

四次带参广义 Bézier 曲面构造与光滑拼接技术*

胡 钢^{1,2} 吉晓民¹ 郭 磊¹

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048; 2. 西安理工大学理学院, 西安 710054)

摘要: 基于一组带参数的四次广义 Bernstein 基函数, 构造了一种带多形状参数 λ, γ_i 的四次广义 Bézier 曲面, 该曲面不仅保留了传统 Bézier 曲面的性质, 而且具有优良的形状可调性, 同时还以四次 Bézier 曲面为其特殊情形; 其次, 详细分析了该曲面的一些基本性质, 以及讨论了该曲面的一些特殊退化曲面的构造; 最后, 为了解决造型设计中复杂曲面难以用单一曲面表示的问题, 进一步研究了该曲面的拼接技术, 推导了两相邻四次带参广义 Bézier 曲面片间 G^1 和 G^2 光滑拼接的几何条件, 并给出了具体的拼接步骤与几何造型实例。实例结果表明, 所提方法不仅简单有效且易实现, 可应用于工程复杂曲面的构造与外形设计中。

关键词: 四次广义 Bézier 曲面 形状参数 光滑拼接 曲面设计

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2014)05-0315-07

引言

曲线曲面的表示一直是 CAD /CAM 中一个重要的研究内容, 其中 Bézier 曲线曲面由于其结构简单、直观且具有许多优良的性质, 已成为 CAD /CAM 领域用于描述形状信息的主要工具之一。然而随着现代几何造型工业的发展, 传统 Bézier 与有理 Bézier 方法已难以满足几何造型中的各种需求, 为此学者们提出了许多非有理形式的带形状参数的 Bézier 曲线曲面^[1-8]。四次带参 Bézier 曲线曲面作为一种新颖的曲线曲面构造方法^[5], 在保留 Bézier 方法全部优点的基础上, 不仅具有优良的形状可调性, 而且其计算复杂度要远低于一些非代数多项式曲线^[1-4], 所以该方法在 CAD/CAM 中得到了广泛的应用^[9-11]。

为了进一步增强四次带参 Bézier 曲线的几何造型能力, 学者们研究了该曲线的一些相关技术, 如形状分析^[9]、光滑拼接^[10]、近似合并^[11]及可展曲面设计^[12]等。上述研究工作主要是针对四次带参 Bézier 曲线进行的, 而对其相关曲面的研究却相对较少。为此, 文献[5]用张量积方法构造了一种带形状参数的四次 Bézier 曲面, 而文献[10]则研究了该曲面 G^1 光滑拼接的几何条件。但是, 这种曲面存在缺点: 形状参数较少, 曲面形状可调性有限; 拼接条件仅限于 G^1 连续, 且设计复杂曲面的自由度太少, 有

一定的局限性。为了克服文献[5]中曲面的缺点, 本文构造一种带多个形状参数的四次广义 Bézier 曲面, 并使文献[5]中的曲面成为该曲面的一个特例。

1 带多形状参数的四次广义 Bézier 曲面

1.1 四次带参广义 Bernstein 基的定义

定义 1: 对任意 $t \in [0, 1]$, $\lambda \in [-3, 1]$, 称关于 t 的四次多项式

$$\begin{cases} b_{0,4}(t) = (1 - \lambda t)(1 - t)^3 \\ b_{1,4}(t) = (3 + \lambda - \lambda t)t(1 - t)^2 \\ b_{2,4}(t) = (3 + \lambda t)t^2(1 - t) \\ b_{3,4}(t) = (1 - \lambda + \lambda t)t^3 \end{cases} \quad (1)$$

为带参数 λ 的四次广义 Bernstein 基函数^[5]。

容易推出式(1)中的基函数具有与三次 Bernstein 基函数类似的性质, 如端点性质、权性和非负性等。特别当参数 λ 取值为 0 时, 上述四次带参广义 Bernstein 基便为三次 Bernstein 基函数。

1.2 四次带参广义 Bézier 曲面的定义

类似传统张量积 Bézier 曲面的构造, 文献[5, 10]在式(1)中基函数的基础上, 定义了双四次带参 Bézier 曲面

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_{i,4}(u; \lambda) b_{j,4}(v; \gamma) P_{i,j} \quad (0 \leq u, v \leq 1) \quad (2)$$

收稿日期: 2013-06-10 修回日期: 2013-07-06

* 国家自然科学基金资助项目(51305344)、国家自然科学基金重大研究计划培育项目(91120014)和陕西省教育厅基金资助项目(2013JK1029)

作者简介: 胡钢, 副教授, 博士生, 主要从事 CAGD/CAD/CAM、产品造型设计理论研究, E-mail: hg_xaut@xaut.edu.cn

通讯作者: 吉晓民, 教授, 主要从事机械设计与方法、CAD/CAM、产品造型与仿真研究, E-mail: jixiaomin@xaut.edu.cn

式中, $-3 \leq \lambda, \gamma \leq 1$, $b_{i,4}(u; \lambda)$ 、 $b_{j,4}(v; \gamma)$ 为由式(1)定义的分别含参数 λ 和 γ 的四次带参广义 Bernstein 基; $P_{i,j}(i, j=0, 1, 2, 3)$ 为曲面的控制网格顶点。

显然, 式(2)中的曲面含有形状参数 λ, γ , 通过修改参数可灵活修改曲面的形状。但是, 由于只带有 2 个形状参数使得该曲面的形状可调性十分有限。为此, 本文构造另一种带多形状参数的四次带参广义 Bézier 曲面, 其具体表达式如定义 2 所示。

