构成分为具有分形结构的团聚体集合和不具有分形特性的固相和孔隙相,建立了简化单元体模型解释其微观结构。结合多孔介质在干燥过程中热量守恒定律和傅里叶导热定律导出了材料总有效热导率模型。此模型无经验常数,每一个参数都有物理意义。研究结果表明,有效热导率与迂曲分形维数、面积分形维数、孔隙率和热风温度呈反比,与热风速率和时间呈正比。

关键词: 不完全分形 有效热导率 多孔介质

中图分类号: TK121 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2014)08-0220-05

引言

作为衡量热传输性能的标准,多孔介质的热导率已经得到了广泛的关注^[1-2]。赵晓琳等将多孔介质假定为大尺度空间上的虚拟连续介质,采用容积平均方法描述其几何分布,并结合遗传算法求解有效热导率^[3-4]。而事实上,在微尺度空间,均匀的孔隙分布是不存在的,假定理想模型与实际情况存在很大的差别。余妙春通过单一植物细胞的导热过程采用热阻模拟方法推导了有效扩散系数与孔隙率的关系式,并通过引用孔隙率与分形维数的经验公式计算出热导率与分形维数的表达式和经验常数^[5]。Zhu等假设纤维材料内孔隙分别为串联或并联的具有分形特性的几何形状,利用热阻法计算出了两种孔分布的纤维材料的有效热导率。不同种多孔介质其内部分形特征也存在不同,且要已知固相和流体相的热导率^[6-7],确定多孔介质的接触热阻是相当困难的,所以基于分形理论结合热阻法不能求解出真实的有效热导率。Huai等构建了几种孔径大小分布不同的多孔介质分形结构,基于有限容积法模拟分形结构的热传导,探求出有效热导率与孔隙率、固相热导率和液相热导率的关系^[8]。此文献中假设多孔介质每一单元体的温度和热导率是相同的,与分形结构相矛盾,容积平均理论只能应用于大尺度上均匀分布的虚拟连续介质。

大多数分形模型被描述为孔隙分布均匀,固相

或孔相中一项具有分形特性,而另一相不具有分形特性的多孔介质,在迭代过程中初始结构的分形相在无限小尺度下也自相似。这种模型的缺点是分形相的质量在无限迭代次数下为零,因此这类模型假设最小孔相或固相到达一定值时迭代停止。为了克服这一问题,Dathe等论证了不完全分形模型,即多孔介质包含一个团聚体相,此相中同时包括固相和孔相,反复迭代过程中只影响团聚体相,然而孔相和固相是确定的,在迭代中不会变化^[9]。在不完全分形模型中,孔的质量、固相的质量、孔相固相之间的关系式完全能确定的^[10-13]。因此包含不具有分形特性的孔相、固相和具有分形结构的团聚体相的不完全分形模型能正确表达多孔介质结构。

本文基于材料的不完全分形结构特征,结合热能守恒定律和傅里叶导热定律,在不用求解导热热阻的情况下,直接求解出材料的有效热导率模型,此模型无经验常数,每一个参数都有物理意义。

1 不完全分形多孔介质的结构特征

1.1 孔隙率

根据不完全分形的定义,孔相和固相在模型中是对称分布的,定义孔相和固体相的和为发生器比例的 $1-z$,在每一步骤固相和孔相在分形集合改变的区域中生成,如图1所示。

$$1-z=x+y \tag{1}$$

式中 x ——孔相的比例

收稿日期: 2013-11-21 修回日期: 2013-12-24

* 国家自然科学基金资助项目(51165014)、云南省教育厅重大专项资助项目(ZD2010002)、云南省科技计划项目资助项目(2012FB130)和云南省教育厅科学研究基金资助项目(2012Y540)

作者简介: 张赛,博士生,主要从事分形多孔介质传热传质研究,E-mail: sai_zh@163.com

通讯作者: 陈君若,教授,博士生导师,主要从事机电系统多场耦合理论及数值模拟研究,E-mail: chenjunruo@126.com

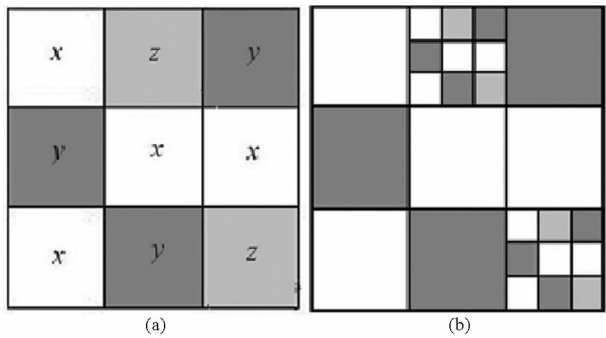


图 1 不完全分形结构
Fig. 1 Incomplete fractal structure
(a) 一阶 (b) 二阶

y ——固相的比例
 z ——具有分形结构的团聚体区域的比例
孔隙率在第 i 步的总和为

$$\varepsilon = x + zx + z^2x + \cdots + z^{i-1}x = x \sum_{j=0}^{i-1} z^j = x \frac{z^i - 1}{z - 1} \quad (2)$$

