doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2014.05.043

柔顺关节并联机器人动力学建模与控制研究*

田　浩　余跃庆

（北京工业大学机械工程与应用电子技术学院，北京 100124）

摘要：对具有大范围运动特性的柔顺关节并联机器人开展了动力学建模、特性分析、控制策略设计及动态性能分析等研究。基于伪刚体法，研究柔顺关节特性，建立含大变形柔顺关节的系统模型，应用拉格朗日方法建立了系统动力学方程。为补偿柔顺关节引起的系统振动、未建模动态以及惯性参数摄动造成的模型误差，设计趋近律滑模控制策略并证明了其稳定性。仿真结果验证了动力学模型和控制策略的有效性。

关键词：柔顺关节　并联机器人　动力学　趋近律滑模控制

中图分类号：TH112；TP242　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2014)05-0278-06

引言

并联机器人具有刚度大、精度高、承载能力强等优点[1]，广泛应用于航空航天、医疗器械、数控机床以及精密定位等领域。目前，并联机器人多以刚性运动副传递运动，因结构特点，不可避免地存在间隙、摩擦、冲击以及加工和安装误差等问题，在系统低速运行时，影响尚不明显，但随着现代机械向高速、精密方向发展，上述问题将对系统精度和安全性造成严重影响。为改善系统性能，Flores[2]从模型角度，建立含运动副间隙的系统动力学模型，较准确的反映了间隙机构的动态特性；文献[3－4]从控制角度，研究了不同控制方法对改善系统性能所做出的贡献。但无论从控制或是建模角度，都无法从根本上消除运动副存在的诸多问题。而柔顺机构因其利用机构中构件自身的柔性变形传递力和运动[5]，避免了间隙和冲击等问题的产生。将其应用于并联机器人中进行传动，将从根本上消除传统运动副的固有缺陷。

并联微动机器人是由柔顺关节和并联机器人相结合产生的高精密系统，已在生物医疗及微细操作等领域获得应用[6]。文献[7－13]开展了构型综合、运动学及动力学等方面的研究。但微动系统多由压电陶瓷驱动，柔顺关节的变形很小，工作空间一般为微纳米级别，模型建立、特性分析、性能优化及控制策略的研究方法方面都与具有宏观大范围运动特性的并联机器人存在明显区别。

针对现有柔顺关节仅可以实现微小变形的缺点，文献[14－15]设计出可以实现宏观尺度变形的柔顺关节，但局限于构型设计及运动性能分析。文献[16－17]将大变形柔顺关节应用于并联机器人中，验证了使用柔顺关节实现宏观大范围运动的可行性，但相关理论建模、特性分析、控制策略设计及控制系统开发等问题具有较大难度，尚缺少相关深入的研究工作，而此项研究对于提升系统性能具有重要意义。

本文以具有宏观大范围运动特性的平面三自由度柔顺关节并联机器人为研究对象，基于伪刚体法，建立含大变形柔顺关节的系统模型，应用拉格朗日方法建立系统动力学方程，分析柔顺关节对系统性能的影响，设计趋近律滑模控制策略并进行仿真研究。

1　系统模型

研究的平面三自由度柔顺关节并联机器人系统的机构示意图如图1a所示，图1b为机器人系统使用的开槽薄壁柔顺关节[17]，该柔顺关节能够有效降低运动过程中轴线的变形和漂移，扭转角度较大，且轴向刚度较小，而非轴向刚度较大，运动学及静力学性能与传统转动副非常相似，但消除了传统运动副具有的间隙、摩擦等缺陷。本文使用开槽薄壁柔顺关节，保证系统的运动及静力学性能，在此基础上，

收稿日期：2013－12－24　修回日期：2014－01－13

*国家自然科学基金资助项目(51175006)、北京市教委青年拔尖人才培育计划资助项目、北京工业大学青年导师国际化能力发展计划资助项目(2014－03)和北京工业大学第12届研究生科技基金资助项目(ykj－2013－10018)

