

结合部静摩擦因数修正与定量实验验证*

田红亮 刘芙蓉 方子帆 赵春华 朱大林 张发军

(三峡大学机械与材料学院, 宜昌 443002)

摘要: 根据结构函数给出了分形维数、分形粗糙度的严密解析解,修正结合部静摩擦因数相关公式。编写求解域扩展因子的通用 Matlab 程序,详细推导自相关函数、功率谱密度函数和结构函数的精确解析解。以 YK31320 型普通滚齿机上的结合部为研究对象,以液体静压导轨的实验结果为基准,对结合部静摩擦因数的理论解进行定量验证。验证结果表明:理论静摩擦因数与实验的绝对误差在 $-0.045\ 02 \sim 0.009\ 66$ 之间,理论静摩擦因数与实验的相对误差在 $-30.78\% \sim 9.762\%$ 之间。

关键词: 结合部 静摩擦因数 单重分形 自相关函数 离散功率谱 连续功率谱 结构函数

中图分类号: TH113.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)10-0282-12

Correction of Static Friction Coefficient for Joint Interface and Quantitative Test Confirmation

Tian Hongliang Liu Furong Fang Zifan Zhao Chunhua Zhu Dalin Zhang Fajun

(College of Mechanical and Material Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

Abstract: The exact analytical solutions to fractal dimension and fractal roughness were put forward through structure function. Some formulas relating to static friction coefficient in joint interface were revised. A universal Matlab program was compiled to attain the domain extension factor. The rigorous analytical expressions for the autocorrelation function, power spectrum density function and structure function were given in detail. Taking a joint interface for example in YK31320 common gear-hobbing machine according to the experimental findings about hydrostatic guideway, the theoretical solution for static friction coefficient in joint interface was quantitatively confirmed. The confirmation results showed that the absolute windage between the theoretical static friction coefficients and the experimental ones fluctuated from $-0.045\ 02$ to $0.009\ 66$, while the relative error between them distributed from -30.78% to 9.762% .

Key words: Joint interface Static friction coefficient Single fractal Autocorrelation function Discrete power spectrum Continuous power spectrum Structure function

引言

一般来说复杂机械除了结构本体之外,还包含各种各样的结合部。这些结合部的存在有些是为了实现功能之需要,有些是为了制造、运输、装配之方便,还有些则是为了调整、模块化、柔性的需要。机床作为加工母机,是典型的复杂机械结构,并具有各

种典型的结合部形式,这些结合部的存在对机械结构整体特性有很大影响。在机械结构中,研究与预测结合部摩擦学特性(特别是结合部的静摩擦因数)是非常重要的,各国学者对此进行了大量的研究^[1~11]。

鉴于上述研究现状,兰国生等^[12]基于各向异性分形几何接触理论架构结合部静摩擦因数的改进模

收稿日期: 2012-07-24 修回日期: 2013-05-06

* 国家自然科学基金资助项目(51275273,51075234)和三峡大学博士科研启动基金资助项目(KJ2012B013)

作者简介: 田红亮,副教授,博士,主要从事界面力学研究,E-mail: thl19732003@aliyun.com

型,但仍存在 3 个缺陷:①结合部静摩擦因数相关公式有 7 处不合理。②虽给出域扩展因子与自变量 D 之间的超越方程,但未给出求解该方程的具体方法。③没有给出通过实验识别结合部的 2 个重要表征参数(分形维数、分形粗糙度)的方法。

本文修正文献[12]的 3 个缺陷,编写求解域扩展因子的通用 Matlab 程序,给出识别结合部的 2 个重要表征参数的方法,对文献[12]中的结合部静摩擦因数的理论解进行有效性验证。

1 结合部静摩擦因数相关公式的修正

文献[12]中的结合部静摩擦因数相关公式有 7 处不合理,分别叙述如下。

文献[12]图 1 中字样“变形微凸体”左下侧的 r 应为 r' 。其中 r 为微凸体实际接触面积的半径, r' 为微凸体截断面积的半径。

文献[12]中的式(8)应为

$$A_r = \frac{1}{2} \int_{a'_s}^{a'_c} n(a') a' da' + \frac{1}{2} \int_{a'_c}^{a'_l} n(a') a' da' \quad (1)$$

式中 A_r ——实际接触面积

a'_s ——最小微接触截面积

a'_c ——临界截断面积

$n(a')$ ——微接触截面积分布函数

a' ——微凸体截断面积

a'_l ——最大微接触截面积

根据式(1)得

$$A_r = \frac{D\psi^{1-0.5D}}{2(2-D)} a_l^{0.5D} (a_l^{1-0.5D} - a_s^{1-0.5D}) \quad (2)$$

式中 D ——结合部轮廓分形维数

ψ ——域扩展因子

功率谱表明即使在纳米尺度下表面也会分形,假设 $a'_s \rightarrow 0$ 是合理的^[7],式(2)与文献[12]中的式(19)注释 $a'_l = 2a_l = \frac{2(2-D)}{D} \psi^{-\frac{2-D}{2}} A_r$ 一致,现重写为

$$a'_l = \frac{2(2-D)}{D} \psi^{-\frac{2-D}{2}} A_r \quad (3)$$

文献[12]中的式(13)应为

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{2^{\frac{9-2D}{2}} (\ln \gamma)^{\frac{1}{2}} G^{D-1} E^* \int_{a'_c}^{a'_l} n(a') a'^{\frac{3-D}{2}} da'}{3\pi^{\frac{3-D}{2}}} = \\ &= \frac{2^{\frac{9-2D}{2}} DG^{D-1} E^* (\ln \gamma)^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_l^{\frac{D}{2}} (a_l^{\frac{3-2D}{2}} - a_c^{\frac{3-2D}{2}})}{3\pi^{\frac{3-D}{2}} (3-2D)} = \\ &= \frac{2^{\frac{12-3D}{2}} DG^{D-1} E^* (\ln \gamma)^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_l^{\frac{D}{2}} (a_l^{\frac{3-2D}{2}} - a_c^{\frac{3-2D}{2}})}{3\pi^{\frac{3-D}{2}} (3-2D)} \quad (4) \end{aligned}$$

式中 P_e ——法向弹性力

γ ——大于 1 的常数,对于服从正态分布的随机表面, $\gamma = 1.5$ 较符合高频谱密度和相位随机情况

G ——分形粗糙度

E^* ——两接触材料的复合弹性模量

a_l ——最大微接触面积

a_c ——临界面积

文献[12]中的式(16)应为

$$\begin{aligned} P &= \frac{2^{\frac{9-2D}{2}} DG^{D-1} E^* (\ln \gamma)^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_l^{\frac{D}{2}}}{3\pi^{\frac{3-D}{2}} (3-2D)} \cdot \\ & \cdot (a_l^{\frac{3-2D}{2}} - a_c^{\frac{3-2D}{2}}) + \frac{KYD\psi^{\frac{2-D}{2}} a_l^{\frac{D}{2}} a_c^{\frac{2-D}{2}}}{2-D} = \\ &= \frac{2^{\frac{12-3D}{2}} DG^{D-1} E^* (\ln \gamma)^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{2-D}{2}} a_l^{\frac{D}{2}}}{3\pi^{\frac{3-D}{2}} (3-2D)} \cdot \\ & \cdot (a_l^{\frac{3-2D}{2}} - a_c^{\frac{3-2D}{2}}) + \frac{2KYD\psi^{\frac{2-D}{2}} a_l^{\frac{D}{2}} a_c^{\frac{2-D}{2}}}{2-D} \quad (5) \end{aligned}$$