定义 2: 若给定 4×4 个控制网格顶点阵列 $P_{i,j} \in R^3(i, j=0, 1, 2, 3)$, $\lambda, \gamma_i(i=0, 1, 2, 3)$ 为任意的实数, 且 $-3 < \lambda, \gamma_i \leq 1$, 则四次带参广义 Bézier 曲面定义为

$$S(u, v; \lambda, \gamma_i) = \sum_{i=0}^3 \left[b_{i,4}(u; \lambda) \sum_{j=0}^3 b_{j,4}(v; \gamma_i) P_{i,j} \right]$$

$(0 \leq u, v \leq 1)$

(3)

式中, $\lambda, \gamma_i(i=0, 1, 2, 3)$ 称为曲面的形状控制参数, 而 $b_{i,4}(u; \lambda)$ 、 $b_{j,4}(v; \gamma_i)(i, j=0, 1, 2, 3)$ 分别为由式(1)所定义的四次带参广义 Bernstein 基函数。显然, 由式(1)中基函数的性质, 易验证四次带参广义 Bézier 曲面具有优良的形状可调性, 通过修改形状参数可以灵活调整曲面的形状和实现多种(共 $3^5 - 1$ 种)逼近方式。若令参数 $\gamma_i(i=0, 1, 2, 3)$ 都相等, 四次带参广义 Bézier 曲面即为式(2)中的双四次带参 Bézier 曲面, 所以曲面式(2)是曲面式(3)的一个特例。

1.3 四次带参广义 Bézier 曲面的性质

根据四次带参广义 Bézier 曲面的定义, 可以推出该曲面具有如下性质:

性质 1: 边角点性质。四次带参广义 Bézier 曲面的 4 个角点插值于曲面控制网格的 4 个角点, 即

$$S(0, 0; \lambda, \gamma_i) = P_{0,0} \quad S(0, 1; \lambda, \gamma_i) = P_{0,3}$$
$$S(1, 0; \lambda, \gamma_i) = P_{3,0} \quad S(1, 1; \lambda, \gamma_i) = P_{3,3}$$

且剩余 12 个控制网格顶点一般不在曲面上。

性质 2: 边界性质。四次带参广义 Bézier 曲面的 4 条边界曲线分别是由控制网格最外一圈控制顶点定义的 4 条四次带参广义 Bézier 曲线, 即

$$\left\{ \begin{aligned} S(u, 0) &= \sum_{i=0}^3 b_{i,4}(u; \lambda) P_{i,0} \\ S(u, 1) &= \sum_{i=0}^3 b_{i,4}(u; \lambda) P_{i,3} \\ S(0, v) &= \sum_{j=0}^3 b_{j,4}(v; \gamma_0) P_{0,j} \\ S(1, v) &= \sum_{j=0}^3 b_{j,4}(v; \gamma_3) P_{3,j} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

且修改控制网格的内部顶点不会影响到 4 条边界曲线的位置和形状。

性质 3: 凸包性。四次带参广义 Bézier 曲面位于其控制网格的凸包之内, 且曲面的凹凸形状与控制网格的凹凸对应, 该性质可由四次带参广义 Bernstein 基函数的权性和非负性得到。

性质 4: 变差缩减性和保凸性。

性质 5: 极限性质。即当 $\lambda, \gamma_i(i=0, 1, 2, 3)$ 趋于零时, 四次带参广义 Bézier 曲面收敛于双四次 Bézier 曲面, 该性质可由式(1)中基函数的极限性质证明。

2 特殊四次带参广义 Bézier 曲面的构造

当四次带参广义 Bézier 曲面的控制网格顶点有 1 排或多排控制顶点重合时, 曲面边界曲线的条数和边角点的个数均会发生变化。

2.1 三角曲面的生成

根据 1.3 节中四次带参广义 Bézier 曲面的边界性质可知, 当曲面控制网格外围有 1 排控制顶点重合时, 该曲面的某一条边界曲线便退化为一个点(即重合的控制顶点), 从而使得四次带参广义 Bézier 曲面变成了一种三角曲面, 即含有 3 个角点、3 条边界曲线的曲面。图 1 给出了曲面控制网格外围有 1 排控制顶点重合的示意图。图 1 中, 黑圆点表示曲面的 16 个初始控制网格顶点, 黑菱形点表示曲面控制网格右侧 1 排 4 个控制顶点重合后的顶点。

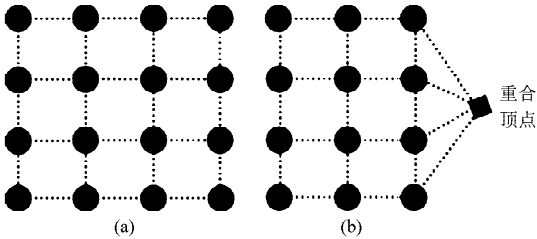


图 1 控制网格外围有 1 排顶点重合的示意图

Fig. 1 Superposition of a row of outer control points
(a) 曲面初始控制网格 (b) 1 排顶点重合的控制网格

图 2 给出了当有 1 排控制网格顶点重合时的三角四次带参广义 Bézier 曲面。对于曲面控制网格外围其他 3 排控制顶点重合时的情形, 可以类似地生成相应的三角曲面。