作者简介：田浩，博士生，主要从事柔顺关节并联机器人规划及控制研究，E-mail：tankthwd@emails.bjut.edu.cn

通讯作者：余跃庆，教授，博士生导师，主要从事机构学及机器人学研究，E-mail：yqyu@bjut.edu.cn

开展动力学及控制研究。

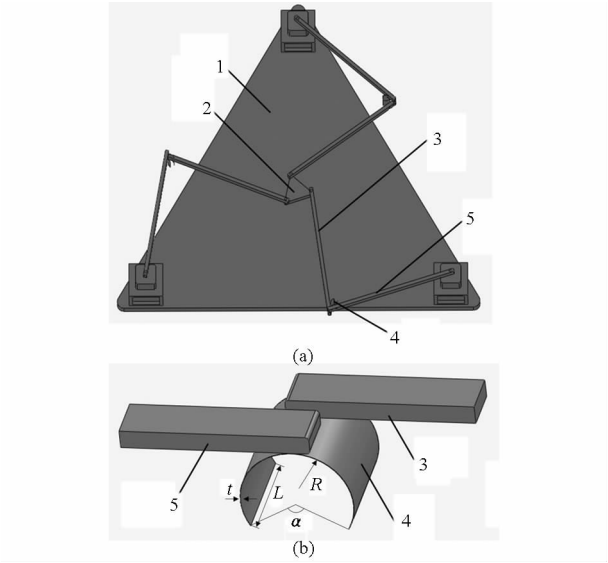

图 1　平面三自由度柔顺关节并联机器人

Fig. 1　Mechanism of planar 3-DOF parallel robot with compliant joints

（a）机构示意图　（b）柔顺关节示意图

1. 定平台　2. 动平台　3. 从动杆　4. 柔顺关节　5. 驱动杆

为研究系统的动力学性能，首先需要建立系统的分析模型。含柔顺关节系统具有较强的非线性，系统建模具有较大难度。针对柔顺关节具有的非线性大变形特性，由 Howell 教授提出的伪刚体法是一种有力的分析工具[5]，其主要思想是用两根相铰接的刚性杆模拟柔性片段的弯曲变形，铰接点处有扭簧，通过改变铰接点位置和扭簧的刚度，使刚性杆末端轨迹逼近柔性片段的变形轨迹。伪刚体模型在柔顺机构及柔顺关节的研究中已经证明具有较高精度，得到了广泛应用[5]。

本文以图 1a 所示平面三自由度柔顺关节并联机器人系统为研究对象，建立其伪刚体模型，如图 2 所示，$B_i(i=1,2,3)$ 点处使用传统转动副和扭簧的组合形式来等效柔顺关节。

根据材料力学和文献[17]，当扭矩 T 作用于开槽薄壁柔顺关节时，产生的扭转角为

$$\Phi=\frac{3L}{G\alpha Rt^3}T \tag{1}$$

式中　G——柔顺关节剪切模量

α——柔顺关节开槽角度

R——柔顺关节截面半径

t——柔顺关节截面厚度

L——柔顺关节长度

由式(1)得到柔顺关节的轴向扭转刚度为

$$K=\frac{T}{\Phi}=\frac{G\alpha Rt^3}{3L} \tag{2}$$

在图 2 所示的系统伪刚体模型中，使用传统转动副和弹簧刚度系数为 K 的扭簧，等效开槽薄壁柔顺关节。

图 2 中，平面三自由度柔顺关节并联机器人的机构包括：定平台 $O_1O_2O_3$、动平台 $D_1D_2D_3$ 和与二者相连接的 3 条结构相同的运动支链，各运动支链由驱动杆 $O_iB_i(i=1,2,3)$、从动杆 $B_iD_i(i=1,2,3)$ 和柔顺关节组成。驱动杆长度为 r_1，质量为 m_1，转动惯量为 J_1，运动转角为 θ_{i1}；从动杆长度为 r_2，质量为 m_2，转动惯量为 J_2，运动转角为 θ_{i2}；动平台为等边三角形，边长为 h，质量为 m_D，转动惯量为 J_D，运动转角为 φ；定平台为等边三角形，边长为 a。