式中 P ——结合部法向总载荷

K ——较软材料的硬度 H 与其屈服强度 Y 的比值, K 通常取为 2.8

文献[12]中的无量纲常数应为^[13]

$$b = \frac{9\pi^2}{4} \quad (6)$$

因为施加在一个微凸体上的弹性力函数^[12]为

$$P_e(a') = \frac{2^{4.5-D} \sqrt{\ln \gamma} E^* G^{D-1} a'^{1.5-0.5D}}{3\pi^{1.5-0.5D}} \quad (7)$$

施加在一个完全塑性微凸体上的力函数^[12]为

$$P_p(a') = KYa' \quad (8)$$

两表面接近时,假设施加在一个微凸体上的法向力函数连续变化,可令 $P_e(a'_c) = P_p(a'_c)$ 得

$$2^{9-2D} E^{*2} G^{2D-2} \ln \gamma = 9\pi^{3-D} K^2 Y^2 a_c'^{D-1} \quad (9)$$

临界截断面积^[12]为

$$a'_c = \left[2^{7-2D} \pi^{D-1} b^{-1} G^{2D-2} \left(\frac{E^*}{KY} \right)^2 \ln \gamma \right]^{\frac{1}{D-1}} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)可得式(6)。

但文献[12]引用文献[14]的以下结果: $b = \left(\frac{\pi q}{2} \right)^2$ 、 $q = 0.454 + 0.41\nu_1$ 。因为文献[14]根据传统结合部的 CEB 统计模型^[15]参数:硬度系数 $q = 0.454 + 0.41\nu_1$,临界变形量 $\delta_c = \left(\frac{\pi q KY}{2E^*} \right)^2 R$,且认为此临界变形量等于经典 GW 模型^[3]的临界变形量 $\delta_c = bR \frac{K^2 Y^2}{E^{*2}}$,故文献[14]推导以下结论: $b = \left(\frac{\pi q}{2} \right)^2$ 、 $q = 0.454 + 0.41\nu_1$ 。CEB 统计模型、经典 GW 模型都是传统方法,而文献[14]完全将传统理

论引入到现代分形理论中,不合理。本文假定法向力函数的连续性,给出导出式(6)的过程。

对应 $\varphi = 0.10, \varphi = 1.0, \varphi = 0.01$ 应改为 3 条曲线沿逆时针方向分别对应 $\varphi = 0.01, \varphi = 0.10, \varphi = 1.0$ 。

文献[12]图 4 中 3 条曲线沿逆时针方向分别

文献[12]中的式(25)应为

$$f=\frac{Q}{P^*}=$$
$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{8\psi^{\frac{2-D}{2}}\varphi}{\pi(6-3\nu)}\left[\psi^{\frac{D-2}{2}}A_r^*-(\psi^{\frac{D-2}{2}}A_r^*)^{\frac{D}{2}}\left(\frac{D}{2-D}a_c^*\right)^{\frac{2-D}{2}}\right]+\frac{2^{\frac{18-3D}{2}}(2\nu-1)DG^{*(D-1)}(\ln\gamma)^{\frac{1}{2}}\psi^{1-D+0.25D^2}\left(\frac{2-D}{D}A_r^*\right)^{\frac{D}{2}}\left[\left(\frac{2-D}{D}\psi^{\frac{D-2}{2}}A_r^*\right)^{\frac{3-2D}{2}}-a_c^{*\frac{3-2D}{2}}\right]}{9\pi^{\frac{5-D}{2}}(2-\nu)(3-2D)} \\ & \frac{G^{*(D-1)}(\ln\gamma)^{\frac{1}{2}}g_2(D)\psi\left(\frac{2-D}{2}\right)^2A_r^{*\frac{D}{2}}\left[\psi^{\frac{-2D^2+7D-6}{4}}\left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{3-2D}{2}}A_r^{*\frac{3-2D}{2}}-a_c^{*\frac{3-2D}{2}}\right]+2K\varphi g_3(D)\psi\left(\frac{2-D}{2}\right)^2A_r^{*\frac{D}{2}}a_c^{*\frac{2-D}{2}}}{3\pi^{\frac{3-D}{2}}g_2(D)\psi\left(\frac{2-D}{2}\right)^2A_r^{*\frac{D}{2}}\left[\psi^{\frac{-2D^2+7D-6}{4}}\left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{3-2D}{2}}A_r^{*\frac{3-2D}{2}}-a_c^{*\frac{3-2D}{2}}\right]+2K\varphi g_3(D)\psi\left(\frac{2-D}{2}\right)^2A_r^{*\frac{D}{2}}a_c^{*\frac{2-D}{2}}} \\ & \frac{8\psi^{\frac{1}{4}}\varphi}{3\pi(2-\nu)}\left[\frac{A_r^*}{\psi^{\frac{1}{4}}}-\left(\frac{A_r^*}{\psi^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{3}{4}}(3a_c^*)^{\frac{1}{4}}\right]+\frac{2^{\frac{19}{4}}(2\nu-1)G^{*\frac{1}{2}}(\ln\gamma)^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{16}}A_r^{*\frac{3}{4}}\ln\left(\frac{A_r^*}{3\psi^{\frac{1}{4}}a_c^*}\right)}{3^{\frac{7}{4}}\pi^{\frac{7}{4}}(2-\nu)} \\ & \frac{2^{\frac{7}{4}}\pi^{-\frac{3}{4}}G^{*\frac{1}{2}}(\ln\gamma)^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{16}}\left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\ln\left(\frac{A_r^*}{3\psi^{\frac{1}{4}}a_c^*}\right)+6K\varphi\psi^{\frac{1}{16}}\left(\frac{A_r^*}{3}\right)^{\frac{3}{4}}a_c^{*\frac{1}{4}}}{3^{\frac{7}{4}}\pi^{\frac{7}{4}}(2-\nu)} \end{aligned} \right. \quad (D\neq 1.5)$$
$$\quad (D=1.5) \tag{11}$$

2 Matlab 求解域扩展因子超越方程

域扩展因子 ψ 与自变量 D 之间的非线性超越方程^[12]为

$$\psi^{1-0.5D}-(1+\psi^{-0.5D})^{\frac{D-2}{D}}-\frac{2-D}{D}=0$$
$$(1.718\ 3=e-1\leq\psi\leq\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=2.618) \tag{12}$$

方程(12)只有以下 2 种极限条件下的精确解

$$\psi=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad (D=1) \tag{13}$$

$$\psi=e-1 \quad (D=2) \tag{14}$$

文献[12,16]均只提到通过二分法可求解方程(12),但二分法要求得方程(12)实根的精确值,往往比较困难,且二分法寻求的是方程近似解^[17]。文献[16]虽直接给出 D 从 1 到 2、步长 0.01 时,对应的 101 个 ψ ,但高档数控机床结合部的高精度建模对 D 的小数点后几位数提出更高的要求,因而文献[16]提供的 101 个离散数据不能满足工程实用需要,需一种求解方程(12)的通用有效方法。为得到 $1 < D < 2$ 更大开区间对应的 ψ ,文献[18]利用 Matlab R2009b 开发一行代码,可求解方程(12),但该行代码只能获得 $1\leq D\leq 1.27$ 对应的 ψ ,不能求解 $1.28\leq D\leq 2$ 对应的 ψ 。