式中 ε ——孔隙率
 i ——每一次迭代次数
 j ——最后一次迭代次数
从式(1)得

$$\varepsilon_i = \frac{x}{x + y} (1 - z^i) \quad (3)$$

分形具有自相似性,即在不同空间尺度和时间尺度下观察某一结构或过程的特征都是相似的,具体表现形式为在统计意义下的自相似,即 i 无限大,则 $z^i \rightarrow 0$,得到孔相面积比例

$$\varepsilon_x = \frac{x}{x + y} \quad (4)$$

固相面积比例为

$$\varepsilon_y = \frac{y}{x + y} \quad (5)$$

1.2 孔和固体分布的分形特性

对于给定边长为 l 的正方形,用 n 个单元块填充它,计算所使用的小单元块数目 N 。孔相单元块数目为 N_x ,固相数目为 N_y ,可无限复制的单元块数目 N_z 。将上一步骤无限递推下去,也就是在单元块大小为 r_i 的情况下的孔相数目为

$$N_x(r_i) = N_x (Nz)^{i-1} = \frac{x}{z} L^{d_f} r_i^{-d_f} \quad (6)$$

式中 r_i ——单元块大小
 d_f ——在单元块大小为 r_i 情况下的面积分形维数
 L ——在单元块大小为 r_i 的情况下最大的孔隙直径
对式(6)积分,得到孔隙分布函数为

$$-dN_x = \frac{x}{z} D_f L^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr = \frac{x}{z} D_f (\sqrt{n} r_{\max})^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr \quad (7)$$

式中 D_f ——面积分形维数
 $r_{\max}$ ——最大孔隙直径, m
负号表示孔隙数目与直径呈反比, $-dN > 0$ 。
由于固相、孔相对称,得到固相数目为

$$N_y(r_i) = N_y (Nz)^{i-1} = \frac{y}{z} L^{d_f} r_i^{-d_f} \quad (8)$$

固相分布函数为

$$-dN_y = \frac{y}{z} D_f L^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr = \frac{y}{z} D_f (\sqrt{n} r_{\max})^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr \quad (9)$$

1.3 孔道的迂曲特性

气体在多孔介质中流动时,孔道是迂曲的,有

$$L_x(r) = L_y^{D_t} r^{1-D_t} \quad (10)$$

式中 $L_x(r)$ ——气体在直径为 r 的孔道内经过的实际距离, m
 D_t ——迂曲分形维数,且大于 1
 L_y ——孔道两端的特征距离,即物料厚度, m

$$\tau = \frac{L_x(r)}{L_y} > 1 \quad (11)$$

式中 τ ——孔道迂曲度, $\tau > 1$

1.4 横截面的孔面积、固相面积和总面积

横截面上单个孔道面积为

$$A_0 = \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 \quad (12)$$

由微元法可得分形多孔介质中截面上孔隙总面积为

$$A_x = - \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{4} \pi r^2 dN = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{4} \pi r^2 D_f L^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr = \frac{\pi D_f r_{\max}^2}{4(2-D_f)} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{2-D_f} \right] \quad (13)$$

由式(5)得固相总面积为

$$A_y = \frac{y}{x} A_x = \frac{y \pi D_f r_{\max}^2}{4x(2-D_f)} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{2-D_f} \right] \quad (14)$$

总截面面积为

$$A = \frac{A_x}{\varepsilon} = \frac{\pi D_f r_{\max}^2}{4 \frac{x}{x+y} (2-D_f)} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{2-D_f} \right] \quad (15)$$