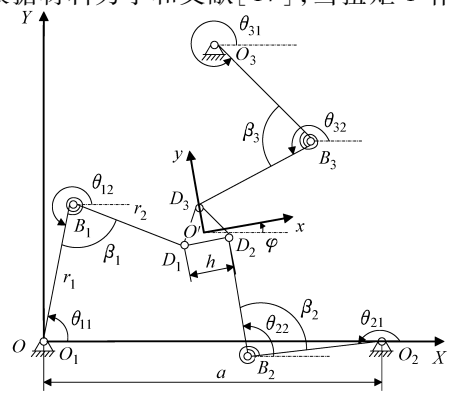

图 2　伪刚体模型

Fig. 2　Pseudo-rigid-body model

2　动力学方程

柔顺关节并联机器人系统是一个复杂的动力学系统，为了对其进行特性分析、控制策略设计及动态性能研究，首先需要建立其动力学模型。应用拉格朗日方法，系统动力学表达式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}_{i1}}\right)-\frac{\partial E}{\partial\theta_{i1}}+\frac{\partial U}{\partial\theta_{i1}}=\tau_i \quad (i=1,2,3) \tag{3}$$

式中　E——系统总动能　　U——系统总势能

τ_i——驱动力矩

杆 O_iB_i、杆 B_iD_i 及动平台的材料均匀，质心在各构件的几何中心，系统的总动能为

$$E=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left[m_j(\dot{x}_{sij}^2+\dot{y}_{sij}^2)+J_j\dot{\theta}_{ij}^2\right]+\left[m_D(\dot{x}_{SD}^2+\dot{y}_{SD}^2)+J_D\dot{\varphi}^2\right]\right\} \tag{4}$$

式中　$(\dot{x}_{si1},\dot{y}_{si1})$——驱动杆 O_iB_i 质心速度

$(\dot{x}_{si2},\dot{y}_{si2})$——从动杆 B_iD_i 质心速度

$(\dot{x}_{SD},\dot{y}_{SD})$——动平台质心速度

系统作平面运动，忽略各构件的重力势能，只考虑扭簧的弹性势能，系统的总势能为

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}K_i(\beta_i-\beta_0)^2 \tag{5}$$

式中 K_i——扭簧刚度系数

β_i——杆 O_iB_i 与杆 B_iD_i 夹角

β_0——扭簧初始角度

$\beta_i-\beta_0$——扭簧的变形量

将式(4)、(5)代入式(3),得到系统的动力学方程为

$$\boldsymbol{M}(\theta)\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{C}(\theta,\dot{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{K}(\theta)=\boldsymbol{\tau} \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{\theta}$——驱动杆关节角位移

$\boldsymbol{M}(\theta)$——系统惯性矩阵

$\boldsymbol{C}(\theta,\dot{\theta})$——系统离心力哥氏力矩阵

$\boldsymbol{K}(\theta)$——系统刚度项

$\boldsymbol{\tau}$——驱动力矩

刚度项 $\boldsymbol{K}(\theta)$ 由扭簧的刚度系数和变形量决定,是区别于以运动副传动的传统并联机器人动力学模型的主要特征,会影响系统动态特性。

3 控制策略

3.1 实际被控系统模型

使用柔顺关节取代传统运动副,从机构结构角度分析,可以使机器人系统克服传统运动副所带来的一系列难题,从根本上提高系统运行精度。但实际中,还存在以下问题:①驱动杆和从动杆间依靠柔顺关节的变形完成运动和能量传递,而变形产生的弹性势能不可能完全转化为动能,未转化的部分会引起振动。②柔顺关节会降低系统刚度,在高速运行时,会造成系统振动。③基于伪刚体法的柔顺关节模型,不足以完全体现柔顺关节的动态性能,所建动力学模型存在未建模动态。④惯性参数摄动引起的模型误差。