为彻底求解方程(12),获得 $1\leq D\leq 2$ 整个闭区间对应的 ψ ,现给出 Matlab R2009b 的函数文件。例如在 Matlab R2009b 的 M 文件编辑器(M-File Editor)中编写以下内容(在 File-Preferences-Command Window Preferences-Numeric format 中选择 long,在 Numeric display 中选择 loose)

% 函数文件带扩展名 thl.m

function y = qjy(psi) % 输出形参 y,函数名 qjy,输入形参 psi

D = 1.28;% 任意给定半开区间[1,2)的分形维数

$$y=\text{psi}^{(1-0.5 * D)}-(1+\text{psi}^{(-0.5 * D)})^{((D-2)/D)-(2-D)/D};$$

% 调用函数文件带扩展名 thl.m 的命令文件 tqkr.m

psi = fzero(' thl ' ,2) % ' ' 内的指令名必须与函数文件不带扩展名 thl 相同,选择 psi = 2 附近求根

运行命令文件 tqkr.m,可求得当 $D = 1.28$ 时,对应的 $\psi = 2.205\ 588\ 230\ 018\ 552$,此值与文献[16]提供的 2.205 6 一致。当然也可获取当 $D = 1.999\ 7$ 时,对应的 $\psi = 1.718\ 404\ 521\ 332\ 638$,文献[16]未给出此种情形。

3 识别 2 个分形参数的结构函数法

本文识别 2 个分形参数的结构函数法不同于文献[18]的功率谱密度函数法。

Weierstrass - Mandelbrot 函数^[7]为

$$z(x)=G^{D-1}\sum_{n=n_1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi\gamma^nx)}{\gamma^{(2-D)n}} \tag{15}$$

Weierstrass - Mandelbrot 函数的自相关函数^[19]为

$$R(\tau)=\lim_{L\rightarrow+\infty}\frac{1}{L}\int_0^Lz(x)z(x+\tau)\text{d}x \tag{16}$$

将式(15)代入式(16)得

$$R(\tau)=G^{2D-2}\lim_{L\rightarrow+\infty}\frac{1}{L}\cdot\int_0^L\sum_{n=n_1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi\gamma^nx)}{\gamma^{(2-D)n}}\sum_{m=n_1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi\gamma^m(x+\tau))}{\gamma^{(2-D)m}}\text{d}x=$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} G^{2D-2} \sum_{m=n_1}^{+\infty} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^{(2-D)(m+n)}} \lim_{L \rightarrow +\infty} \cdot \\ & \left[\frac{\sin(\pi(\gamma^m + \gamma^n)L)}{\pi(\gamma^m + \gamma^n)L} \cos(\pi(\gamma^m + \gamma^n)L + 2\pi\gamma^m\tau) + \right. \\ & \left. \frac{\sin(\pi(\gamma^m - \gamma^n)L)}{\pi(\gamma^m - \gamma^n)L} \cos(\pi(\gamma^m - \gamma^n)L + 2\pi\gamma^m\tau) \right] = \\ & \frac{1}{2} G^{2D-2} \sum_{m=n_1}^{+\infty} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^{(2-D)(m+n)}} \lim_{L \rightarrow +\infty} \cdot \\ & \frac{\sin(\pi(\gamma^m - \gamma^n)L)}{\pi(\gamma^m - \gamma^n)L} \cos(\pi(\gamma^m - \gamma^n)L + 2\pi\gamma^m\tau) = \\ & \frac{1}{2} G^{2D-2} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n\tau)}{\gamma^{(4-2D)n}} \quad (17) \end{aligned}$$

应特别注意的是:从式(17)的倒数第 2 式可看出:当 $m \neq n$ 时,各项皆为 0,故只保留了 $m = n$ 时的 1 项。

象函数 $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 的 Fourier 逆变换为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t} \quad (18)$$

故象原函数 $e^{j\omega_0 t}$ 的 Fourier 变换为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (19)$$

式中 $\delta(x)$ ——Dirac delta 脉冲偶函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(|\alpha|x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(u)}{|\alpha|} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(x)}{|\alpha|} dx \quad (20)$$

其中 $u = |\alpha|x$
式中 α ——非零实常数 u ——积分变量
根据式(20)得

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|} \quad (21)$$

式(17)中一般项象原函数 $\cos(2\pi\gamma^n\tau)$ 的 Fourier 变换^[20]为

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\gamma^n\tau) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j2\pi(\omega - \gamma^n)\tau} + e^{-j2\pi(\omega + \gamma^n)\tau}}{2} d\tau \quad (22) \end{aligned}$$

将式(19)代入式(22)得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\gamma^n\tau) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau = \\ & \pi \{ \delta[2\pi(\omega - \gamma^n)] + \delta[2\pi(\omega + \gamma^n)] \} \quad (23) \end{aligned}$$

将式(21)代入式(23)得

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\gamma^n\tau) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau = \\ & \frac{\delta(\omega - \gamma^n) + \delta(\omega + \gamma^n)}{2} \quad (24) \end{aligned}$$

振幅频谱式(24)的图像如图 1 所示,若只考虑 $\omega > 0$ 单边振幅频谱,将 $-\gamma^n$ 对应的振幅 0.5 叠加

在 γ^n 对应的振幅 0.5 上。再顾及粗糙表面形貌的随机分布特点,可将式(24)近似改写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\gamma^n\tau) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau \approx \delta(\omega - \gamma^n) \quad (25)$$

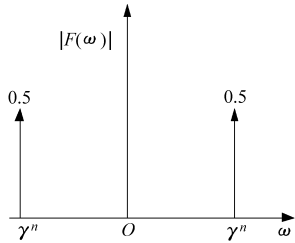


图 1 余弦函数的振幅频谱
Fig. 1 Altitude frequency spectrum of cosine function

由式(25)可得式(17)的离散功率谱密度函数^[20]为

$$\begin{aligned} \hat{P}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} G^{2D-2} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^{(4-2D)n}} \cdot \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\gamma^n\tau) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau \approx \frac{1}{2} G^{2D-2} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{\delta(\omega - \gamma^n)}{\gamma^{(4-2D)n}} \quad (26) \end{aligned}$$

由式(26)可得连续功率谱密度函数^[21]为

$$\begin{aligned} P(\omega) &\equiv \frac{1}{\Delta\omega} \int_{-\frac{1}{2}\Delta\omega}^{\frac{1}{2}\Delta\omega} \hat{P}(\omega + \omega') d\omega' = \frac{1}{2} G^{2D-2} \cdot \\ & \sum_{n=n_1}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}\Delta\omega}^{\frac{1}{2}\Delta\omega} \frac{\delta(\omega + \omega' - \gamma^n)}{\Delta\omega\gamma^{(4-2D)n}} d\omega' \approx \frac{1}{2} G^{2D-2} \frac{\Delta n}{\Delta\omega\gamma^{(4-2D)n(\omega)}} \quad (27) \end{aligned}$$

其中 $n(\omega) = \frac{\ln\omega}{\ln\gamma} \quad (28)$

式中 $\Delta\omega$ ——空间频率的增量
 Δn ——空间频率指数的增量
 $n(\omega)$ ——空间频率零点指数

将式(28)代入式(27)得

$$P(\omega) \approx \frac{1}{2} G^{2D-2} \omega^{2D-4} \frac{dn(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\ln\gamma} G^{2D-2} \omega^{2D-5} \quad (29)$$

式(29)与文献[22]的式(2)、文献[23]的式(2a)、文献[24]的式(10)都不同。

根据定积分的换元法得

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{x^\alpha} e^{-z} dz = x^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \quad (30)$$