此外, 特别当曲面控制网格外围有相邻 2 排控制顶点各自重合时, 四次带参广义 Bézier 曲面则变成一种特殊的三角曲面, 该三角曲面有 1 条边界曲线为直线段。图 3 给出了曲面控制网格外围有相邻 2 排控制顶点各自重合的示意图, 图 3 中黑圆点和黑菱形点含意与图 2 相同。类似地, 当控制网格外

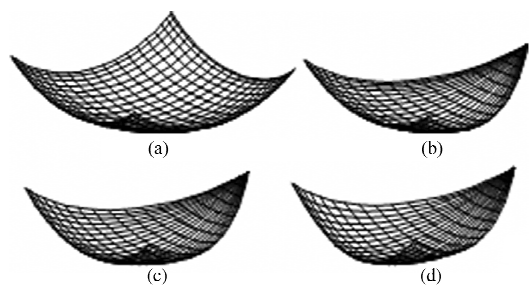


图 2 带不同形状参数的三角曲面

Fig. 2 Triangular surfaces with different shape parameters
(a) 四角曲面($\lambda = -2, \gamma_i = -3$) (b) 三角曲面($\lambda = -2, \gamma_i = -3$)
(c) 三角曲面($\lambda = -1, \gamma_i = -3$) (d) 三角曲面($\lambda = 0, \gamma_i = -3$)

围有 3 排或 4 排控制顶点各自重合时,四次带参广义 Bézier 曲面变成了另一种特殊的三角曲面,该三角曲面一定有 2 条边界曲线均为直线段,该情况下控制顶点各自重合的示意图如图 4 所示。显然,只要使图 4a 中左侧 2 个控制顶点、上面的重合顶点以及下面的重合顶点 4 点共线,或使图 4b 中左侧的、上面的以及下面的重合顶点 3 点共线,就可以生成 3 条边界曲线均为直线段的特殊三角曲面。

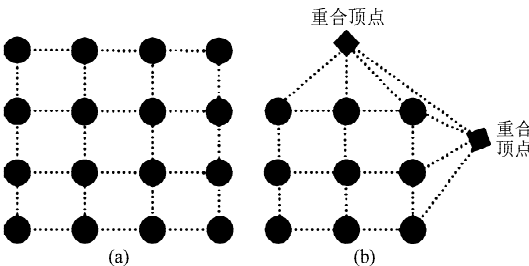


图 3 相邻 2 排控制顶点各自重合的示意图

Fig. 3 Respective superposition of two rows of adjacent outer control points
(a) 曲面初始控制网格 (b) 2 排顶点重合的控制网格

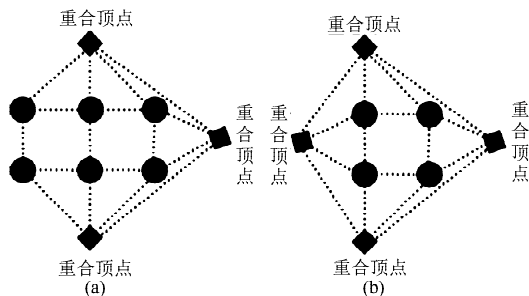


图 4 相邻 3 排或 4 排控制顶点各自重合的示意图

Fig. 4 Respective superposition of three or four rows of adjacent outer control points
(a) 3 排顶点重合的控制网格 (b) 4 排顶点重合的控制网格

2.2 二角曲面的生成

同理,由四次带参广义 Bézier 曲面的边界性质可知,当曲面控制网格外围有不相邻 2 排控制顶点各自重合时,该曲面有 2 条边界曲线都各自退化为

一个点(即重合的控制顶点),从而使得四次带参广义 Bézier 曲面变成一种二角曲面,即含有 2 个角点、2 条边界曲线的曲面。图 5 给出了曲面控制网格外围有不相邻 2 排控制顶点重合的示意图,而图 6 则给出了这种情况下的二角四次带参广义 Bézier 曲面。

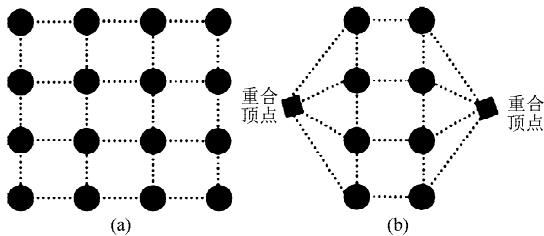


图 5 控制网格外围有不相邻 2 排顶点重合的示意图

Fig. 5 Respective superposition of two rows of nonadjacent outer control points
(a) 曲面初始控制网格 (b) 2 排顶点重合的控制网格

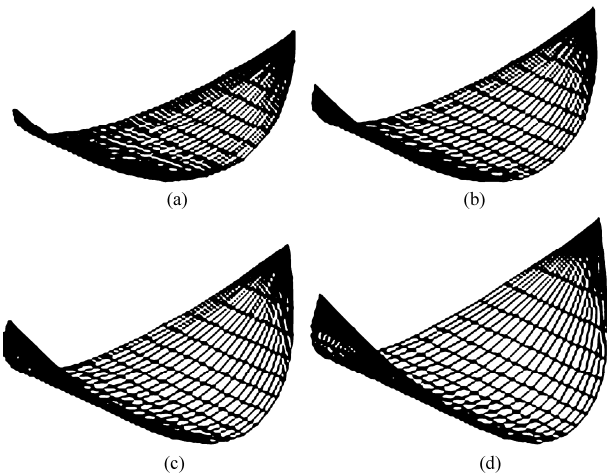


图 6 带不同形状参数的二角曲面

Fig. 6 Biangular surfaces with different shape parameters
(a) 二角曲面($\lambda = -1, \gamma_i = -2$) (b) 二角曲面($\lambda = -1, \gamma_i = -1$)
(c) 二角曲面($\lambda = -1, \gamma_i = 0$) (d) 二角曲面($\lambda = -1, \gamma_i = 1$)