针对上述问题,根据式(6)所得系统名义动力学方程,实际被控系统模型为

$$[\boldsymbol{M}(\theta)+\Delta\boldsymbol{M}(\theta)]\ddot{\boldsymbol{\theta}}+[\boldsymbol{C}(\theta,\dot{\theta})+\Delta\boldsymbol{C}(\theta,\dot{\theta})]\dot{\boldsymbol{\theta}}+[\boldsymbol{K}(\theta)+\Delta\boldsymbol{K}(\theta)]=\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{w} \tag{7}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{M}(\theta)$——惯性矩阵误差

$\Delta\boldsymbol{C}(\theta,\dot{\theta})$——离心力哥氏力矩阵误差

$\Delta\boldsymbol{K}(\theta)$——刚度项误差

$\boldsymbol{w}$——系统扰动

将柔顺关节引起的系统振动、未建模动态以及惯性参数摄动引起的模型误差,定义为系统的综合扰动 $\boldsymbol{W}$,式(7)可以改写为

$$\boldsymbol{M}(\theta)\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{C}(\theta,\dot{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{K}(\theta)-\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\tau} \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{w}-\Delta\boldsymbol{M}(\theta)\ddot{\boldsymbol{\theta}}-\Delta\boldsymbol{C}(\theta,\dot{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}-\Delta\boldsymbol{K}(\theta)$

3.2 控制策略设计

柔顺关节并联机器人的实际被控系统模型中存在扰动项。PD 控制虽然结构简单,易于实现,但当系统存在扰动时,会引起较大误差;而滑模控制方法对于扰动及参数摄动具有较强的鲁棒性。为抑制扰动,提高系统的动态性能,设计滑模控制策略,取滑模面为

$$\boldsymbol{s}=\dot{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{e} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{\theta}\quad \dot{\boldsymbol{e}}=\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}}-\dot{\boldsymbol{\theta}}$

式中 $\boldsymbol{e}$、$\dot{\boldsymbol{e}}$——角位移、角速度跟踪误差

$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{d}}$、$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}}$——期望角位移、角速度

$\boldsymbol{\delta}$——正对角矩阵

对式(9)求导,并将式(8)代入得到

$$\dot{\boldsymbol{s}}=\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{e}}-\boldsymbol{M}(\theta)^{-1}[\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{W}-\boldsymbol{C}(\theta,\dot{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{K}(\theta)] \tag{10}$$

为保证滑动模态趋近运动的动态品质,引入指数趋近律

$$\dot{\boldsymbol{s}}=-\varepsilon\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})-k\boldsymbol{s}\quad(\varepsilon>0,k>0) \tag{11}$$

将式(10)和式(11)合并,得到控制律为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}(\theta)[\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{\delta}\dot{\boldsymbol{e}}-(-\varepsilon\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})-k\boldsymbol{s})]+\boldsymbol{C}(\theta,\dot{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{K}(\theta)+W_c\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s}) \tag{12}$$

其中 $W_c\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})$ 为鲁棒因子,用于补偿柔顺关节和惯性参数摄动引起的综合扰动 $\boldsymbol{W}$,增强系统鲁棒性,$W_c=\bar{d}+\eta$,取 $\bar{d}\geqslant\|\boldsymbol{W}\|_\infty$,$\eta>0$。

定义李雅普诺夫函数为

$$V=\frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} \tag{13}$$

将式(12)代入式(10)得

$$\dot{\boldsymbol{s}}=-\varepsilon\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})-k\boldsymbol{s}+\boldsymbol{M}(\theta)^{-1}[-(\bar{d}+\eta)\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})-\boldsymbol{W}] \tag{14}$$