其中 $x > 0; \alpha > 0; z = xt$ 为积分变量; $\Gamma(x)$ 为伽马函数。所以

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt \quad (31)$$

以下定积分^[17]为

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos x dx = \frac{t}{t^2 + 1} \quad (32)$$

通过变量替换,以下定积分为

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{(a+bt^n)^p} dt = \frac{a^{-p}}{n} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \int_0^1 x^{\frac{m+1}{n}-1} (1-x)^{p-\frac{m+1}{n}-1} dx = \frac{a^{-p}}{n} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} B\left(\frac{m+1}{n}, p-\frac{m+1}{n}\right) \quad (33)$$

其中 $a>0; b>0; n>0; x=\frac{bt^n}{a+bt^n}$ 为积分变量;

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 为贝塔函数^[25]。

令 $a=b=p=1, n=2$, 由式(33)得

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} B(0.5m+0.5, 0.5-0.5m) \quad (34)$$

用 $\alpha-2$ 置换式(34)中的 m 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-2}}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} B(0.5\alpha-0.5, 1.5-0.5\alpha) = \frac{\pi}{2\sin(\pi(0.5\alpha-0.5))} \quad (35)$$

根据式(31)可将以下单重定积分化为二重积分

$$\int_0^{+\infty} (1-\cos x) x^{-(5-2D)} dx = \int_0^{+\infty} (1-\cos x) x^{-\alpha} dx = \int_0^{+\infty} (1-\cos x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos x dx \right) dt \quad (36)$$

其中 $\alpha=5-2D \in (1,3)$

将式(32)代入式(36)得

$$\int_0^{+\infty} (1-\cos x) x^{-(5-2D)} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \left[\frac{1}{t} - \frac{t^2}{t(t^2+1)} \right] dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-2}}{t^2+1} dt \quad (37)$$

将式(35)代入式(37)得

$$\int_0^{+\infty} (1-\cos x) x^{-(5-2D)} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin(\pi(0.5\alpha-0.5))} \quad (38)$$

将 $\alpha=5-2D$ 代入式(38)得

$$\int_0^{+\infty} (1-\cos x) x^{-(5-2D)} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(5-2D)\cos((D-1.5)\pi)} \quad (39)$$

值得指出, 式(39)也都不同于文献[23]的式(14)和文献[26]的式(2)。

根据 Γ 函数的递推公式与余元公式, 式(39)可改写为

$$\int_0^{+\infty} (1-\cos x) x^{-(5-2D)} dx = \frac{\Gamma(2D-2)\sin((D-1.5)\pi)}{(4-2D)(2D-3)} \quad (40)$$

式(15)衍生出函数 $z(x_1)$ 与 $z(x_2)$ 之间的结构函数为

$$\langle [z(x_1)-z(x_2)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [1-e^{i\omega(x_1-x_2)}] P(\omega) d\omega \quad (41)$$

要说明的是, 式(41)也都不同于文献[27]的式(11)和文献[28]的式(2.3)。

由式(29)可得双边连续功率谱密度函数为

$$P(\omega) = \frac{1}{2\ln\gamma} G^{2D-2} |\omega|^{2D-5} \quad (42)$$

奇函数 $\sin\omega(x_1-x_2)$ 在对称区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的定积分为0, 将式(42)代入式(41)得

$$\langle [z(x_1)-z(x_2)]^2 \rangle = \frac{1}{2\ln\gamma} G^{2D-2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1-\cos|x_1-x_2|\omega) |\omega|^{2D-5} d\omega = \frac{\int_0^{+\infty} (1-\cos x) x^{-(5-2D)} dx}{\ln\gamma} G^{2D-2} |x_1-x_2|^{4-2D} \quad (43)$$

其中 $x=|x_1-x_2|\omega$

式中 x ——积分变量

将式(40)代入式(43)得

$$\langle [z(x_1)-z(x_2)]^2 \rangle = \frac{\Gamma(2D-2)\sin[(D-1.5)\pi]}{(4-2D)(2D-3)\ln\gamma} G^{2D-2} |x_1-x_2|^{4-2D} \quad (44)$$

令 $x_1=x+\tau, x_2=x$, 可得结合部的结构函数为

$$S(\tau) = \langle [z(x+\tau)-z(x)]^2 \rangle = \begin{cases} \frac{\Gamma(0^+)}{2\ln\gamma} \tau^2 = +\infty & (D \rightarrow 1^+) \\ \frac{\Gamma(2D-2)\sin((D-1.5)\pi)}{(4-2D)(2D-3)\ln\gamma} G^{2D-2} \tau^{4-2D} & (D \neq 1.5) \\ \frac{\pi}{2\ln\gamma} G\tau & (D = 1.5) \\ \frac{1}{0^+ \ln\gamma} G^2 = +\infty & (D \rightarrow 2^-) \end{cases} \quad (45)$$

等效表面高度式(15)与两个粗糙表面1、2高度之间的关系为

$$z(x) = z_1(x) - z_2(x) \quad (46)$$

式中 $z_i(x)$ ——粗糙表面 i 的高度, $i=1,2$

将式(46)代入式(45)得

$$S(\tau) = \langle [z_1(x+\tau)-z_2(x+\tau)-z_1(x)+z_2(x)]^2 \rangle = \langle [z_1(x+\tau)-z_1(x)]^2 \rangle -$$

$$2\langle [z_1(x+\tau)-z_1(x)][z_2(x+\tau)-z_2(x)]\rangle +$$
$$\langle [z_2(x+\tau)-z_2(x)]^2\rangle \quad (47)$$

因两粗糙表面在统计学上互不相关,故以下交叉乘积项为 0,即

$$\langle [z_1(x+\tau)-z_1(x)][z_2(x+\tau)-z_2(x)]\rangle = 0$$
$$(48)$$

因此式(47)可改写为

$$S(\tau) = S_1(\tau) + S_2(\tau) \quad (49)$$

式中 $S_i(\tau)$ ——表面 i 的结构函数, $i=1,2$

当 $\gamma=\gamma_1=\gamma_2$, 不失去一般性, 将式(49)展开得

$$\frac{\Gamma(2D-2)\sin((D-1.5)\pi)}{(4-2D)(2D-3)}G^{2D-2}\tau^{4-2D} =$$
$$\frac{\Gamma(2D_1-2)\sin((D_1-1.5)\pi)}{(4-2D_1)(2D_1-3)}G_1^{2D_1-2}\tau^{4-2D_1} +$$
$$\frac{\Gamma(2D_2-2)\sin((D_2-1.5)\pi)}{(4-2D_2)(2D_2-3)}G_2^{2D_2-2}\tau^{4-2D_2} \quad (50)$$

式中 γ ——结合部非整数相位随机参数

γ_i ——表面 i 的相位随机参数, $i=1,2$

D_i ——表面 i 的分形维数, $i=1,2$

G_i ——表面 i 的分形粗糙度, $i=1,2$

本文广泛涉及伽马函数, 文献[29]只给出伽马函数在闭区间 $1\leq x\leq 2$ 的近似解, 即

$$\Gamma(x)\approx 1-0.574\,864\,6(x-1)+0.951\,236\,3(x-1)^2 -$$
$$0.699\,858\,8(x-1)^3+0.424\,554\,9(x-1)^4 -$$
$$0.101\,067\,8(x-1)^5 \quad (1\leq x\leq 2) \quad (51)$$