3 四次带参广义 Bézier 曲面的拼接

实际应用中,曲面片间需要达到 G^1 连续拼接,即拼接曲面在公共边界处有相同的切平面或曲面法线^[10, 13-16]。特别在一些要求较高的场合,曲面片还应该达到 G^2 连续拼接,即满足曲率连续^[15-16]。为了讨论方便,假设待拼接的 2 张由式(3)定义的四次广义 C-Bézier 曲面为

$$\begin{cases} S_1(u, v; \lambda_1, \gamma_i^1) = \sum_{i=0}^3 \left[b_{i,4}(u; \lambda_1) \sum_{j=0}^3 b_{j,4}(v; \gamma_i^1) P_{i,j}^1 \right] \\ S_2(u, v; \lambda_2, \gamma_i^2) = \sum_{i=0}^3 \left[b_{i,4}(u; \lambda_2) \sum_{j=0}^3 b_{j,4}(v; \gamma_i^2) P_{i,j}^2 \right] \end{cases} \quad (5)$$

式中, $P_{i,j}^1$ 、 $P_{i,j}^2$ 分别为 S_1 和 S_2 的控制网格顶点。

由于曲面有方向性,所以存在 3 种形式的拼接: u 向与 u 向拼接、 u 向与 v 向拼接以及 v 向与 v 向拼接。

3.1 曲面片的 G¹连续拼接

定理 1:如果两相邻四次带参广义 Bézier 曲面片 $S_1(u,v;\lambda_1,\gamma_1^1)$ 和 $S_2(u,v;\lambda_2,\gamma_2^2)$ 满足

$$\begin{cases} P_{i,3}^1 = P_{i,0}^2 & (i=0,1,2,3) \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1}{3 + \gamma_i^2} = f \frac{P_{i,1}^2 - P_{i,0}^2}{3 + \gamma_i^1} & (i=0,1,2,3) \end{cases} \quad (6)$$

同时成立,则曲面片 S_1 和 S_2 在公共边界处达到 u 向与 u 向 G^1 连续拼接。式中, f 为大于 0 的实常数。

证明:式(5)中 2 张曲面片要满足 G^1 连续,首先要求它们之间满足 G^0 连续(也称位置连续,亦有一条公共边界线),即

$$\sum_{i=0}^3 b_{i,4}(u;\lambda_1)P_{i,3}^1 = \sum_{i=0}^3 b_{i,4}(u;\lambda_2)P_{i,0}^2 \quad (7)$$

再根据式(1)中基函数的定义和对比多项式曲线各幂项系数,可将式(7)进一步化简为

$$\begin{cases} P_{i,3}^1 = P_{i,0}^2 & (i=0,1,2,3) \\ \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \quad (8)$$

其次,还要求 2 张四次带参广义 Bézier 曲面片在公共边界处有相同的切平面(即边界上的法矢方向连续),所以数学上应该满足^[10,13-16]

$$\frac{\partial}{\partial v}S_1(u,1;\lambda_1,\gamma_i^1) \times \frac{\partial}{\partial u}S_1(u,1;\lambda_1,\gamma_i^1) = f(u) \frac{\partial}{\partial v}S_2(u,0;\lambda_2,\gamma_i^2) \times \frac{\partial}{\partial u}S_2(u,0;\lambda_2,\gamma_i^2) \quad (9)$$

式中, $f(u) > 0$ 表示 2 张曲面片在公共边界处法矢模的比例因子。实际应用中,可采用 Faux 和 Pratt 的方法^[10,13-15]将式(9)简化为

$$\frac{\partial}{\partial v}S_1(u,1;\lambda_1,\gamma_i^1) = f \frac{\partial}{\partial v}S_2(u,0;\lambda_2,\gamma_i^2) \quad (10)$$

最后,计算式(5)中两曲面片 S_1 和 S_2 关于 v 向的跨界切矢量,代入式(10)中可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 (3 + \gamma_i^1) b_{i,4}(u;\lambda_1) (P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1) = \\ f \sum_{i=0}^3 (3 + \gamma_i^2) b_{i,4}(u;\lambda_2) (P_{i,1}^2 - P_{i,0}^2) \end{aligned} \quad (11)$$

并结合式(8)中的结论,将式(11)进一步整理为

$$\frac{P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1}{3 + \gamma_i^2} = f \frac{P_{i,1}^2 - P_{i,0}^2}{3 + \gamma_i^1} \quad (i=0,1,2,3) \quad (12)$$

综上所述,如果两曲面片 S_1 和 S_2 满足式(8)和式(12),则它们在公共边界处达到了 u 向与 u 向 G^1 连续拼接,从而定理 1 得证。

此外,当定理 1 中所有的形状参数都取值为 0 时,定理 1 中的拼接条件便退化为双三次 Bézier 曲面 G^1 连续拼接的条件;若满足 $\gamma_0^1 = \gamma_1^1 = \gamma_2^1 = \gamma_3^1$ 和 $\gamma_0^2 = \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2$,则定理 1 中的拼接条件退化为文献[9]中的结论。