由式(13)、(14)得

$$\dot{V}=\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{s}}=-\varepsilon|\boldsymbol{s}|-k\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{M}(\theta)^{-1}[-(\bar{d}+\eta)|\boldsymbol{s}|-\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}]\leqslant\boldsymbol{M}(\theta)^{-1}[-(\bar{d}+\eta)|\boldsymbol{s}|-\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}]$$

由 $\boldsymbol{M}(\theta)$ 正定,$\bar{d}+\eta>\|\boldsymbol{W}\|_\infty$,可得 $\dot{V}\leqslant 0$,根据李雅普诺夫理论,对于扰动,系统渐进稳定。

3.3 速度规划

机器人运行中,为保证系统平稳安全,避免位置、速度和加速度突变,需要选择合适的速度规划曲线。S 型速度规划方法广泛应用于工业领域,其完整的速度曲线共分为 7 段,各段衔接处有过渡段,加速度连续,避免了冲击,保证了系统运行精度。

直线和圆轨迹速度规划步骤如下:

(1)已知直线轨迹的初始点 (x_s,y_s) 和终止点 (x_e,y_e),计算直线轨迹的期望运动位移 $s_l=\sqrt{(x_e-x_s)^2+(y_e-y_s)^2}$;已知圆轨迹的圆心 (x_o,y_o) 和半径 r,计算圆轨迹的期望运动位移 $s_c=2\pi r$。

(2)根据最大速度 $v_{\max}$、最大加速度 $a_{\max}$、最大急动度 $j_{\max}$、起点速度 v_s 和终点速度 v_e 确定 S 型速

度曲线是否完整，即是否包含匀加速段、匀减速段和匀速段。

(3)根据 s、v_{max}、a_{max}、j_{max}、v_s 和 v_e 计算速度曲线、位移曲线和加速度曲线的各参数值。

(4)根据步骤(3)得到的各曲线参数值，直线轨迹计算轨迹中各时刻的速度 $v_l(t)$、位移 $s_l(t)$ 和加速度 $a_l(t)$，圆轨迹计算轨迹中各时刻的切向速度 $v_c(t)$、位移 $s_c(t)$、切向加速度 $a_t(t)$、向心加速度 $a_n(t)$。

(5)直线轨迹计算轨迹的初始点和终止点连成的直线关于 X 轴的倾斜角，$\varphi = \arctan((y_e - y_s)/(x_e - x_s))$，圆轨迹计算轨迹点与圆心连成的直线关于 X 轴的倾斜角，$\theta(t) = s_c(t)/r$。

(6)计算动平台中心点在 X 轴和 Y 轴上的位移分量、速度分量和加速度分量。

4　仿真

为验证动力学模型和控制策略的有效性，进行仿真研究，分析系统的动态特性。

期望轨迹(单位：m)为：①动平台从 $A_1(0.45, 0.26)$ 点沿直线运动到 $A_2(0.55, 0.26)$ 点。②从 A_2 点开始，以 A_1 点为圆心，作半径为 0.1 的圆，回到 A_2 点。③从 A_2 点沿直线返回 A_1 点。

期望轨迹用于研究系统对于直线和圆的跟踪性能，共分为 3 段，每段轨迹视为点到点的运动，两点间轨迹为直线或圆，采用 S 型速度曲线进行运动规划。

并联机器人的主要惯性参数如表 1 所示。

柔顺关节参数为：$t = 0.2$ mm，$L = 50$ mm，$\alpha = 2\pi/3$，$R = 30$ mm。

表 1　并联机器人惯性参数

Tab. 1　Inertia parameters of parallel robot

构件	长度/m	质量/kg	转动惯量/(kg·m²)
驱动杆	0.4	0.252 1	3.4×10^{-3}
从动杆	0.4	0.252 1	3.4×10^{-3}
动平台	0.08	0.189 8	$1.012\,4\times10^{-4}$
定平台	0.9		