为获得伽马函数在 $0 < x < +\infty$ 整个开区间的精确值, 可在 Matlab R2009b Command Window 窗口的命令行输入 2 行代码

$$x=0.01:0.1:1\,000;\% \, 1\,000 \text{ 可取任意较大值}$$
$$\text{plot}(x,\text{gamma}(x))$$

文献[29]近似解与本文解的比较如图 2 所示, 可见采用本文解可求解伽马函数。

当 $G_1=3.6\times 10^{-10}\text{ m}$ 、 $G_2=2.4\times 10^{-10}\text{ m}$ 、 $\gamma=\gamma_1=\gamma_2=1.5$ 时, 粗糙表面 1、2 和结合部的结构函数如图 3 所示。

3.1 分形维数相等 ($D_1=D_2$)

此时式(50)可退化为

$$\frac{\Gamma(2D-2)\sin((D-1.5)\pi)}{(4-2D)(2D-3)}G^{2D-2}\tau^{4-2D} =$$
$$\frac{\Gamma(2D_1-2)\sin((D_1-1.5)\pi)}{(4-2D_1)(2D_1-3)}(G_1^{2D_1-2}+G_2^{2D_1-2})\tau^{4-2D_1}$$
$$(52)$$

为满足关于自变量尺度滞后 τ 的恒等式(52)得

$$D=D_1 \quad (53)$$

$$G=(G_1^{2D_1-2}+G_2^{2D_2-2})^{\frac{1}{2D_1-2}} \quad (54)$$

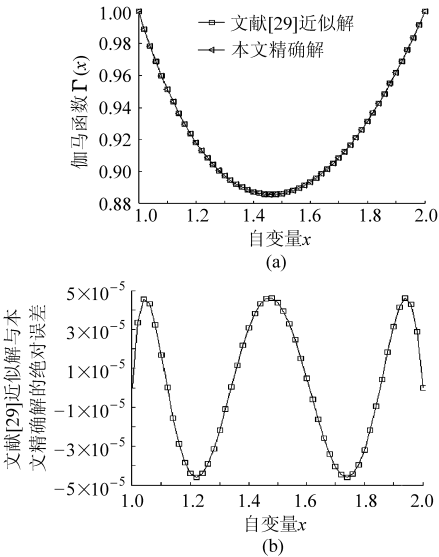


图 2 文献[29]解与本文解的比较
Fig. 2 Comparison of reference [29] solution with the proposed solution

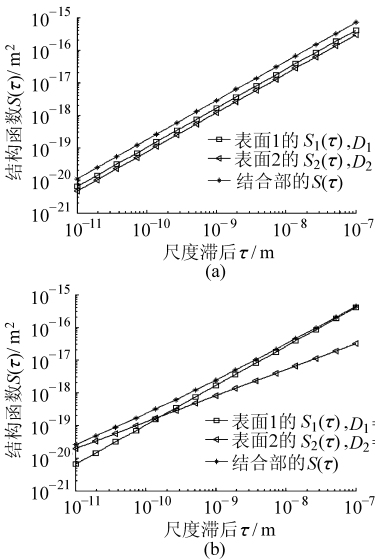


图 3 3 种结构函数
Fig. 3 Three kinds of structure function

由图 3a 结果表明, 在双对数坐标系下, 结合部的结构函数 $S(\tau)$ 与 τ 呈线性关系, 且与 $S_1(\tau)$ 和 $S_2(\tau)$ 平行, 其在 $S(\tau)$ 轴上的纵截距大于 $S_1(\tau)$ 和 $S_2(\tau)$, 结合部具有单重分形特性, 分形维数 D 与粗糙表面的分形维数 D_1 和 D_2 相等(式(53)), 按照式(54), 可得 $G>G_1$ 与 $G>G_2$, 分形粗糙度 G 更大, 即结合部比相互接触两个粗糙表面更粗糙。造成结合部比相互接触两个粗糙表面更粗糙的本质原因是: 根据式(49)可知, 结合部的结构函数等效为表面 1、表面 2 的结构函数之和。

3.2 分形维数不相等 ($D_1\neq D_2$)

由图 3b 显见, 在双对数坐标系下, 结合部的结构函数 $S(\tau)$ 与 τ 不再呈线性关系, 而呈现为一条向上凹的曲线弧, 且粗糙表面的分形维数 D_1 和 D_2

相差越大,此曲线弧的弯曲程度越显著,曲线弧的前半段主要显示粗糙表面 $S_2(\tau)$ 的分形特性,后半段主要显示粗糙表面 $S_1(\tau)$ 的分形特性,这是两个分形特征不一样的表面,进而导致了问题的复杂性。

从高等数学的严格意义上讲,没有条件能使关于自变量 τ 的方程式(50)恒成立。为解决此问题,先根据表面 1、2 的结构函数和式(49),获得结合部的结构函数,此结构函数在双对数坐标系下虽不是一条直线,但使用最小二乘法可近似视其为一条直线,从而可识别结合部的 D 、 G 。

不失一般性,由式(45)可得直线方程

$$\lg S(\tau) = (4 - 2D)\lg \tau + (2D - 2)\lg G + \lg \frac{\Gamma(2D - 2)\sin((D - 1.5)\pi)}{(4 - 2D)(2D - 3)\ln \gamma}$$

(55)

令

$$k = 4 - 2D$$

(56)

$$g = -\lg G$$

(57)

将式(56)、(57)代入式(55)得

$$\lg S(\tau) = k\lg \tau + (2 - 2D)g + \lg \frac{\Gamma(2D - 2)\sin((D - 1.5)\pi)}{(4 - 2D)(2D - 3)\ln \gamma}$$

(58)

再令

$$b = (2 - 2D)g + \lg \frac{\Gamma(2D - 2)\sin((D - 1.5)\pi)}{(4 - 2D)(2D - 3)\ln \gamma}$$

(59)

将式(59)代入式(58)得

$$\lg S(\tau) = k\lg \tau + b$$

(60)

直线方程(60)如图 4 所示。

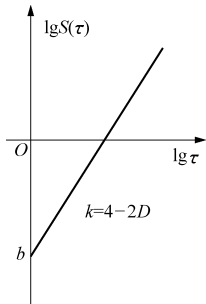


图 4 结合部的常用对数结构函数

Fig. 4 Logarithm structure function of joint interface

根据式(56), $D = 2 - 0.5k$ 由 k 决定。根据式(59), g 由 b 、 D 决定,因 D 由 k 决定,所以 g 由 b 、 k 决定。根据式(57), $G = 10^{-g}$ 由 g 决定,故 G 由 b 、 k 决定。

4 静摩擦因数理论解的实验验证

4.1 实验原理

电动机在时间 t 内完成的额定功为

$$W = \frac{\pi}{30} T_N n_1 t$$

(61)

式中 T_N ——电动机额定转矩, $N \cdot m$

n_1 ——电动机转速实际值, r/min

电动机在时间 t 内的平均额定功率为

$$P_N = \frac{\pi}{30} T_N n_1$$

(62)

需注意,式(62)也不同于文献[30]的式(1)。

旋转工作台消耗的功率为

$$P_2 = \frac{\pi}{30} T_2 n_2 = \frac{\pi}{30} F_f \frac{i}{1\,000} n_2 = \frac{\pi}{30\,000} f P_{in_2}$$

(63)