2 热量计算

2.1 物料加热过程中固相所需热量

在加热阶段,物料吸收的热量用于温度的上升,即

$$Q_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_1 m_1 dT \tag{16}$$

比热容 c_1 表示为物料固相的蓄热能量,随温度变化很小,式(16)可表达为

$$Q_1 = c_1 m_1 \Delta T \tag{17}$$

式中 ΔT ——物料加热前温度与加热至稳定状态下温度的差值,K

Q_1 ——物料加热升温吸收的热量,J

c_1 ——物料比热容,kJ/(kg·K)

m_1 ——物料质量,kg

导热率 λ 、比热容 c 、热扩散率 a 和密度 ρ 存在如下关系

$$c = \frac{\lambda}{a\rho} \tag{18}$$

联合式(17)和(18),得

$$Q_1 = \frac{\lambda_1}{a_1} V_1 \Delta T \tag{19}$$

式中 λ_1 ——物料固相导热率,W/(m·K)

a_1 ——物料热扩散率,m²/s

ρ_1 ——物料密度,kg/m³

V_1 ——物料体积,m³

2.2 循环热风具有的热量

物料温度稳定后,根据能量平衡定律,在不计热损失的条件下,热空气释放的热量等于多孔介质孔道内的吸收热量,即

$$Q_2 = \int_0^t c_2 m_2 dt \tag{20}$$

式中 c_2 ——热空气比热容,kJ/(kg·K)

m_2 ——热空气质量流量,kg/s

对式(20)进行积分得

$$Q_2 = c_2 v \rho_2 t \tag{21}$$

式中 ρ_2 ——热风密度,kg/m³

v ——热风速率,m/s

t ——时间,s

联合式(18)、(20)和(21),得

$$Q_2 = \frac{\lambda_2}{a_2} vt \frac{\pi D_f r_{\max}^2}{4 \frac{x}{x+y} (2 - D_f)} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{2 - D_f} \right] \tag{22}$$

式中 λ_2 ——气相导热率,W/(m·K)

a_2 ——气相热扩散率,m²/s

2.3 物料吸收的总热量

在时间 t 内物料吸收的总热量 Q 为温度上升阶段吸收热量与温度稳定阶段吸收热量之和,即

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{\lambda_2}{a_2} vt \frac{\pi D_f r_{\max}^2}{4 \frac{x}{x+y} (2 - D_f)} \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{2 - D_f} \right] + \frac{\lambda_1}{a_1} V_1 \Delta T \tag{23}$$

3 多孔介质的导热

多孔介质导热符合傅里叶导热定律

$$\lambda_{eff} = \frac{QL_y}{\Delta TA} \tag{24}$$

式中 λ_{eff} ——多孔介质有效热导率,W/(m·K)

因为热量通过物料的固体相和孔隙相,而这两相的结构特征不同,故导热路径不同,从而得出改进的傅里叶导热定律

$$\lambda_{eff} = \frac{QL_x}{\Delta TA_x} + \frac{QL_y}{\Delta TA_y} \tag{25}$$

联合式(10)、(13)、(14)和(23),得到多孔介质的有效热导率为

$$\lambda_{eff} = \left\{ \frac{\lambda_2 L_y vt}{a_2 \frac{x}{x+y} \Delta T} + \frac{4 \lambda_1 L_y V_1 (2 - D_f)}{a_1 \pi D_f r_{\max}^2 \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{2 - D_f} \right]} \right\} \cdot \left(L_y^{D_t - 1} k^{1 - D_t} + \frac{x}{y} \right) \tag{26}$$

把式(4)代入式(26),得

$$\lambda_{eff} = \left\{ \frac{\lambda_2 L_y vt}{\varepsilon a_2 \Delta T} + \frac{4 \lambda_1 L_y V_1 (2 - D_f)}{a_1 \pi D_f r_{\max}^2 \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{2 - D_f} \right]} \right\} \cdot \left(L_y^{D_t - 1} k^{1 - D_t} + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \tag{27}$$

4 分析和讨论

图2为氧化铝的有效热导率随孔隙率变化曲线与实验数据^[14]作比较。加热温度为300 K,空气热导率为0.040 38 W/(m·K),孔隙直径为0.31 mm。从图中可以看出,有效热导率随着孔隙率的增加而降低,降低速率逐渐减小。数值模拟结果与实验数据吻合较好,本文的方法可以用于计算多孔介质的有效热导率。通过数值方法计算材料等效热导率,并与已有的实验值进行比较,采用本文方法所生成的多孔介质不完全分形结构及等效热导率数值预测模型有效性均得到了较好地验证。本文的不完全分形结构可较好完成对实际多孔材料的结构重构,并且材料等效热导数值预测方法也能较好地预测热风加热的多孔材料等效热导率。可应用于加工木材、石油采热、井下换热器以及建材中挥发扩散市内甲醛污染等问题。