使用 Matlab/Simulink 的 S 函数实现对期望轨迹、控制律和被控对象的描述[18]，控制参数为：$\boldsymbol{\delta} = \mathrm{diag}[100, 100, 100]$，$\boldsymbol{W} = [5\sin(2\pi t)\quad 5\cos(2\pi t)\quad 5\sin(2\pi t)]^{\mathrm{T}}$，$k = 100$，$\varepsilon = 0.01$，$v_{max} = 0.083\,3$ m/s，$a_{max} = 20$ m/s²，$v_s = 0$，$v_e = 0$。

为消除抖振，采用饱和函数 $\mathrm{sat}(\boldsymbol{s})$ 代替符号函数 $\mathrm{sgn}(\boldsymbol{s})$[19]。

$$\mathrm{sat}(\boldsymbol{s}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{s} > \Delta) \\ k\boldsymbol{s} & (|\boldsymbol{s}| \leqslant \Delta) \\ -1 & (\boldsymbol{s} < -\Delta) \end{cases}$$

其中 $k = 1/\Delta$，Δ 为边界层厚度，饱和函数在边界层外采用切换控制，在边界层内采用反馈控制。

图 3 为滑模控制方法所得驱动杆的关节角位移曲线。从图中可以看出滑模控制的仿真曲线与期望轨迹吻合度较高，驱动杆的最大误差绝对值分别为 2.7 mrad、2.5 mrad 和 2.5 mrad，各采样点跟踪速度较快，无明显的趋近过程，表明建立的含柔顺关节的动力学模型和趋近律滑模控制策略能够有效实现机器人的轨迹跟踪控制。

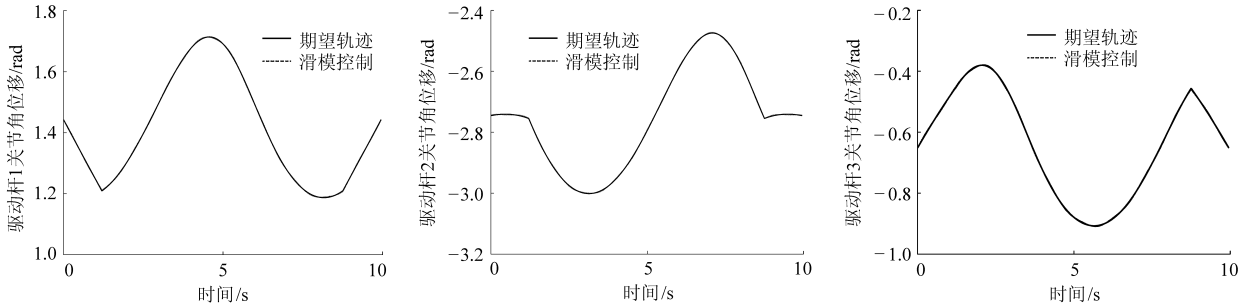

图 3　驱动杆关节角位移曲线

Fig. 3　Joint angular displacement curves of drive lever

为验证趋近律滑模控制策略的鲁棒性，将其与 PD 控制进行对比。图 4 为滑模控制和 PD 控制得到的末端轨迹曲线，图 5 为末端轨迹曲线沿 X 轴和 Y 轴方向的误差，对末端轨迹误差进行统计分析见表 2。