式中 T_2 ——旋转工作台转矩, $N \cdot m$

n_2 ——旋转工作台转速, r/min

F_f ——两静压导轨表面间总摩擦力, N

i ——总摩擦力作用的等效半径, mm

f ——两静压导轨表面间的摩擦因数

电动机的额定功率是对应于额定环境温度 $40^\circ C$ 时的允许输出功率,因此,当环境温度低于或高于 $40^\circ C$ 时,电动机允许输出的功率可适当增加或减小。增减后的允许输出功率为

$$P_1 = P_N \sqrt{1 + (1 + \alpha) \frac{40 - \theta}{\theta_N}} = P_N \xi$$

(64)

式中 α ——满载时的不变损耗(包括铁损耗、机械损耗和附加损耗)与可变损耗(铜损耗)之比

θ ——实际环境温度 θ_N ——额定温升

ξ ——电动机负载

考虑传递过程中的机械损失,可以得到功率平衡关系

$$\eta P_1 = P_2$$

(65)

或

$$f = \frac{1\,000 \xi \eta T_N n_1}{P_{in_2}}$$

(66)

由式(66)可见,若得到电动机在线运行时的 n_1 、 ξ ,就可获得不同法向总载荷 P 时的静摩擦因数。综上所述,实验原理如图 5 所示, h 为公称油膜厚度。

4.2 动力学实验装置

在武汉重型机床集团有限公司 YK31320 型普通滚齿机上开展实验,实验时的工况如图 6 所示。

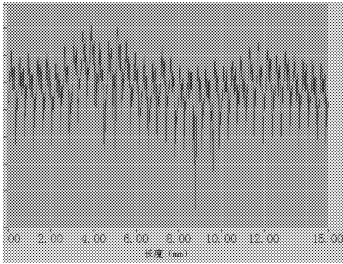
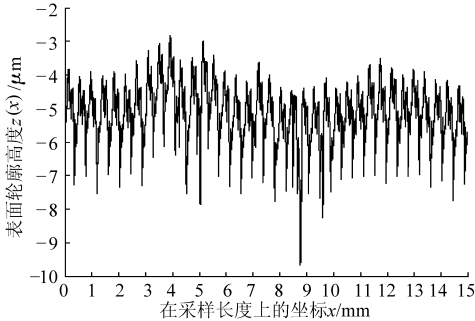
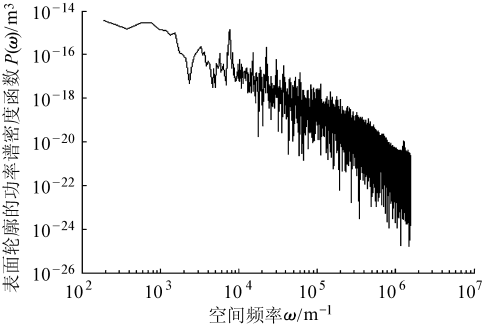
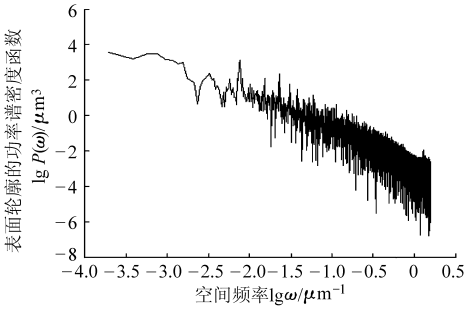
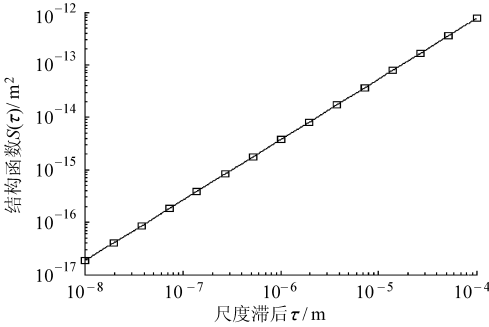
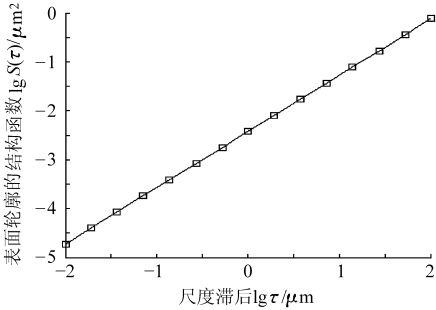
4.3 分形参数实验识别及静摩擦因数的计算

本文的结合部以常用全损耗系统润滑油 L-AN46 为介质,研磨方式加工两液体静压导轨接触表面。液体静压导轨的参数见表 1。

采用英国 Taylor-Hobson 公司的 Talysurf 5-120 型表面轮廓仪,放大倍率为 1 000,采样长度为 15 mm,采样间距为 1 μm ,采样段数为 5,最小二乘滤波,离散化采样点数为 15 000。

表 2 结合部研磨时的分析结果

Tab.2 Analyzing results of grinding joint interface

结果	不均匀刻度结构函数法 (国外学者大多采用)	均匀刻度结构函数法 (中国学者大多采用)
原始轮廓		
滤波轮廓		
实测 PSD		
拟合结构函数		

确定的函数。但式(15)可通过下列带随机相位的有关双变量直角坐标 x 、 y 的 Weierstrass – Mandelbrot 函数^[9,31~35]蜕变而来

$$z(x,y)=L\left(\frac{G}{L}\right)^{D-1}\sqrt{\frac{\ln\gamma}{M}}\sum_{m=1}^M\sum_{n=0}^{n_{\max}}\gamma^{(D-2)n}\left[\cos\phi_{m,n}-\cos\left(\frac{2\pi\gamma^n\sqrt{x^2+y^2}}{L}\cos\left(\arctan\frac{y}{x}-\frac{\pi m}{M}\right)+\phi_{m,n}\right)\right]$$

(67)

式中 L ——采样长度

M ——构造表面重叠隆起部的个数

n ——频率指数

$n_{\max}$ ——与截止长度有关的频率指数

$\phi_{m,n}$ ——在闭区间 $[0,2\pi]$ 范围内分布的随机相位

将识别的结合部参数 D 、 G 代入处处连续、点点不可微、统计学自相似性的 Weierstrass – Mandelbrot 函数式(67),可得三维表面轮廓高度的仿真线,以模拟三维表面轮廓的全貌。表面轮廓高度的实测

线、仿真线如图 7 所示,从图 7c 可见仿真线很接近 实测线,表明识别的结合部参数较合理。

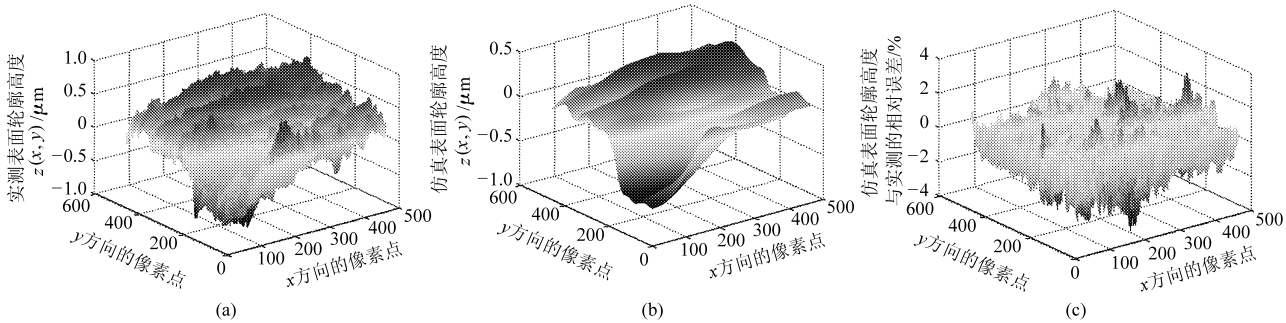


图 7 表面轮廓高度的实测线与仿真线的比较

Fig. 7 Comparison of surface profile height's measuring line with its simulating line