类似于曲面 u 向与 u 向 G^1 光滑拼接,对于两相邻曲面片 S_1 和 S_2 的 u 向与 v 向 G^1 拼接以及 v 向与 v 向 G^1 拼接,同理可得如下的结论。

定理 2:如果两相邻四次带参广义 Bézier 曲面片 $S_1(u,v;\lambda_1,\gamma_1^1)$ 和 $S_2(u,v;\lambda_2,\gamma_2^2)$ 满足

$$\begin{cases} P_{i,3}^1 = P_{0,j}^2 & (i=j=0,1,2,3) \\ \lambda_1 = \gamma_0^2 = \gamma_1^2 \\ \frac{P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1}{3 + \lambda_2} = f \frac{P_{1,j}^2 - P_{0,j}^2}{3 + \gamma_i^1} & (i=j=0,1,2,3) \end{cases} \quad (13)$$

同时成立,则曲面片 S_1 和 S_2 在公共边界处达到 u 向与 v 向 G^1 连续拼接。

定理 3:如果两相邻四次带参广义 Bézier 曲面片 $S_1(u,v;\lambda_1,\gamma_1^1)$ 和 $S_2(u,v;\lambda_2,\gamma_2^2)$ 满足

$$\begin{cases} P_{3,j}^1 = P_{0,j}^2 & (j=0,1,2,3) \\ \gamma_2^1 = \gamma_3^1 = \gamma_0^2 = \gamma_1^2 \\ \frac{P_{3,j}^1 - P_{2,j}^1}{3 + \lambda_2} = f \frac{P_{1,j}^2 - P_{0,j}^2}{3 + \lambda_1} & (j=0,1,2,3) \end{cases} \quad (14)$$

同时成立,则曲面片 S_1 和 S_2 在公共边界处达到 v 向与 v 向 G^1 连续拼接。

3.2 曲面片的 G²连续拼接

定理 4:如果两相邻四次带参广义 Bézier 曲面片 $S_1(u,v;\lambda_1,\gamma_1^1)$ 和 $S_2(u,v;\lambda_2,\gamma_2^2)$ 满足

$$\begin{cases} P_{i,3}^1 = P_{i,0}^2 & (i=0,1,2,3) \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \frac{P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1}{3 + \gamma_i^2} = f \frac{P_{i,1}^2 - P_{i,0}^2}{3 + \gamma_i^1} & (i=0,1,2,3) \\ (1 + \gamma_i^1) (P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1) - (P_{i,2}^1 - P_{i,1}^1) = \\ f^2 [(1 + \gamma_i^2) (P_{i,0}^2 - P_{i,1}^2) - (P_{i,1}^2 - P_{i,2}^2)] & \\ & (i=0,1,2,3) \end{cases} \quad (15)$$

同时成立,则曲面片 S_1 和 S_2 在公共边界处达到 u 向与 u 向 G^2 连续拼接。

证明:曲面 S_1 与 S_2 要达到 u 向与 u 向 G^2 连续拼接,首先要求两曲面在公共边界处达到 G^1 连续,即其控制顶点和形状参数要满足式(6)中的条件。

其次,在满足 G^1 连续条件的基础上,还应沿公共边界线在所有方向都具有公共的法曲率或一致杜

潘标线^[15-16]。所以,在公共边界处还应满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v^2} S_1(u, 1; \lambda_1, \gamma_i^1) &= f^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} S_2(u, 0; \lambda_2, \gamma_i^2) + \\ &2fg(u) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} S_2(u, 0; \lambda_2, \gamma_i^2) + \\ &g^2(u) \frac{\partial^2}{\partial u \partial u} S_2(u, 0; \lambda_2, \gamma_i^2) + \\ &c \frac{\partial}{\partial v} S_2(u, 0; \lambda_2, \gamma_i^2) + d(u) \frac{\partial}{\partial u} S_2(u, 0; \lambda_2, \gamma_i^2) \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $g(u)$ 、 $d(u)$ 均是 u 的线性函数, c 为任意常数。而在实际应用中为了简化计算和便于操作,通常取 $g(u) = d(u) = c = 0$ ^[14-15], 从而可将式(16)进一步简化为

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} S_1(u, 1; \lambda_1, \gamma_i^1) = f^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} S_2(u, 0; \lambda_2, \gamma_i^2) \quad (17)$$

最后,计算式(17)中等号两边的二阶跨界切矢量并代入式(17)可得

$$\begin{aligned} 6 \sum_{i=0}^3 b_{i,4}(u; \lambda_1) [P_{i,1}^1 - (2 + \gamma_i^1) P_{i,2}^1 + (1 + \gamma_i^1) P_{i,3}^1] = \\ 6f^2 \sum_{i=0}^3 b_{i,4}(u; \lambda_2) [P_{i,2}^2 - (2 + \gamma_i^2) P_{i,1}^2 + (1 + \gamma_i^2) P_{i,0}^2] \end{aligned} \quad (18)$$

并结合式(6)中的结论,将式(18)进一步整理为

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_i^1) (P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1) - (P_{i,2}^1 - P_{i,1}^1) = \\ f^2 [(1 + \gamma_i^2) (P_{i,0}^2 - P_{i,1}^2) - (P_{i,1}^2 - P_{i,2}^2)] \\ (i = 0, 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (19)$$

综上所述,如果两曲面片 S_1 和 S_2 满足式(6)和式(19),则它们在公共边界处达到了 u 向与 u 向 G^2 连续拼接,从而定理 4 得证。同理可得 u 向与 v 向以及 v 向与 v 向 G^2 拼接的条件。