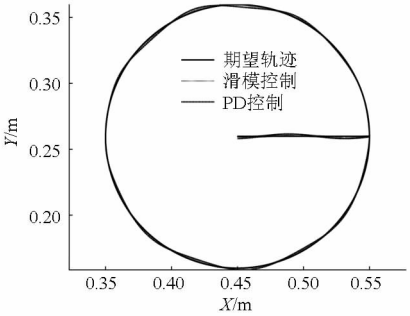

图 4　滑模控制和 PD 控制的末端轨迹曲线

Fig. 4　Trajectory curves of end-effector of sliding mode control and PD control

根据图 4、5 及表 2，当被控系统存在扰动时，滑

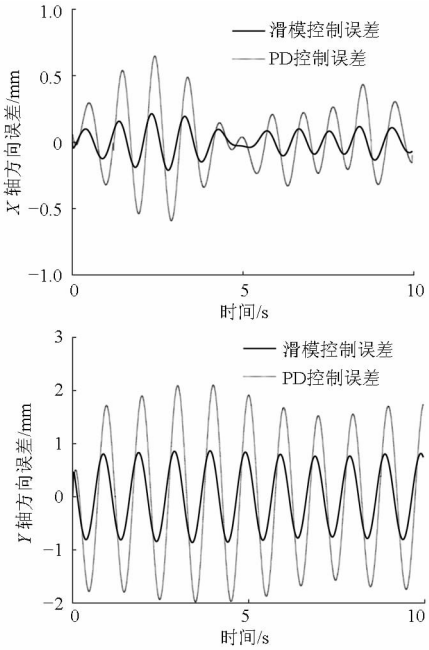

图 5 轨迹误差曲线

Fig. 5 Error curves of trajectory

模控制策略的各项误差统计值均为微米级别,其中均方根误差体现各采样点的仿真值与期望值间的偏差,是衡量控制方法性能的重要指标,PD 控制的均方根误差为 1.30 mm,而滑模控制为 0.58 mm,明显小于 PD 控制。研究表明滑模控制策略能有效补偿柔顺关节和惯性参数摄动引起的扰动,使系统具有较强的鲁棒性,与 PD 控制相比,具有优越性。

表 2 误差统计

Tab. 2 Statistics of errors mm

参数	控制方法	X 轴	Y 轴
最大误差	PD 控制	0.65	2.10
	滑模控制	0.21	0.86
标准差	PD 控制	0.26	1.30
	滑模控制	0.092	0.57
均方根误差	PD 控制	1.30	
	滑模控制	0.58	

5 结论

(1)建立了含大变形柔顺关节的系统伪刚体模型,运用拉格朗日原理建立动力学方程。分析系统特性,设计了趋近律滑模控制策略,补偿由柔顺关节和惯性参数摄动引起的扰动,改善了系统的动态性能。

(2)动力学模型和控制策略有效实现了柔顺关节并联机器人的轨迹跟踪,趋近律滑模控制策略使系统具有较强的鲁棒性,比 PD 控制更为优越。

(3)为宏观大范围运动柔顺关节并联机器人的相关研究奠定了理论基础。

参 考 文 献

1 Merlet J. Parallel robots[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

2 Flores P, Ambrosio J, Claro J C P, et al. A study on dynamics of mechanical systems including joints with clearance and lubrication[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(3): 247 – 261.

3 Paccot F, Andreff N, Martinet P. A review on the dynamic control of parallel kinematic machines: theory and experiments[J]. International Journal of Robotics Research, 2009, 28(3): 395 – 416.

4 吴博,吴盛林,赵克定. 并联机器人控制策略的现状和发展趋势[J]. 机床与液压, 2005(10): 5 – 8.
Wu Bo, Wu Shenglin, Zhao Keding. Current status and development tendence of stewart platform control strategy[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2005(10): 5 – 8. (in Chinese)

5 Howell L L. Compliant mechanism[M]. New York: John Wiley & Sons, 2001.

6 贠远,徐青松,李杨民. 并联微操作机器人技术及应用进展[J]. 机械工程学报, 2008, 44(12): 12 – 23.
Yun Yuan, Xu Qingsong, Li Yangmin. Survey on parallel manipulators with micro/nano manipulation technology and applications [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(12): 12 – 23. (in Chinese)

7 Yi B, Chung G B, Na H Y, et al. Design and experiment of a 3-DOF parallel micromechanism utilizing flexure hinges[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2003, 19(4): 604 – 612.