图3为3种面积分形维数的有效热导率随孔隙率变化的关系曲线。从图中可以看出,在同一孔隙

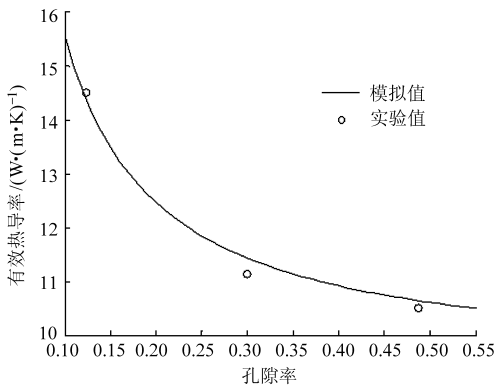


图 2 有效热导率的模拟数值与实验值比较
Fig.2 Comparison on effective thermal conductivity between numerical simulation and experimental data

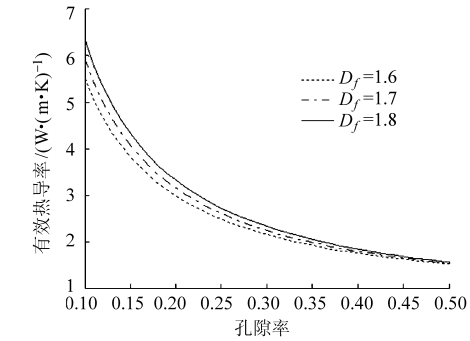


图 3 面积分形维数对有效热导率的影响
Fig.3 Effect of areal fractal dimension on effective thermal conductivity

率下,有效热导率随着面积分形维数的增加而减小;在同一面积分形维数下,有效热导率随着孔隙率的增加而减小。这是因为材料的分形维数增大,即材料的结构变复杂,内部的孔道更加迂曲多变,热量通过的时间变长,材料的热导率变小。空气热导率小于固相热导率,故孔隙率越大,有效热导率越大。

图 4 为孔的迂曲分形维数分别为 1.15、1.20 和 1.25 时,有效热导率随孔隙率的变化曲线。从图中可以看出,当孔隙率大于 0.3 时,有效热导率随着迂曲分形维数增加而减小的幅度下降,随着孔隙率增加而变化的幅度也明显下降。这是因为迂曲分形维数越大,热传导的距离越弯曲,距离越长,从而热阻越大,导致热导率下降明显。当孔隙率大于 0.3 时,有效热导率随迂曲分形维数、孔隙率下降而下降的幅度减小。原因是固相热导率大于空气热导率,所以孔隙率越大,有效热导率下降速率越小。

图 5 为热风温度分别取 320、330 和 340 K 时,

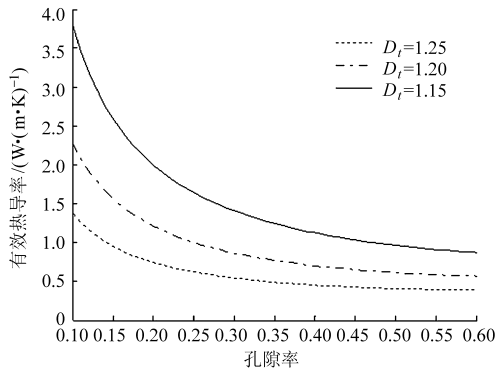


图 4 迂曲分形维数对有效热导率的影响
Fig.4 Effect of tortuosity fractal dimension on effective thermal conductivity

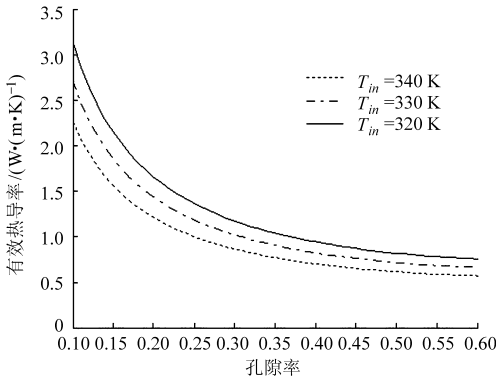


图 5 热风温度对有效热导率的影响
Fig.5 Effect of hot air temperature on effective thermal conductivity

有效热导率随孔隙率的变化。从图中可看出,热风温度对材料内部热量传递影响较大。在同一孔隙率下,有效热导率随温度的增加而减小,与文献[15]结论一致。在同一温度下,当孔隙率增大时有效热导率减小,且减小速率下降。