定理 5: 如果两相邻四次带参广义 Bézier 曲面片 $S_1(u, v; \lambda_1, \gamma_i^1)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_2, \gamma_i^2)$ 满足

$$\begin{cases} P_{i,3}^1 = P_{0,j}^2 & (i = j = 0, 1, 2, 3) \\ \lambda_1 = \gamma_0^2 = \gamma_1^2 = \gamma_2^2 \\ \frac{P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1}{3 + \lambda_2} = f \frac{P_{1,j}^2 - P_{0,j}^2}{3 + \gamma_i^1} & (i = j = 0, 1, 2, 3) \\ (1 + \gamma_i^1) (P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1) - (P_{i,2}^1 - P_{i,1}^1) = \\ f^2 [(1 + \lambda_2) (P_{0,j}^2 - P_{1,j}^2) - (P_{1,j}^2 - P_{2,j}^2)] \\ (i = j = 0, 1, 2, 3) \end{cases} \quad (20)$$

同时成立,则曲面片 S_1 和 S_2 在公共边界处达到 u 向与 v 向 G^2 连续拼接。

定理 6: 如果两相邻四次带参广义 Bézier 曲面片 $S_1(u, v; \lambda_1, \gamma_i^1)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_2, \gamma_i^2)$ 满足

$$\begin{cases} P_{3,j}^1 = P_{0,j}^2 & (j = 0, 1, 2, 3) \\ \gamma_1^1 = \gamma_2^1 = \gamma_3^1 = \gamma_0^2 = \gamma_1^2 = \gamma_2^2 \\ \frac{P_{3,j}^1 - P_{2,j}^1}{3 + \lambda_2} = f \frac{P_{1,j}^2 - P_{0,j}^2}{3 + \lambda_1} & (j = 0, 1, 2, 3) \\ (1 + \lambda_1) (P_{i,3}^1 - P_{i,2}^1) - (P_{i,2}^1 - P_{i,1}^1) = \\ f^2 [(1 + \lambda_2) (P_{0,j}^2 - P_{1,j}^2) - (P_{1,j}^2 - P_{2,j}^2)] \\ (j = 0, 1, 2, 3) \end{cases} \quad (21)$$

同时成立,则曲面片 S_1 和 S_2 在公共边界处达到 v 向与 v 向 G^2 连续拼接。

3.3 曲面拼接步骤与实例

利用四次带参广义 Bézier 曲面优良的形状可调性及其光滑拼接的条件,可以方便设计各种造型复杂的组合曲面。本节以四次带参广义 Bézier 曲面 u 向与 u 向 G^2 拼接为例,其他 2 个方向的拼接可类似讨论。根据 3.2 节中的结论,可得 2 张四次带参广义 Bézier 曲面 u 向与 u 向 G^2 连续拼接的步骤为:

(1) 自由给定初始曲面 $S_1(u, v; \lambda_1, \gamma_i^1)$ 的形状参数 λ_1, γ_i^1 和控制网格顶点 $P_{i,j}^1 (i, j = 0, 1, 2, 3)$ 。

(2) 令 $P_{i,3}^1 = P_{i,0}^2 (i = 0, 1, 2, 3)$ 以及 $\lambda_1 = \lambda_2$, 使得 $S_1(u, v; \lambda_1, \gamma_i^1)$ 和 $S_2(u, v; \lambda_2, \gamma_i^2)$ 具有一条公共的边界线。

(3) 给定形状参数 γ_i^2 和常数 $f > 0$, 然后在步骤(2)的基础上再由式(12)计算出 $S_2(u, v; \lambda_2, \gamma_i^2)$ 的第 2 排控制网格顶点 $P_{i,1}^2 (i = 0, 1, 2, 3)$ 。

(4) 在步骤(2)、(3)的基础上,根据式(19)计算出曲面 $S_2(u, v; \lambda_2, \gamma_i^2)$ 的第 3 排控制网格顶点 $P_{i,2}^2 (i = 0, 1, 2, 3)$ 。

(5) 自由给定曲面 $S_2(u, v; \lambda_2, \gamma_i^2)$ 剩余的 1 排控制网格顶点 $P_{i,3}^2 (i = 0, 1, 2, 3)$, 即可实现两相邻曲面间的 u 向与 u 向 G^2 光滑拼接。

显然,反复利用上述拼接步骤还可以实现多片(2 片以上)四次带参广义 Bézier 曲面间的 G^2 拼接。可以类似给出曲面间 G^1 拼接的步骤,这里不再赘述。图 7 给出了 2 张四次带参广义 Bézier 曲面间 G^1 光滑拼接的实例(采用不同颜色的曲面区分)。从拼接结果可以看出,2 张曲面片在公共的边界处过渡自然、光滑,达到了很好的拼接效果。更重要的是,本文方法可以通过调整形状参数修改拼接后曲面的形状,同时不会影响到拼接曲面的光滑程度。