8 Yao Q, Dong J, Ferreira P M. Design, analysis, fabrication and testing of a parallel-kinematic micropositioning XY stage[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2007, 47(6): 946 – 961.

9 Li Y, Xu Q. Modeling and performance evaluation of a flexure-based XY parallel micromanipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(12): 2127 – 2152.

10 贾晓辉,田延岭,张大卫. 3-PRR 柔性并联机构动力学分析[J]. 农业机械学报, 2010, 41(10): 199 – 203.
Jia Xiaohui, Tian Yanling, Zhang Dawei. Dynamics analysis of 3-PRR compliant parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(10): 199 – 203. (in Chinese)

11 Yue Y, Gao F, Jin Z, et al. Modeling and experiment of a planar 3-DOF parallel micromanipulator[J]. Robotica, 2012, 30 (2): 171 – 184.

12 Tian Y, Shirinzadeh B, Zhang D. Design and dynamics of a 3-DOF flexure-based parallel mechanism for micro/nano manipulation [J]. Microelectronic Engineering, 2010, 87(2): 230 – 241.

13 刘平安. 柔性关节及 3-DOF 微动平面并联机器人设计与分析[D]. 北京：北京交通大学，2008.
Liu Ping'an. Design and synthesis of flexure hinges and 3-DOF micro-motion planar parallel manipulators[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2008. (in Chinese)
14 赵山杉. 大变形环形柔性铰链性能分析与设计方法研究[D]. 北京：北京航空航天大学，2010.
Zhao Shanshan. Research on performance analysis and design method of large-deflection annulus-shaped flexure hinges[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010. (in Chinese)
15 杨启志，朱小兵，马履中，等. 大变形柔性转动副结构设计与柔度分析[J]. 农业机械学报，2012，43(9)：209－212.
Yang Qizhi, Zhu Xiaobing, Ma Lüzhong, et al. Structural design and flexibility analysis of new compliant revolute pair with macro-scale deformation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(9): 209－212. (in Chinese)
16 余跃庆，崔忠炜，赵鑫，等. 柔顺关节并联机器人设计与实验[J]. 农业机械学报，2013，44(7)：274－278.
Yu Yueqing, Cui Zhongwei, Zhao Xin, et al. Design and experiment of parallel robot with compliant joints[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(7): 274－278. (in Chinese)
17 余跃庆，马兰，崔忠炜，等. 柔性机器人的关节设计与制作[J]. 中国科技论文，2013，8(8)：784－786.
Yu Yueqing, Ma Lan, Cui Zhongwei, et al. Design and manufacture of flexure robot joints[J]. China Sciencepaper, 2013, 8(8): 784－786. (in Chinese)
18 刘金琨. 机器人控制系统的设计与 MATLAB 仿真[M]. 北京：清华大学出版社，2008.
19 Slotine J J, Sastry S S. Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators[J]. International Journal of Control, 1983, 38(2): 465－492.

Dynamics and Control of Parallel Robot with Compliant Joints

Tian Hao　Yu Yueqing
(*College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology*, *Beijing University of Technology*, *Beijing* 100124, *China*)

Abstract: The researches on dynamic modeling, characteristic analysis, control strategy design and dynamic performance analysis for the parallel robot with compliant joints, which had the property of large range motion, were carried out. Based on pseudo-rigid-body model, the characteristics of compliant joints were investigated and system model with large deformation compliant joints was set up. The dynamic equation was obtained based on Lagrange method. A reaching law sliding mode control strategy was designed to eliminate the vibration and the unmodelled dynamics caused by compliant joints and the model error made by inertia parameter perturbation. And the stability of control strategy was verified. Simulation results showed that dynamic model and control strategy were effective.

Key words: Compliant joints　Parallel robot　Dynamics　Reaching law sliding mode control