将 $D = 1.5033$ 代入第 2 节中的 Matlab 程序,可得 $\psi = 1.998151045881379$ 。

在法向总载荷 $P = 8\text{ N}$ 时,将表 1 的数据和 $D = 1.5033, G = 2.0066 \times 10^{-9}\text{ m}, \psi = 1.998151045881379$ 代入文献[12]的有关公式、本文式(11)、式(66),可得结合部的理论静摩擦因数 f 为 0.10124,实验静摩擦因数 f 为 0.14626。

4.4 理论静摩擦因数与实验的比较

在不同工件重工况下,理论静摩擦因数与实验的比较如图 8 所示。分析图 8a,在很窄的轻载荷 $0 \sim 320\text{ N}$ 范围内即电动机在低转速情况下,实验静摩擦因数随法向总载荷的增加而减小(因为使工作台开始旋转,作用在工作台上的总切向力越来越大),且实验静摩擦因数会出现忽高忽低的突变波

动现象(因为电动机的低转速导致机床静压导轨出现动态性能不稳定的爬行,严重影响静压导轨的表面粗糙度,造成摩擦副的加速磨损);在很宽的中等载荷 $320 \sim 20\,000\text{ N}$ 范围内即电动机在近似稳定中等转速情况下,实验静摩擦因数随法向总载荷的增加而增加,且实验静摩擦因数比理论低(因为实际两静压导轨表面间存在最小公称油膜厚度的流体膜,将一个静压导轨浮动起来)。从图 8b 中可以看出,本文静摩擦因数与实验的绝对误差在 $-0.04502 \sim 0.00966$ 之间。根据图 8c,本文静摩擦因数与实验的相对误差在 $-30.78\% \sim 9.762\%$ 之间。值得注意的是,因为实际静摩擦因数的变化较小,分析绝对误差比分析相对误差更重要。

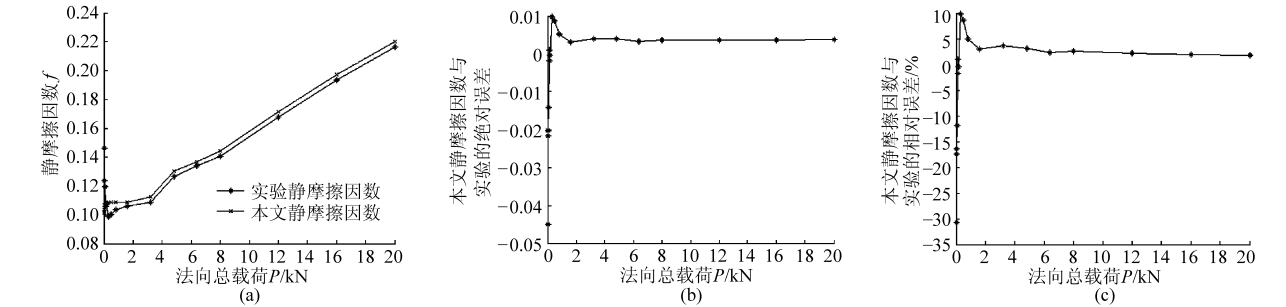


图 8 理论静摩擦因数与实验的比较

Fig. 8 Comparison of theoretical static friction coefficient with experimental one

5 结论

(1)修正结合部静摩擦因数相关公式,编写了解域扩展因子的通用 Matlab 程序,给出识别结合部的 2 个重要表征参数的方法。

(2)以液体静压导轨测试试件的实验结果为基础,对结合部静摩擦因数的理论解进行了验证。理论静摩擦因数与实验的绝对误差在 $-0.04502 \sim 0.00966$ 之间,理论静摩擦因数与实验的相对误差在 $-30.78\% \sim 9.762\%$ 之间。

参 考 文 献

1 尤晋闽,陈天宁. 结合面静摩擦系数的统计模型[J]. 振动与冲击,2010,29(12):26~29,235.
You Jinmin, Chen Tianning. Statistical model of static friction coefficient between joint surfaces[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010,29(12):26~29,235. (in Chinese)

2 Chang Wen-Ruey, Etsion Izhak, Bogy David B. Static friction coefficient model for metallic rough surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1988,110(1):57~63.

- 3 Greenwood J A, Williamson J B P. Contact of nominally flat surfaces[J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1966,295(1442):300~319.
- 4 You Jinmin, Chen Tianning. A static friction model for the contact of fractal surfaces[J]. Proc. IMechE, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2010,224(5):513~518.
- 5 Sui Changfu, Sheng Xuanyu. Fractal transition model in predicting static friction coefficient[J]. Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, 2009,5(4):345~348.
- 6 盛选禹, 雒建斌, 温诗铸. 基于分形接触的静摩擦系数预测[J]. 中国机械工程, 1998,9(7):16~18.
Sheng Xuanyu, Luo Jianbin, Wen Shizhu. Static friction coefficient model based on fractal contact[J]. China Mechanical Engineering, 1998,9(7):16~18. (in Chinese)
- 7 Majumdar Arun, Bhushan Bharat. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1991,113(1):1~11.
- 8 田红亮, 朱大林, 秦红玲. MB 模型计算原理的修正[J]. 三峡大学学报:自然科学版, 2011,33(3):68~73.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling. Modification of MB model's algorithm principle[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2011,33(3):68~73. (in Chinese)
- 9 田红亮, 朱大林, 秦红玲. 固定接触界面法向静弹性刚度的改进弹簧分形模型[J]. 三峡大学学报:自然科学版, 2012,34(6):83~88.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling. Improved spring fractal model for normal static elastic stiffness of stationary contact interface[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2012,34(6):83~88. (in Chinese)
- 10 魏龙, 刘其和, 张鹏高. 基于分形理论的滑动摩擦表面接触力学模型[J]. 机械工程学报, 2012,48(17):106~113.
Wei Long, Liu Qihe, Zhang Penggao. Sliding friction surface contact mechanics model based on fractal theory[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012,48(17):106~113. (in Chinese)
- 11 贺林, 朱均. 粗糙表面接触分形模型的提出与发展[J]. 摩擦学学报, 1996,16(4):375~384.
He Lin, Zhu Jun. Fractal model for contact of rough surfaces[J]. Tribology, 1996,16(4):375~384. (in Chinese)
- 12 兰国生, 张学良, 丁红钦, 等. 基于分形理论的结合面静摩擦因数改进模型[J]. 农业机械学报, 2012,43(1):213~218.
Lan Guosheng, Zhang Xueliang, Ding Hongqin, et al. Modified model of static friction coefficient of joint interfaces based on fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012,43(1):213~218. (in Chinese)
- 13 田红亮, 赵春华, 朱大林, 等. 弹塑性三维各向异性分形表面的接触分析[J]. 三峡大学学报:自然科学版, 2012,34(1):69~73.
Tian Hongliang, Zhao Chunhua, Zhu Dalin, et al. Contact analysis of elastoplastic three-dimensional anisotropic fractal surfaces[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2012,34(1):69~73. (in Chinese)
- 14 Jiang Shuyun, Zheng Yunjian, Zhu Hua. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory[J]. ASME Journal of Tribology, 2010,132(1):011401-1~011401-7.
- 15 Chang Wen-Ruey, Etsion Izhak, Bogy David B. Adhesion model for metallic rough surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1988,110(1):50~56.
- 16 Wang Shao, Komvopoulos Kyriakos. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part I —elastic contact and heat transfer analysis[J]. ASME Journal of Tribology, 1994,116(4):812~823.
- 17 同济大学数学系. 高等数学:上册[M]. 6 版. 北京:高等教育出版社, 2011:178~179, 267, 370.
- 18 田红亮, 赵春华, 朱大林, 等. 金属材料结合部法切向刚度修正与实验验证[J]. 农业机械学报, 2012,43(6):207~214.
Tian Hongliang, Zhao Chunhua, Zhu Dalin, et al. Modification of normal and tangential stiffness for joint interface with metallic material and experimental validation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012,43(6):207~214. (in Chinese)
- 19 Majumdar Arun, Tien Changlin. Fractal characterization and simulation of rough surfaces[J]. Wear, 1990,136(2):313~327.
- 20 卢文祥, 杜润生. 机械工程测试·信息·信号分析[M]. 2 版. 武汉:华中科技大学出版社, 2004:34, 39, 51.
- 21 Berry M V, Lewis Z V. On the Weierstrass - Mandelbrot fractal function[J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A Mathematical and Physical Sciences, 1980,370(1743):459~484.
- 22 Bhushan Bharat, Majumdar Arun. Elastic-plastic contact model for bifractal surfaces[J]. Wear, 1992,153(1):53~64.
- 23 Ganti Suryaprakash, Bhushan Bharat. Generalized fractal analysis and its applications to engineering surfaces[J]. Wear, 1995,180(1~2):17~34.
- 24 Majumdar Arun, Tien Chang Lin. Fractal network model for contact conductance[J]. ASME Journal of Heat Transfer, 1991,113(3):516~525.
- 25 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京:高等教育出版社, 2008:590.
- 26 Wang Shao, Komvopoulos Kyriakos. A fractal theory of the temperature distribution at elastic contacts of fast sliding surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1995,117(2):203~215.
- 27 Majumdar Arun, Bhushan Bharat. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1990,112(2):205~216.
- 28 Berry M V. Diffractals[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1979,12(6):781~797.
- 29 郭建英, 孙永全, 王铭义, 等. 基于计算机仿真的风电机组系统可靠性综合[J]. 机械工程学报, 2012,48(2):2~8.