图 8 给出了用 4 张相邻四次带参广义 Bézier 曲面片光滑拼接生成“桌布”曲面造型的实例。

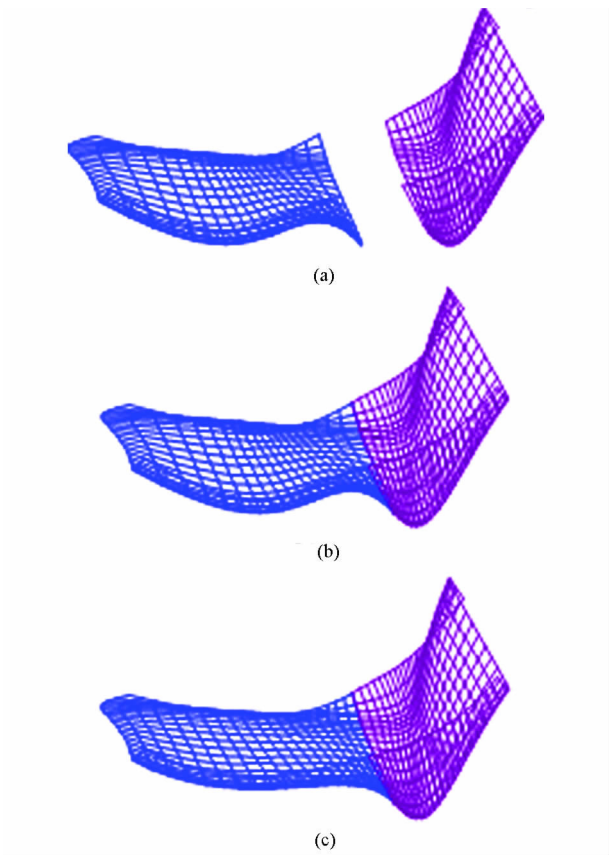


图 7 四次带参广义 Bézier 曲面的 G^1 光滑拼接结果
Fig.7 G^1 continuity condition between two adjacent quartic generalized Bézier surfaces
(a) 拼接前的 2 张曲面片 (b) 拼接后的光滑组合曲面
(c) 修改参数后的光滑组合曲面

图 9 给出了一个设计“帐篷”曲面造型的实例，图 9 中整个“帐篷”曲面是由 6 张四次带参广义 Bézier 曲面片相互光滑拼接而成的。从图 8、9 中可以看出，多张(2 张以上)四次带参广义 Bézier 曲面片在公共边界处的拼接效果也非常自然、光滑，且拼接后的组合曲面具有较多的自由度和较强的形状可调性。

4 结束语

构造了一种带多形状参数的四次广义 Bézier 曲面，分析了该曲面的基本性质并讨论了该曲面的特殊退化曲面的构造。这种曲面不仅保留传统 Bézier 曲面类似的性质，而且具有更加优良的形状可调性和逼近性。为了解决四次带参广义 Bézier 曲面造型中复杂曲面的设计问题，进一步研究了该曲面的

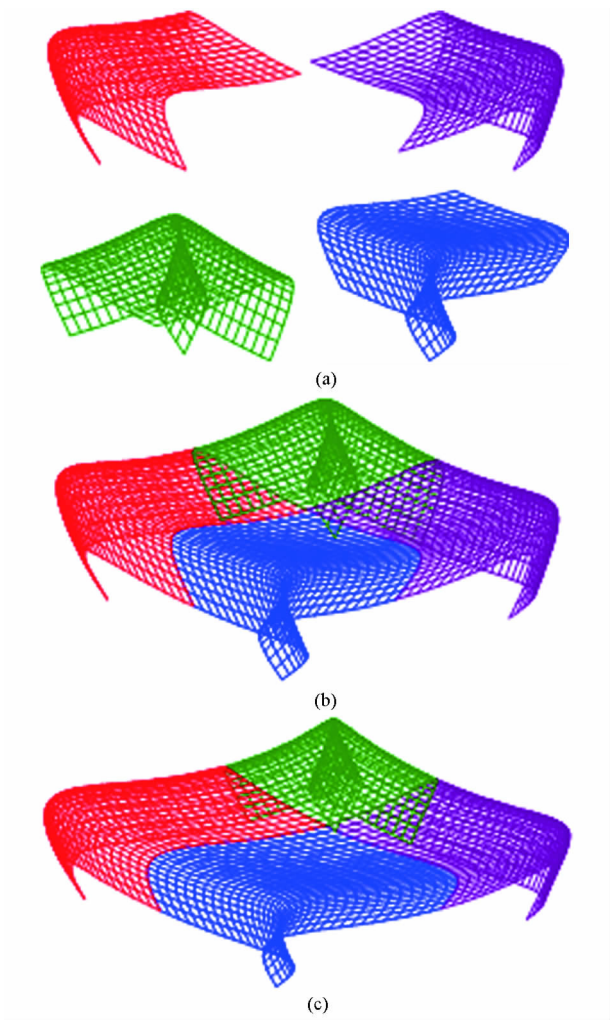


图 8 4 张四次带参广义 Bézier 曲面片的光滑拼接
Fig.8 Continuity conditions among four adjacent quartic generalized Bézier surfaces
(a) 拼接前的 4 张曲面片 (b) 拼接后的光滑组合曲面
(c) 修改参数后的光滑组合曲面

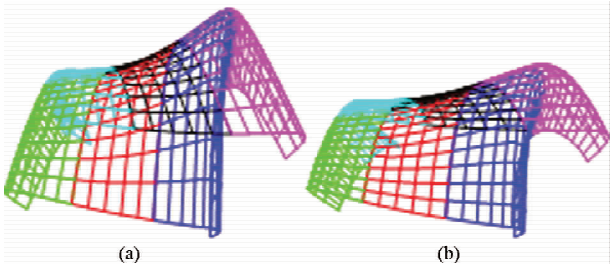


图 9 “帐篷”曲面造型实例
Fig.9 Designed surface graph of tent
(a) 拼接生成的“帐篷”曲面 (b) 修改参数后的“帐篷”曲面

G^1 、 G^2 连续拼接的条件。造型实例表明本文方法有效、易实现，可以用来设计多种不同的复杂曲面。

参 考 文 献

1 Chen Q Y, Wang G Z. A class of Bézier-like curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 29 – 39.
2 Oruc H, Phillips G H. q-Bernstein polynomials and Bézier curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(1): 1 – 12.
3 丁敏, 汪国昭. 基于三角和代数多项式的 T-Bézier 曲线[J]. 计算机学报, 2004, 27(8): 1021 – 1026.