5 结论

- (1) 利用多孔介质的不完全分形结构特性建立了有效热导率模型,此模型中无假设热阻也无经验常数,可以真实地模拟多孔介质内部导热状态。
- (2) 研究了多孔介质迂曲分形维数和面积分形维数对物料导热过程的影响,面积分形维数越大,越阻碍热量的传递,结果发现迂曲分形维数的影响远大于面积分形维数。当孔隙率大于 0.3 时,有效热导率随着孔隙率减小的速度明显下降。
- (3) 热风温度越高,有效热导率越小,且热导率随着孔隙率增加而减小的速度下降。

参 考 文 献

1 苗恩铭,陈甦欣,牛鹏程,等.飞秒激光微加热加工中热熔化与热传递现象研究[J].农业机械学报,2011,42(4):224-228.
Miao Enxin, Chen Suxin, Niu Pengcheng, et al. Thermal diffusion and thermal melting in femtosecond laser micromachining[J].

Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(4): 224 – 228. (in Chinese)

2 Yang C, Nakayama A. A synthesis of tortuosity and dispersion in effective thermal conductivity of porous media[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2010, 53(15 – 16): 3222 – 3230.

3 赵晓琳. 多孔介质有效导热系数的算法研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2009.
Zhao Xiaolin. The research of effective thermal conductivity in the porous media[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2003. (in Chinese)

4 Wang Jianfeng, Carson J K, North M F, et al. A new structural model of effective thermal conductivity for heterogeneous materials with co-continuous phases[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2008, 51(9 – 10): 2389 – 2397.

5 余妙春. 基于分形理论的网状结构植物纤维材料导热系数研究[D]. 福建: 福建农林大学, 2011.
Yu Miaochun. Study of effective thermal conductivity of plant fiber materials with network structure based on fractal theory[D]. Fuzhou: Fujian Agriculture and Forestry University, 2011. (in Chinese)

6 Zhu Fanglong, Cui Shizhong, Gu Bohong. Fractal analysis for effective thermal conductivity of random fibrous porous materials[J]. Physics Letters A, 2010, 374(43): 4411 – 4414.

7 Kou Jianlong, Wu Fengmin, Lu Hangjun, et al. The effective thermal conductivity of porous media based on statistical self-similarity[J]. Physics Letters A, 2009, 374(1): 62 – 65.

8 Huai Xiulan, Wang Weiwei, Li Zhigang. Analysis of the effective thermal conductivity of fractal porous media[J]. Applied Thermal Engineering, 2007, 27(17 – 18): 2815 – 2821.

9 Dathe A, Thullner M. The relationship between fractal properties of solid matrix and pore space in porous media[J]. Geoderma, 2005, 129(3 – 4): 279 – 290.

10 Perrier E, Bird N, Rieu M. Generalizing the fractal model of soil structure: the pore-solid fractal approach[J]. Geoderma, 1999, 88(3 – 4): 137 – 164.

11 王康, 张仁铎, 王富庆. 基于不完全分形理论的土壤水分特征曲线模型[J]. 水利学报, 2004(5): 1 – 6.
Wang Kang, Zhang Renduo, Wang Fuqing. Model for estimating soil water retention based on incomplete fractal theory[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004(5): 1 – 6. (in Chinese)

12 Wang Q A. Incomplete information and fractal phase space[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 19(3): 639 – 644.

13 Perrier E M A, Bird N R A. Modelling soil fragmentation: the pore solid fractal approach[J]. Soil & Tillage Research, 2002, 64(1 – 2): 91 – 99.

14 张彪, 牛臣基, 王青青, 等. 二维多孔热密封材料的有效导热系数模拟[C]//中国工程热物理学会传热传质学术会议论文集, 2011.

15 林瑞泰. 多孔介质传热传质引论[M]. 北京: 新华出版社, 1995.

Thermal Conductivity Model of Incomplete Fractal Porous Media

Zhang Sai Chen Junruo Liu Meihong Liu Xianxi

(Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

Abstract: The porous media was divided into the fractal aggregation and the non fractal solid phase and pore phase, and a simplified cell model was made to show the microstructure. Porosity, areal fractal dimension, tortuosity fractal dimension, tortuosity, solid phase area and pore phase area of incomplete fractal porous were exhibited. The effective thermal conductivity was built combined with thermal energy and Fourier’s law of heat conduction during drying, thermal energy including the heat which required for solid phase during the drying and the heat coming from the circulating hot air. The model was not based on empirical formulas and assumed thermal resistance, and each symbol had definite physical meaning. The result showed that effective thermal conductivity had a negative correlation with the tortuosity fractal dimension, porosity, areal fractal dimension and hot air temperature, while it has a positive correlation with the hot air rate and time.

Key words: Incomplete fractal Effective thermal conductivity Porous media