- Guo Jianying, Sun Yongquan, Wang Mingyi, et al. System reliability synthesis of wind turbine based on computer simulation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012,48(2):2~8. (in Chinese)
- 30 于海生,张建武,张彤,等. 电磁功率分流混合动力汽车传动控制模式研究[J]. 农业机械学报,2012,43(6):1~7.
Yu Haisheng, Zhang Jianwu, Zhang Tong, et al. Transmission control mode of electromagnetic power-split hybrid electric vehicle [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012,43(6):1~7. (in Chinese)
- 31 田红亮,赵春华,方子帆,等. 基于各向异性分形理论的结合面切向刚度改进模型[J]. 农业机械学报,2013,44(3):257~266.
Tian Hongliang, Zhao Chunhua, Fang Zifan, et al. Improved model of tangential stiffness for joint interface using anisotropic fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013,44(3):257~266. (in Chinese)
- 32 田红亮,朱大林,方子帆,等. 赫兹接触 129 年[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2011,33(6):61~71.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Fang Zifan, et al. 129 years of Hertz contact[J]. Journal of China Three Gorges University: Natural Sciences, 2011,33(6):61~71. (in Chinese)
- 33 田红亮,朱大林,秦红玲,等. 结合部法向载荷解析解修正与定量实验验证[J]. 农业机械学报,2011,42(9):213~218.
Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling, et al. Modification of normal load's analytic solutions for joint interface and quantitative experimental verification[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(9):213~218. (in Chinese)
- 34 曹衍龙,徐朋,金鹭,等. 基于图形处理器的三维表面质量快速评定技术[J]. 农业机械学报,2012,43(3):219~222,229.
Cao Yanlong, Xu Peng, Jin Lu, et al. 3-D surface quality evaluation based on graphics processing unit[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012,43(3):219~222,229. (in Chinese)
- 35 方子帆,贺青松,向兵飞,等. 低张力缆索有限元模型及其应用[J]. 工程力学,2013,30(3):445~450.
Fang Zifan, He Qingsong, Xiang Bingfei, et al. Research and applications of FE model on cables in low-tension[J]. Engineering Mechanics, 2013,30(3):445~450. (in Chinese)
-

(上接第 281 页)

- 11 李小彭,王伟,赵米鹤,等. 考虑摩擦因素影响的结合面切向接触阻尼分形预估模型及其仿真[J]. 机械工程学报,2012,48(23):46~50.
Li Xiaopeng, Wang Wei, Zhao Mique, et al. Fractal prediction model for tangential contact damping of joint surface considering friction factors and its simulation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(23): 46~50. (in Chinese)
- 12 Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part I—elastic contact and heat transfer analysis[J]. ASME Journal of Tribology, 1994, 116(4): 812~822.
- 13 Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part II—multiple domains, elastoplastic contacts and applications[J]. ASME Journal of Tribology, 1994, 116(4): 824~832.
- 14 葛世荣,朱华. 摩擦学的分形[M]. 北京:机械工业出版社,2005.
- 15 朱育权,马保吉,姜凌彦. 粗糙表面接触的弹性、弹塑性、塑性分形模型[J]. 西安工业学院学报,2001,21(2):150~157.
Zhu Yuquan, Ma Baoji, Jiang Lingyan. The elastic elastoplastic and plastic fractal contact models for rough surface[J]. Journal of Xi'an Institute of Technology, 2001, 21(2): 150~157. (in Chinese)
- 16 Johnson K L. Contact mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- 17 黄康,赵韩,陈奇. 两圆柱体表面接触承载能力的分形模型研究[J]. 摩擦学学报,2008,28(6):529~533.
Huang Kang, Zhao Han, Chen Qi. Research of fractal contact model on contact carrying capacity of two cylinders' surface[J]. Tribology, 2008, 28(6): 529~533. (in Chinese)
-

(上接第 298 页)

- 12 Chen Y, Zhang M M, Liu Z Q. Study on sintering process of magnetic abrasive particles[J]. Advanced Materials Research, 2011,337:163~167.
- 13 芦亚萍,张军强,马季,等. 超声磁粒复合研磨加工工艺参数控制系统设计[J]. 农业机械学报,2007,38(8):168~172.
Lu Yaping, Zhang Junqiang, Ma Ji, et al. Study on the control of ultrasonic magnetic abrasive finishing[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2007,38(8):168~172. (in Chinese)
- 14 Shinmura T. Magnetic abrasive finishing of rollers[J]. Annals of CIRP,1994,43(1):181~184.
- 15 芦亚萍,马季,蔡军伟,等. 模具自由曲面磁力超精研磨控制系统[J]. 农业机械学报,2006,37(7):163~166.
Lu Yaping, Ma Ji, Cai Junwei, et al. Study of intelligent control system in magnetic abrasive finishing on molds free surface process[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2006,37(7):163~166. (in Chinese)
- 16 Ferreira N G, Abramof E, Corat E J, et al. Residual stresses and crystalline quality of heavily boron-doped diamond films analysed by micro-Raman spectroscopy and X-ray diffraction[J]. Carbon, 2003, 41(6): 1301~1308.