4 檀结庆, 王燕, 李志明. 三次 H-Bézier 曲线的分割、拼接及其应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(5): 584 – 588.
Tan Jieqing, Wang Yan, Li Zhiming. Subdivision algorithm, connection and applications of cubic H-Bézier curves[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(5): 584 – 588. (in Chinese)

5 吴晓勤, 韩旭里. 三次 Bézier 曲线的扩展[J]. 工程图学学报, 2005, 26(6): 98 – 102.
Wu Xiaoqin, Han Xuli. Extension of cubic Bézier curve[J]. Journal of Engineering Graphics, 2005, 26(6): 98 – 102. (in Chinese)

6 Han X, Ma Y, Huang X. A novel generalization of Bézier curve and surface[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217(1): 180 – 193.

7 Han X, Ma Y, Huang X. The cubic trigonometric Bezier curve with two shape parameters[J]. Applied Mathematic Letters, 2009, 22(3): 226 – 231.

8 陈军, 周联. 两类带两个形状参数的三角 Quasi-Bézier 曲面[J]. 农业机械学报, 2013, 44(6): 263 – 268.
Chen Jun, Zhou Lian. Two kinds of triangular Quasi-Bézier surfaces with two shape parameters[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(6): 263 – 268. (in Chinese)

9 吴荣军, 彭国华, 罗卫民, 等. 四次带参 Bézier 曲线的形状分析[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(6): 725 – 729.

10 胡钢, 戴芳, 秦新强, 等. 四次带参 Bézier 曲线曲面的光滑拼接[J]. 上海交通大学学报, 2010, 44(11): 1481 – 1485.
Hu Gang, Dai Fang, Qin Xinqiang, et al. On continuity conditions for quartic Bézier curves and surfaces with shape parameters [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2010, 44(11): 1481 – 1485. (in Chinese)

11 胡钢, 段献葆, 秦新强, 等. 4 次 λ -Bézier 曲线的近似合并算法[J]. 华中科技大学学报, 2011, 37(9): 45 – 49.
Hu Gang, Duan Xianbao, Qin Xinqiang, et al. Approximate merging of a pair of quartic λ -Bézier curves with shape parameters [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 2011, 37(9): 45 – 49. (in Chinese)

12 胡钢, 吉晓民, 秦新强, 等. 四次带参 Bézier 可展曲面的设计[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(4): 601 – 606.
Hu Gang, Ji Xiaomin, Qin Xinqiang, et al. Geometric design and adjustment of shape for developable quartic λ -Bézier surfaces with shape parameters[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2012, 46(4): 601 – 606. (in Chinese)

13 李鹏, 李原, 刘平, 等. C-B 样条曲线及曲面的光滑拼接与应用[J]. 西北工业大学学报, 2007, 25(6): 890 – 895.
Li Peng, Li Yuan, Liu Ping, et al. On continuity conditions for C-B-spline curves and surfaces[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2007, 25(6): 890 – 895. (in Chinese)

14 胡钢, 秦新强, 韩西安, 等. 拟三次 Bézier 曲线曲面的拼接技术[J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(11): 46 – 50, 60.
Hu Gang, Qin Xiqiang, Han Xi'an, et al. Continuity conditions for cubic quasi-Bézier curves and surfaces[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2010, 44(11): 46 – 50, 60. (in Chinese)

15 Farin G. Curves and surfaces for CAGD: a practical guide fifth edition[M]. San Diego: Academic Press, 2002:367 – 376.

16 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001:195 – 208.

Quartic Generalized Bézier Surfaces with Multiple Shape Parameters and Its Continuity Conditions

Hu Gang^{1,2} Ji Xiaomin¹ Guo Lei¹
(1. Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China
2. School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: A new geometric model of quartic generalized Bézier surfaces with multiple shape parameters was constructed by using a class of quartic generalized Bernstein basis functions. The proposed quartic generalized Bézier surfaces inherit the outstanding properties of conventional Bézier Surfaces, have a good performance on adjusting their shapes by changing shape control parameters, and have quartic Bézier surfaces as their special cases. Some basic properties of the surfaces were analyzed, and the constructions of some special surfaces degenerated from the generalized surfaces were discussed. With the aim to tackle the problem that the engineering complex surfaces can not be constructed by a single surface, the continuity conditions of quartic generalized Bézier surfaces with shape parameter were investigated. Based on the analysis of the basis functions, the conditions of G^1 and G^2 continuity between two adjacent quartic generalized Bézier surfaces and the detail process to blend the two surfaces were proposed. In addition, some applications of the quartic generalized Bézier surfaces in geometric modeling were discussed. The modeling examples show that the proposed method is effective and easy to implement and has extensive applications in constructing engineering complex surface.

Key words: Quartic generalized Bézier surfaces Shape parameter Continuity conditions Surfaces design